Activitats.
Moviments del pla i mosaics periòdics a la Casa Castellarnau

RAMON NOLLA / RAMON MASIP

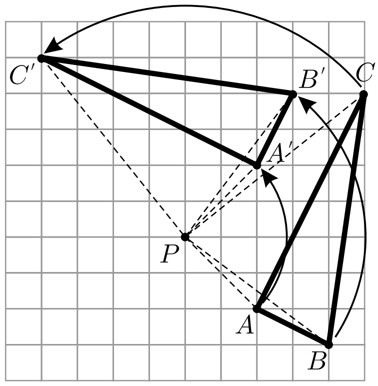
Departament de Matemàtiques
IES Pons d'Icart
2007

Activitats. Moviments del pla i mosaics periòdics a la Casa Castellarnau

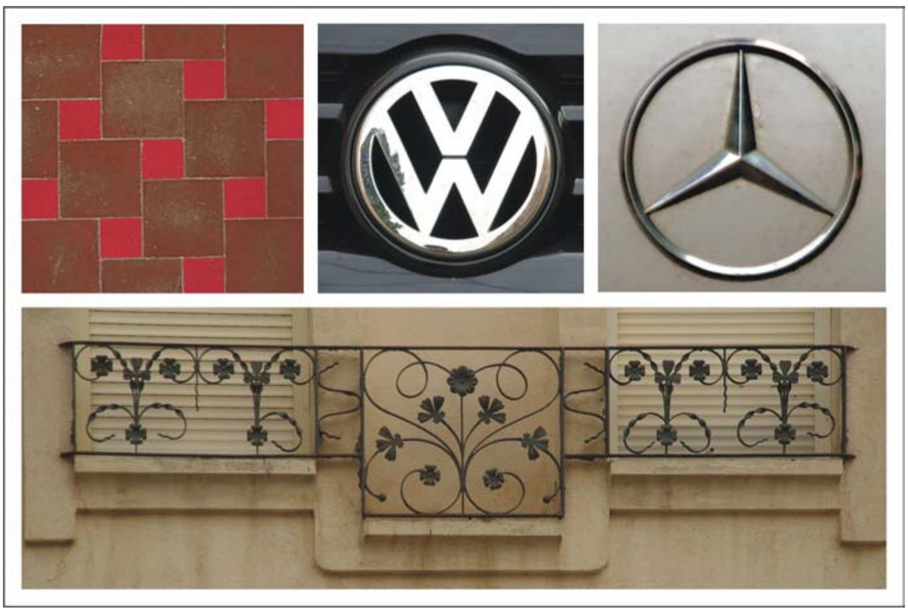
RAMON NOLLA / RAMON MASIP
Departament de Matemàtiques
IES Pons d'Icart – 2007

1 Moviments del pla

Una de les afirmacions que es poden fer, si observem amb atenció la figura de la dreta, és que si girem el triangle $\triangle ABC$ un angle de 90° al voltant del punt P, en resulta el triangle $A'B'C'$. També es pot dir que, mitjançant aquest gir, el triangle ABC es superposa sobre el triangle $A'B'C'$. En geometria diem que els punts del pla han sigut sotmesos a una *transformació* tal que, en concret, els punts A, B i C s'han transformat en els punts A', B', C'.



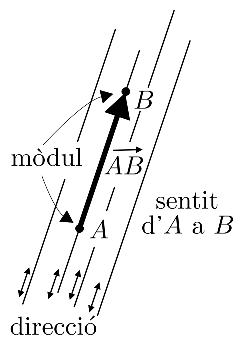
Aquesta transformació forma part d'un grup de transformacions que s'anomenem *moviments* o *isometries* perquè no deformen les figures, les mantenen rígides. És a dir les distàncies i angles entre els elements, —punts, segments, . . .—, de la figura inicial es conserven en la figura transformada. En les imatges de sota podeu observar moviments que superposen les figures sobre elles mateixes sense que canviï el seu aspecte ni grandària, —respectivament d'esquerra a dreta i de dalt a baix—: (1) girs de 90°, 180°, 270° i translacions, (2) simetria respecte un eix vertical, (3) girs de 120°, 240° i tres simetries axials d'eixos concurrents i (4) simetria axial d'eix vertical.



1.1 Definicions

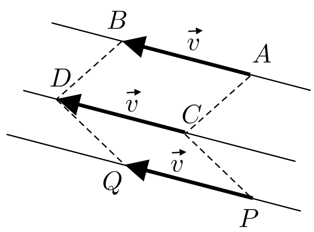
Concretarem les idees que hem presentat sobre els conceptes de transformació i moviment del pla i, també, el concepte de vector d'utilitat per definir les translacions, en la llista de definicions següent:

Vector. Un vector $\overrightarrow{AB}$ és un segment AB dotat de direcció i sentit, en què A i B són punts del pla. Els trets que el caracteritzen són:[1]

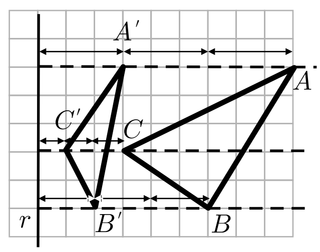


- La *longitud* o *mòdul* igual a $d(A, B)$.
- La *direcció* igual a la de la recta que li fa de suport. (Entenem la direcció d'una recta com la propietat que comparteix amb les seves paral·leles i només amb elles.)
- El *sentit* determinat per l'ordre (A, B) de presentació dels extrems del segment. El punts A i B reben respectivament els noms d'*origen* i *extrem* del vector.

