Apunt sobre la mitjana harmònica des de la geometria

Ramon Nolla
Departament de Matemàtiques
IES Pons d'Icart

Els pitagòrics concebien l'Univers com un "cosmos", un tot ordenat. El nombre era el principi a través del qual aquest tot es manifestava a l'home. Possiblement, un dels descobriments que determinaren l'adopció d'aquest punt de vista fou que les proporcions que apareixien a les escales musicals podien ser explicades amb els nombres i que les teories creades amb aquests servien per explicar altres fenòmens. Així ho explica Aristòtil:[1]

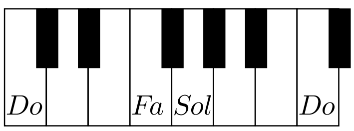
> A l'època d'aquests [els filòsofs atomistes] i abans que ells, els anomenats pitagòrics es dedicaren a les matemàtiques i foren els primers en fer-les progressar; absorts en el seu estudi van creure que els seus principis ho eren de totes les coses. I com que els nombres són per naturalesa els primers d'aquests principis, i en els nombres creien contemplar moltes semblances amb els éssers existents i amb els que estan en formació —més que en el foc, la terra, o l'aigua (essent tal modificació dels nombres la justícia, tal altra l'ànima i la raó, una altre l'oportunitat, i quasi bé de manera semblant totes les altres coses)—; i com que veien que els atributs i les relacions de les escales musicals eren expressables en nombres, i semblava que totes les altres coses estaven constituïdes de manera similar, en tota la seva naturalesa, als nombres, i aquests semblaven ser els primers de tota la naturalesa, van suposar que els elements dels nombres eren els elements de tots els éssers existents, i que els cels tots eren harmonia i nombre.

Els pitagòrics observaren sobre un *monocordi* que allargant o escurçant la longitud ℓ de la corda, aquest produïa en tocar-la sons harmoniosos depenent de les relacions entre les longituds considerades. Per exemple, algunes de les longituds experimentades foren:

- La longitud ℓ i la longitud meitat $\frac{\ell}{2}$. Aquí es repetien els sons, encara que aquest últim era més agut (major freqüència de vibració) que el primer. Anomenem *octava* aquest últim so respecte del primer.
- La longitud mitjana aritmètica $\frac{\ell+\ell/2}{2} = \frac{3}{4}\,\ell$ entre les dues anteriors. En aquest cas apareixia un altre so harmoniós que anomenem la *quarta* del produït per ℓ .
- La longitud mitjana harmònica $\frac{2}{3}\,\ell$ entre les dos primeres, ℓ i $\frac{\ell}{2}$, el so harmoniós que apareixia l'anomenem la *quinta* del produït per ℓ.

Si comparem amb les tecles blanques d'un piano, i la nota corresponent a ℓ és un *Do*, tenim les següents equivalències:

ℓ	$\frac{3}{4}\,\ell$	$\frac{2}{3}\,\ell$	$\frac{1}{2}\,\ell$
Inicial	Quarta	Quinta	Octava
Do	*Fa*	*Sol*	*Do*



Seguidament, enfocarem la nostra atenció en la definició i construcció de la mitjana harmònica des del punt de vista de la geometria.

[1] *Metafísica*, I 985b.

La mitjana harmònica. Definició i construccions

Donats dos nombres a i b, $(0 < a < b)$, —els quals identificarem amb segments de longituds a i b—, anomenem *mitjana harmònica d'a i b* el nombre x tal que

$$\frac{x-a}{b-x} = \frac{a}{b}\,.$$

És a dir,

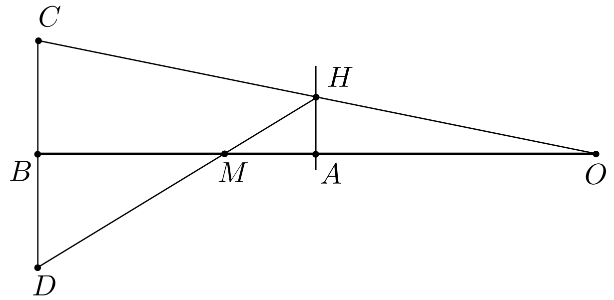
> El nombre tal que la raó entre el seu excés del petit i el seu defecte del gran és igual a la raó entre el petit i el gran.