Utilitzarem els vectors per definir les translacions. Per aquest motiu considerem tots els vectors que tenen igual mòdul, direcció i sentit, però diferent posició, com a representants d'un mateix vector, —el qual anomenem *lliure*—. A la figura del costat, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, i $\overrightarrow{PQ}$ representen el mateix vector el qual representem amb una única lletra $\vec{v}$.

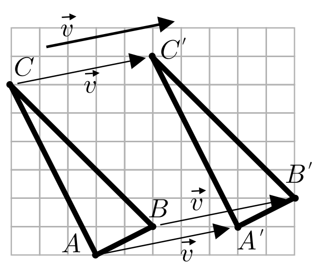


Transformació. Una transformació $\mathcal{T}$ del pla és una relació entre punts del pla tal que cada punt A del pla es relaciona amb un altre i únic punt $\mathcal{T}(A) = A'$ del pla el qual anomenem *transformat* d'A. En el gràfic de la dreta el transformat de cada punt s'obté reduint a la tercera part la seva distància a la recta r.



Moviment o isometria. Un moviment o isometria del pla és una transformació $\mathcal{T}$ en què es conserven les distàncies. És a dir, $d(\mathcal{T}(A), \mathcal{T}(A)) = d(A, B)$.

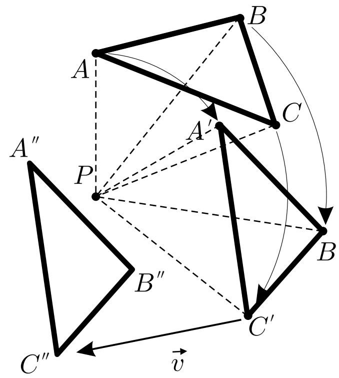
Observació: Es pot demostrar que si es conserven les distàncies es conserven els angles i per això diem que els moviments no canvien la forma ni la grandària dels objectes geomètrics. Així podem afirmar que en el gràfic superior de la dreta es presenta una transformació que no és una isometria i en el de sota es presenta una isometria.



[1] La distància entre dos punts P i Q qualssevol es presenta amb la notació $d(P, Q)$.

Tipus de moviments.

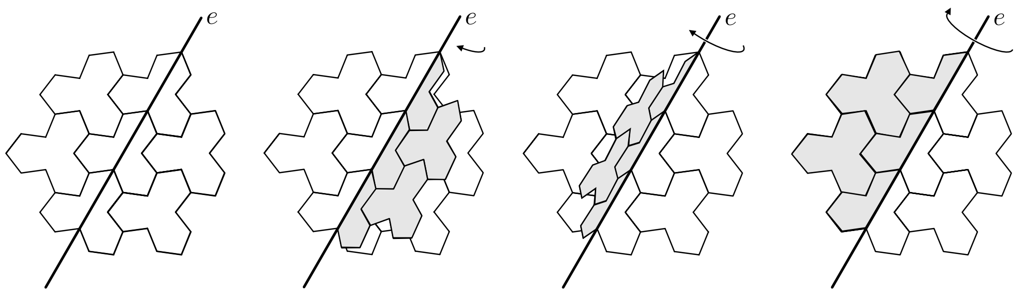
- **Translacions** Una translació $\mathcal{T}_{\vec{v}}$ de vector $\overrightarrow{v}$, transforma cada punt A en el punt $\mathcal{T}_{\vec{v}}(A) = A'$, de manera que $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{v}$. (Al costat podeu veure una translació de vector $\overrightarrow{v}$ sobre un triangle $\triangle A'B'C'$.)



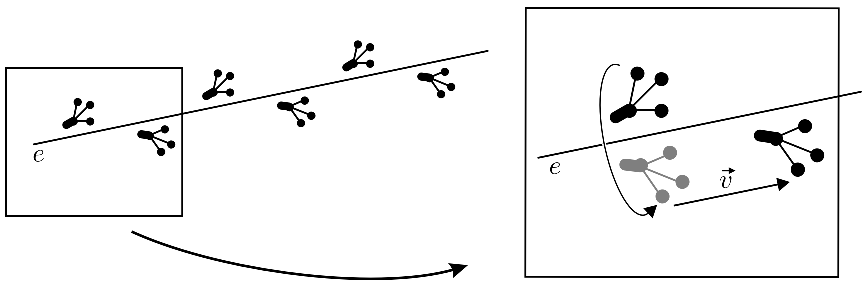
- **Girs.** Un gir $\mathcal{G}_{P,\alpha}$ de centre P i angle α transforma cada punt A en el punt $\mathcal{G}_{P,\alpha}(A) = A'$, de manera que l'angle $\angle APA' = \alpha$. (Al costat podeu veure un gir de 60° sobre un triangle $\triangle ABC$.)

- **Simetries axials.** Una simetria $\mathcal{S}_e$ d'eix e transforma cada punt A en el punt $\mathcal{S}_e(A) = A'$, de manera que $d(A, e) = d(A', e)$. D'una forma equivalent es pot dir que e és la mediatriu del segment AA'.

  Observació: Quan diem que un disseny presenta un simetria axial, vol dir que existeix una línia, —l'eix de simetria—, per la qual podem fer un plec del pla que conté el disseny. Llavors, en fer el plegament, la part del disseny que es troba en un semiplà se superposa i coincideix amb la part del disseny de l'altra semiplà.



- **Lliscaments.** Un lliscament $\mathcal{L}_{e,\vec{v}}$ d'eix e i vector $\overrightarrow{v}$ és una transformació que es compon d'una simetria d'eix e i una translació de vector $\overrightarrow{v}$. Per trobar el transformat A' d'un punt A, primer cal aplicar-li la simetria i després, al punt obtingut la translació.



1.2 Un exemple d'identificació de moviments que no alteren l'aspecte d'una figura

Us presentem el mosaic del terra de la Rambla de Tarragona.[2] Podreu trobar-hi els moviments que, un cop aplicats, superposen i fan coincidir els dissenys inicial i final. També hi trobareu regions que generen tot el mosaic a partir dels moviments anteriors. A la figura adjunta hem remarcat:

– Centres de gir de 180°. (Petits cercles.)

– Eixos de simetria. (Línies discontínues de punts i ratlles.)

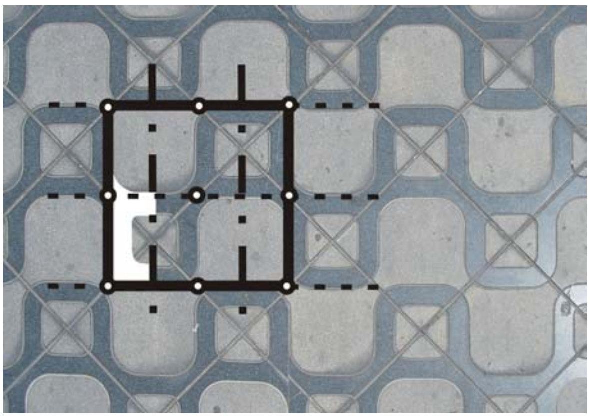
– Eixos de lliscament (Línies discontínues horitzontals.)

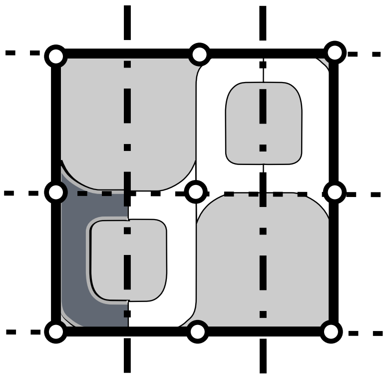
– Un quadrat mínim que genera tot el mosaic si fem translacions segons els vectors determinats pels seus costats i les seves composicions.

– La regió mínima, en color blanc, que genera tot el motiu dins del quadrat mínim anterior per aplicació de:

  a) Una simetria axial sobre aquesta regió.

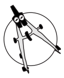
  b) Un gir de 180° sobre la configuració que resulta després de la simetria anterior.





[2]Extret del treball de recerca de Georgina Mendoza, *Mosaics periòdics. Disseny, recerca i identificació a l'entorn ciutadà*, IES Pons d'Icart, Tarragona, 2005.