A continuació es presenten diverses construccions justificades sense fer-ne l'anàlisi.[2]

• Construcció 1

Des d'aquesta definició s'obté la construcció que trobem a Pappo [iv].[3]

Siguin els segments $OA = a$ i $OB = b$. Els situem com a la figura adjunta i construïm:



i) La recta perpendicular CD a OB, per B, tal que $BC = BD$.

ii) El segment CO.

iii) La recta perpendicular, per A, a OB. En resulta el punt d'intersecció H amb OC.

iv) El segment DH. En resulta el punt d'intersecció M amb OB.

Llavors, $x = OM$ és la mitjana harmònica de $a = OA$ i $b = OB$.

Efectivament,

$$\frac{x-a}{b-x} = \frac{OM-OA}{OB-OM} = \frac{AM}{BM} \overset{(1)}{=} \frac{AH}{BD} \overset{(2)}{=} \frac{AH}{BC} \overset{(3)}{=} \frac{OA}{OB} = \frac{a}{b}\,.$$

(1) Per la semblança dels triangles $\triangle HAM$ i $\triangle DBM$.
(2) En ser $BD = BC$, per la construcció feta.
(3) Per la semblança dels triangles $\triangle OAH$ i $\triangle OBC$.

[2]Des del punt de vista de la pedagogia, som partidaris d'efectuar les anàlisis que condueixen a aquestes construccions. Però també és interessant no presentar-les per a que cadascú pugui fer aquest treball analític sense interferències. De fet, a les obres dels clàssics grecs quasi bé mai es presenten les anàlisis que portaven al descobriment de les construccions; només s'hi troben les demostracions que estableixen la correcció de les construccions fetes.

[3]Eecke, Paul Ver[1933] *Pappus d'Alexandrie. La Collection Mathématique* proposions III.9 i III.10, vol 1, 55-57, Bruges. [Reeditat per Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, Paris, 1982.]

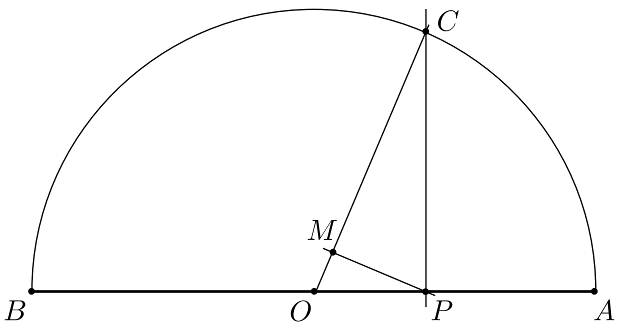
• Construcció 2

Una segona construcció pot ser obtinguda des d'una presentació diferent de la igualtat de proporcions de la definició.[4]

$$\frac{a}{b} = \frac{x-a}{b-x} \implies bx - ba = ab - ax \implies ax + bx = 2ab \implies (a+b)x = 2ab$$

$$\implies x = \frac{2ab}{a+b} = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}} \implies \boxed{\frac{x}{\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{ab}}{\frac{a+b}{2}}}.$$

Siguin els segments $PA = a$ i $PB = b$. Els situem com a la figura adjunta i construïm:



i) El cercle (O, OA) de diàmetre AB.
ii) La recta perpendicular, per P, al segment AB. En resulta el punt d'intersecció C sobre la circumferència.
iii) El radi OC.
iv) La recta perpendicular, per P, al segment OC.

Llavors, $x = CM$ és la mitjana harmònica de $a = PA$ i $b = PB$.

Efectivament,

$$\frac{x}{\sqrt{ab}} \overset{(1)}{=} \frac{CM}{CP} \overset{(2)}{=} \frac{CP}{OC} \overset{(3)}{=} \frac{\sqrt{ab}}{\frac{a+b}{2}}.$$

(1) $\sqrt{ab} = CP$, pel teorema de l'altura aplicat al triangle $\triangle ACB$.
(2) Per la semblança dels triangles $\triangle CMP$ i $\triangle CPO$.
(3) OC és la meitat del diàmetre $AB = PA + PB = a + b$.

Observació: Notem que que $PC = \sqrt{ab}$ és la mitjana geomètrica de PA i PB, i OC n'és la mitjana aritmètica.

[4] Pappo cita aquesta construcció en el lema previ del seu estudi de mitjanes a l'obra citada, vol 1, 50-51. L'atribueix a un geòmetra desconegut i sembla que no acabi d'entendre-la.

• Construcció 3

Una altra construcció que només apuntarem però no farem perquè té un grau de complexitat més gran, es pot obtenir de l'observació següent:

$$x = \frac{2ab}{a+b} \Longrightarrow \frac{1}{x} = \frac{a+b}{2ab} \Longrightarrow \frac{1}{x} = \frac{\frac{a+b}{ab}}{2} \Longrightarrow \boxed{\frac{1}{x} = \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}}.$$

És a dir, l'invers de la mitjana harmònica de dos nombres és igual a la mitjana aritmètica dels inversos del nombres. D'aquí surten dues construccions:

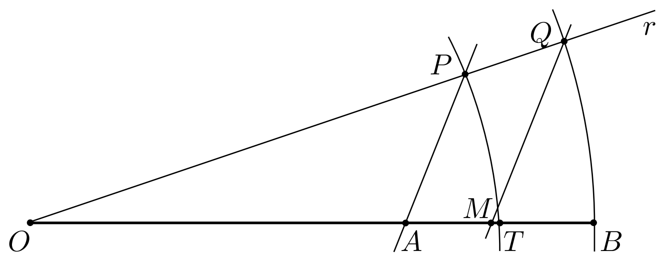
- Mitjançant el traçat d'una hipèrbola.
- Mitjançant la tècnica pitagòrica d'aplicació d'àrees. (S'han de construir diversos rectangles d'àrea igual a 1, per poder construir $y_1 = \frac{1}{a}$, $y_2 = \frac{1}{b}$, etc.)

• Construcció 4

Aquesta construcció s'obté de l'observació que la raó entre un dels nombres i la mitjana harmònica és igual a la raó entre la mitjana aritmètica i l'altre nombre.

$$x = \frac{2ab}{a+b} \Longrightarrow \frac{a+b}{2} = \frac{2ab}{x} \Longrightarrow \boxed{\frac{a}{x} = \frac{\frac{a+b}{2}}{b}}.$$

Siguin els segments $OA = a$ i $OB = b$. Els situem com a la figura adjunta i construïm:



i) Una recta r pel punt O.
ii) El cercle (O, OB). Talla r en Q, és a dir $OQ = b$.
iii) El punt mitjà T d'AB. Obtenim $OT = \frac{a+b}{2}$.
iv) El cercle (O, OT). Talla r en P, és a dir $OP = \frac{a+b}{2}$.
v) El segment PA i la seva paral·lela per Q. En resulta el punt M sobre OB.

Llavors, $x = OM$ és la mitjana harmònica de $a = OA$ i $b = OB$.

Efectivament, per la construcció feta els triangles $\triangle OAP$ i $\triangle OMQ$ són semblants i, per tant,

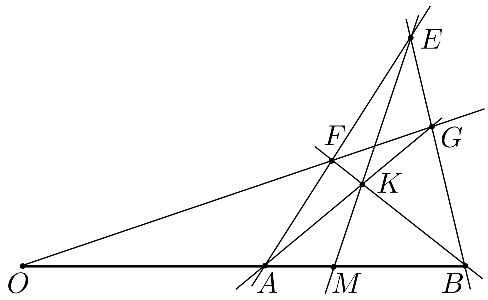
$$\frac{a}{x} = \frac{OA}{OM} \overset{(1)}{=} \frac{OP}{OQ} \overset{(2)}{=} \frac{OT}{OB} = \frac{\frac{a+b}{2}}{b}.$$

(1) Per la semblança esmentada.
(2) Per la construcció en les etapes ii, iii, iv.