1.3 Activitats sobre moviments del pla

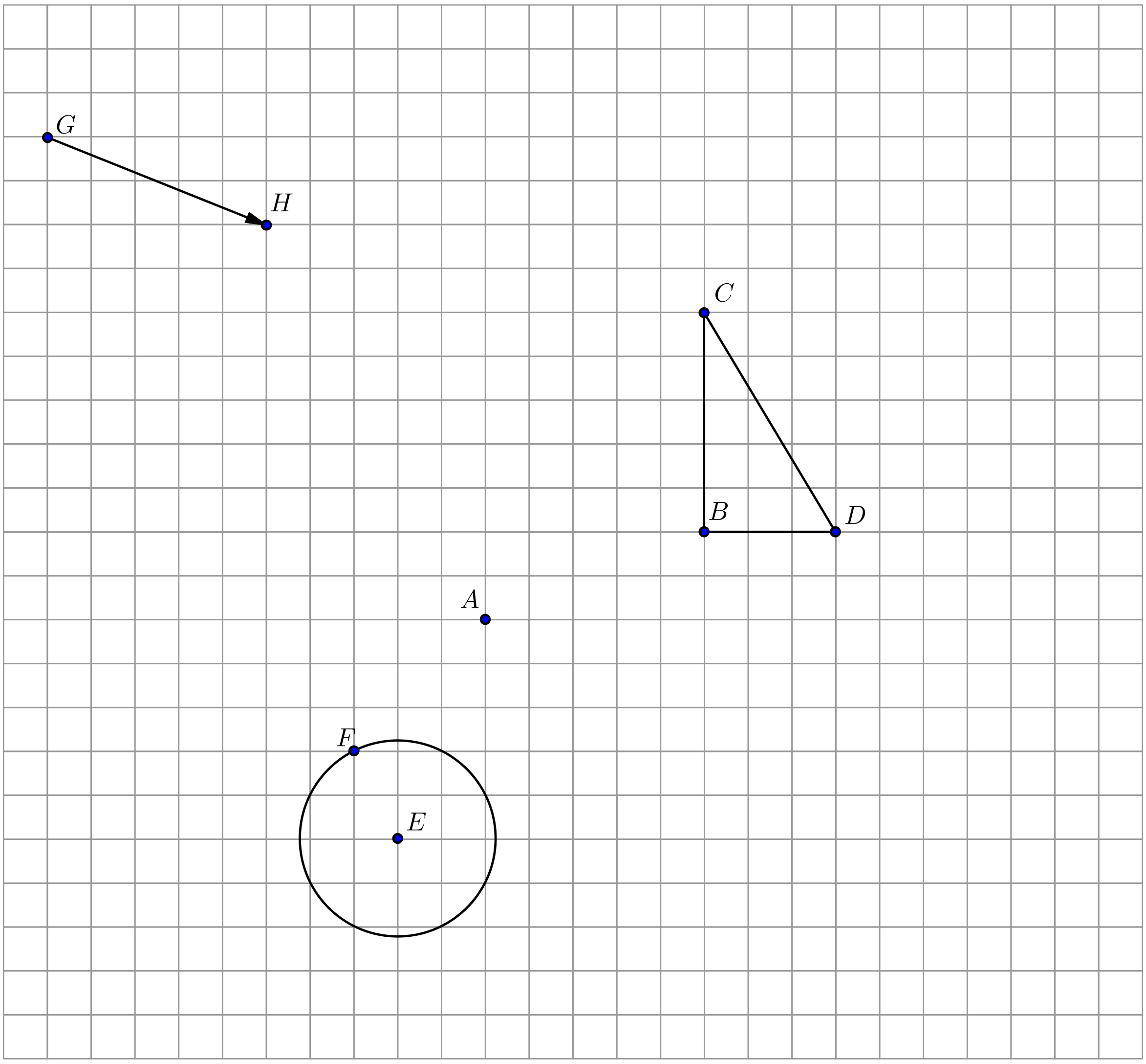


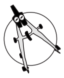
1. Apliqueu els moviments següents sobre el triangle $\triangle BCD$ i la circumferència (E, EF):

a) Un gir de centre A i angle $90°$.

b) Un gir de centre A i angle $180°$.

c) Una translació de vector $\overrightarrow{GH}$.