• Construcció 5 (amb regle sol)

En el VIIè llibre de la *Collection* de PAPPO trobem un grup de teoremes destinats a facilitar la lectura dels *Porismes*, obra desapareguda d'EUCLIDES [IIIaC], que tenen a veure amb les construccions geomètriques amb regle sol. Aquests pertanyen al camp que estudia la geometria projectiva nascuda al segle XVII de la mà del francès Girard Desargues com a prolongació natural dels estudis de perspectiva dels pintors del Renaixement italià en el segle XV. El teorema 131 del llibre de PAPPO porta implícita una construcció de la mitjana harmònica amb l'únic ús del regle.[5] Presentem la construcció i la seva demostració seguint la línia del treball de PAPPO, basada en el concepte de semblança.

Siguin els segments OA i OB. Els situem com a la figura adjunta i construïm la seva mitjana harmònica:



i) Les rectes AE i BE, en què E és un punt exterior a la recta OB.

ii) Una recta, per O la qual talla AE i BE en F i G.

iii) Les rectes AG i BF, les quals es tallen K.

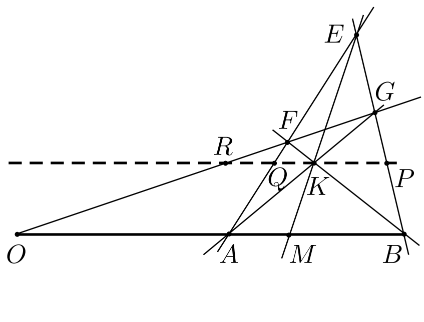
iv) La recta EK, què talla OB en M.

Llavors, OM és la mitjana harmònica d'OA i OB.

Efectivament, tracem la paral·lela a OB pel punt K i utilitzem la semblança de triangles.

$$\triangle EMA \sim \triangle EKQ \text{ i } \triangle EMB \sim \triangle EKP$$
$$\Longrightarrow \frac{AM}{QK} = \frac{EM}{EK} = \frac{MB}{KP} \Longrightarrow \boxed{\frac{AM}{MB} = \frac{QK}{KP}}. \quad (1)$$

$$\triangle GOA \sim \triangle GRK \text{ i } \triangle GOB \sim \triangle GRP$$
$$\Longrightarrow \frac{OA}{RK} = \frac{GO}{GR} = \frac{OB}{RP} \Longrightarrow \boxed{\frac{OA}{OB} = \frac{RK}{RP}}. \quad (2)$$



[5] El concepte de mitjana, proporció o divisió armònica d'un segment resulta central en *Grand livre des sections coniques* [1685] de LA HIRE en què es presenta l'estudi de les còniques des d'un punt de vista projectiu seguint el camí obert per DESARGUES.

$$\begin{aligned}
&\triangle FOA \sim \triangle FRQ \text{ i } \triangle FOB \sim \triangle FRK \\
&\Longrightarrow \quad \frac{OA}{RQ} = \frac{FO}{FR} = \frac{OB}{RK} \Longrightarrow \boxed{\frac{OA}{OB} = \frac{RQ}{RK}}\,.
\end{aligned} \tag{3}$$

Llavors,

$$(2) \text{ i } (3) \Longrightarrow \frac{OA}{OB} = \frac{RK - RQ}{RP - RK} = \frac{QK}{KP}\,. \tag{4}$$

I, finalment, obtenim que OM és la mitjana harmònica cercada. Efectivament,

$$(1) \text{ i } (4) \Longrightarrow \boxed{\frac{AM}{MB} = \frac{OA}{OB}}\,.$$