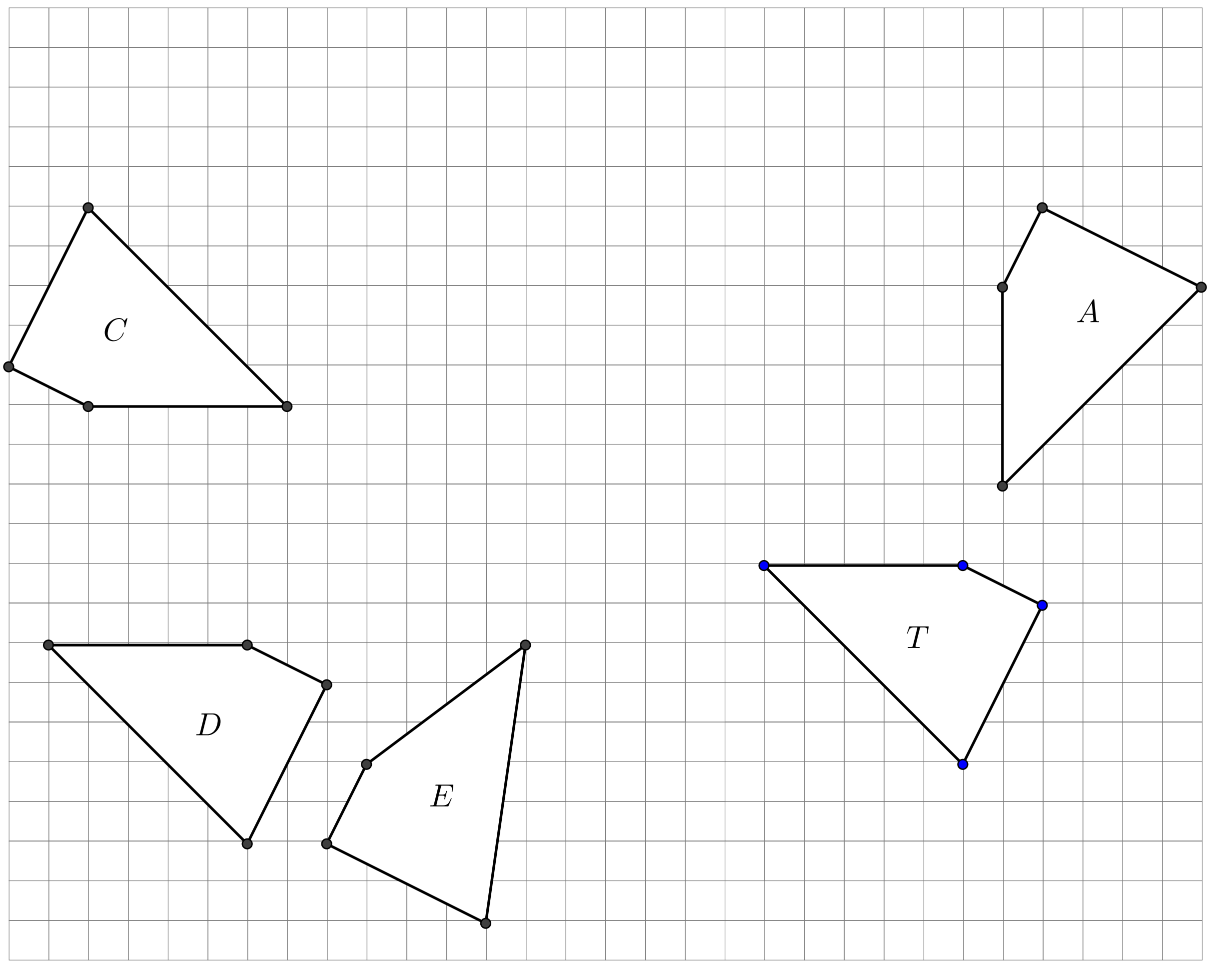


 **2.** Observeu els quadrilàters següents i cerqueu:

a) Els girs que transformen T en A i C.

b) La simetria axial que transforma T en E.

c) La translació que transforma T en D.



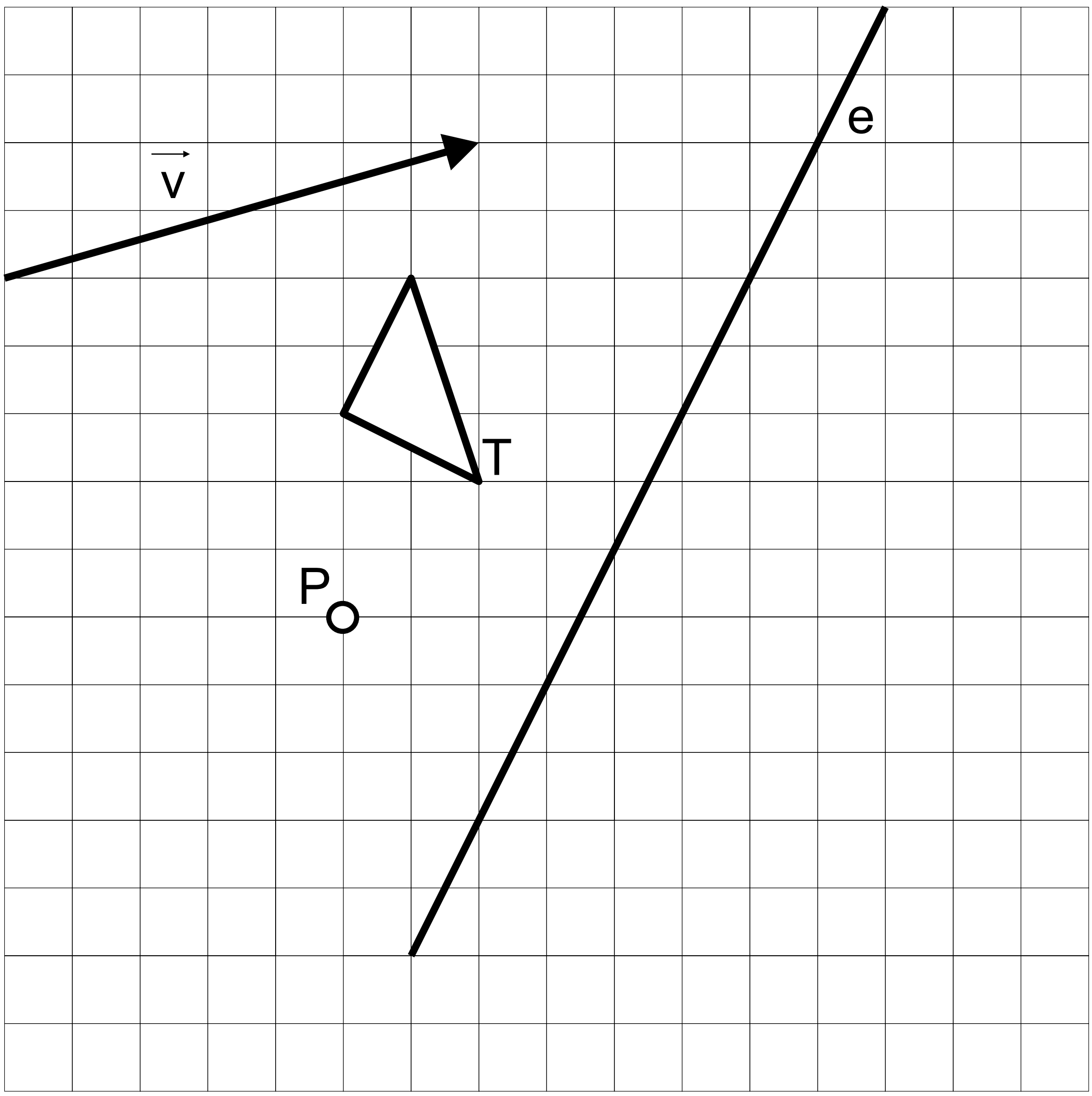
3. Dibuixeu els transformats del triangle **T** obtinguts a partir de:

a) Un gir de centre **P** i angle 90°.

b) Un gir de centre **P** i angle 180°.

c) Una simetria axial d'eix **e**.

d) Una translació de vector $\vec{\mathbf{v}}$.

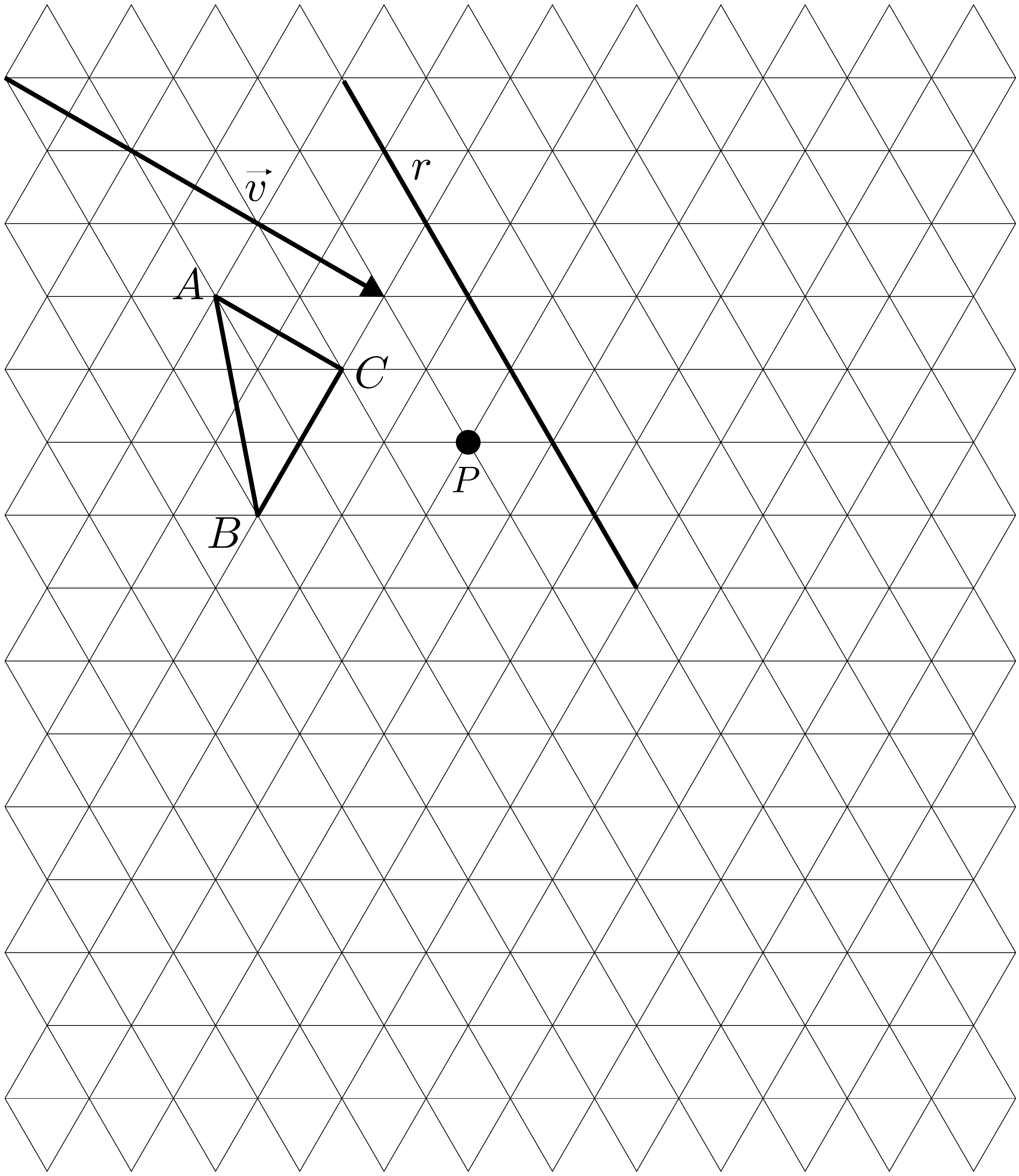


4. Dibuixeu els transformats del triangle $\angle ABC$ obtinguts a partir de:

a) Un gir de centre **P** i angle 60°.

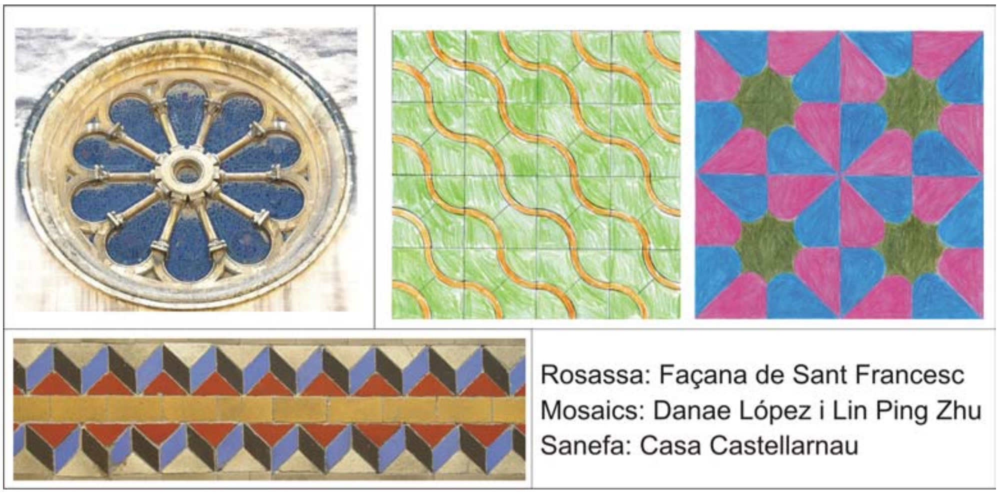
b) Una simetria axial d'eix r.

c) Una translació de vector $\vec{\mathbf{v}}$.



2 Mosaics periòdics

La repetició d'un patró o disseny seguint certes pautes és una solució estètica que s'ha utilitzat i se segueix utilitzant en les arts decoratives. Com podem veure a les dues imatges d'indrets prou coneguts de la ciutat de Tarragona i als dos dissenys d'alumnes d'ESO, les diferents pautes de repetició donen lloc a diversos tipus d'objectes geomètrics, així en el cas de girar el patró al voltant d'un punt obtenim una *rosassa*, si el traslladem en una direcció s'obté una *sanefa* i si es trasllada en dues direccions el resultat és un *mosaic periòdic*.

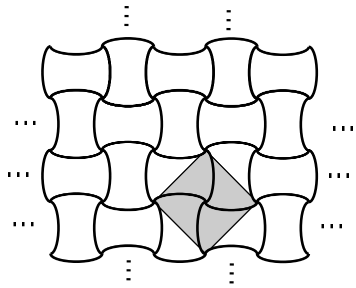


Rosassa: Façana de Sant Francesc
Mosaics: Danae López i Lin Ping Zhu
Sanefa: Casa Castellarnau

2.1 Concepte i classificació

En l'estudi d'aquests objectes geomètrics o figures és fonamental el concepte de *grup de simetria* que és el conjunt de moviments del pla que les deixen invariants. Això vol dir que no modifiquen la seva forma, la seva grandària i la seva orientació. Llavors, es pot definir un **mosaic periòdic** com una figura plana tal que les translacions del seu grup de simetria estan generades per dues translacions en direcció diferent.

Cal imaginar el mosaic prolongat de forma indefinida en totes les direccions del pla. Atès que podem omplir tot el pla amb la repetida aplicació de translacions en dues direccions, resulta que el coneixement del patró en una certa regió del mosaic en forma de paral·lelogram és suficient per construir tot el mosaic. Aquesta regió, —de color gris a la figura—, s'anomena *cel·la reticular* i traslladant el seu contingut en les direccions dels seus costats s'obté el mosaic.



Els mosaics periòdics es classifiquen a partir del seu grup de simetria donant lloc a 17 tipus que s'anomenen *grups cristal·logràfics plans*, aquest resultat el va aconseguir el cristal·lògraf rus E.S. Feodorov l'any 1891. Aquests tipus s'agrupen segons l'*ordre* del mosaic, el qual es defineix com el nombre de vegades que s'ha d'aplicar el gir d'angle mínim del seu grup de simetria per obtenir un gir de 360°. A la casa museu Castellarnau hi podem trobar 9 tipus de mosaics diferents. A la secció 3.1 proposarem activitats sobre un model de cadascun dels 9 tipus que es troben a les dependències de la casa.

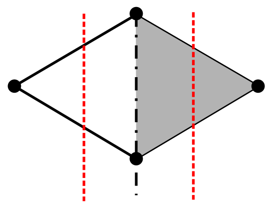
Abans d'això mostrem una cel·la reticular de cadascun dels 17 tipus generals. Hi presentem ressaltada un part de la cel·la anomenada *base* que és la regió mínima necessària per generar tot el mosaic amb els moviments del seu grup de simetria. El disseny de línies i colors que es fa a l'interior de la base rep el nom de *motiu mínim* del mosaic. A les cel·les trobem els símbols següents:

		Centres de gir
•	Vèrtex de cel·la	180°
	Base	120°, 240°
	Eix de lliscament	90°, 180°, 270°
	Eix de simetria	60°, 120°, 180°, 240°, 300°

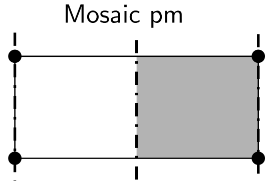
- Mosaics sense girs (ordre 1)

Mosaic p1

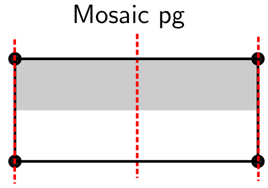
Mosaic cm



Mosaic pm

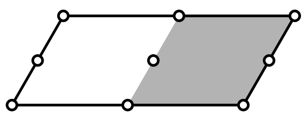


Mosaic pg

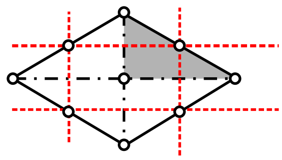


- Mosaics amb girs de 180° (ordre 2)

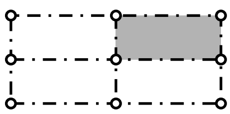
Mosaic p2



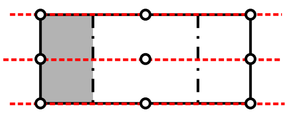
Mosaic cmm



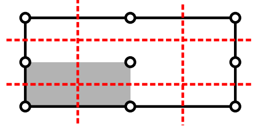
Mosaic pmm



Mosaic pmg

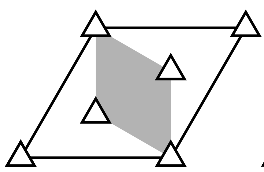


Mosaic pgg

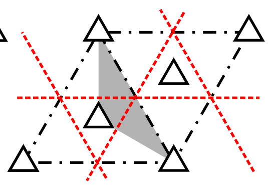


- Mosaics amb girs de 120° i 240° (ordre 3)

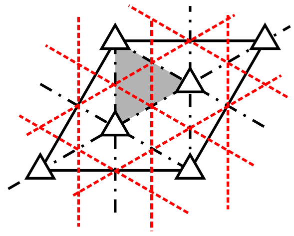
Mosaic p3



Mosaic p31m

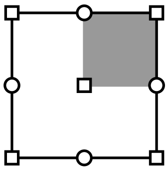


Mosaic p3m1

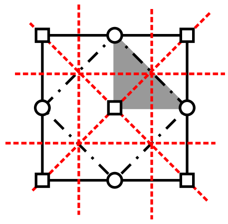


- Mosaics amb girs de 90°, 180° i de 270° (ordre 4)

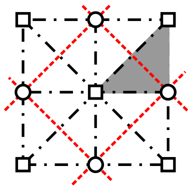
Mosaic p4



Mosaic p4g

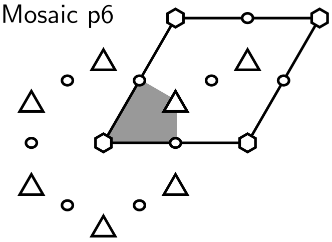


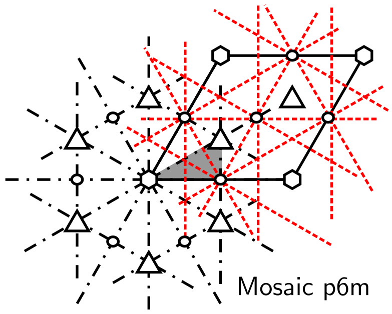
Mosaic p4m



- Mosaics amb girs de 60°, 120°, 180°, 240° i 300° (ordre 6)

Mosaic p6

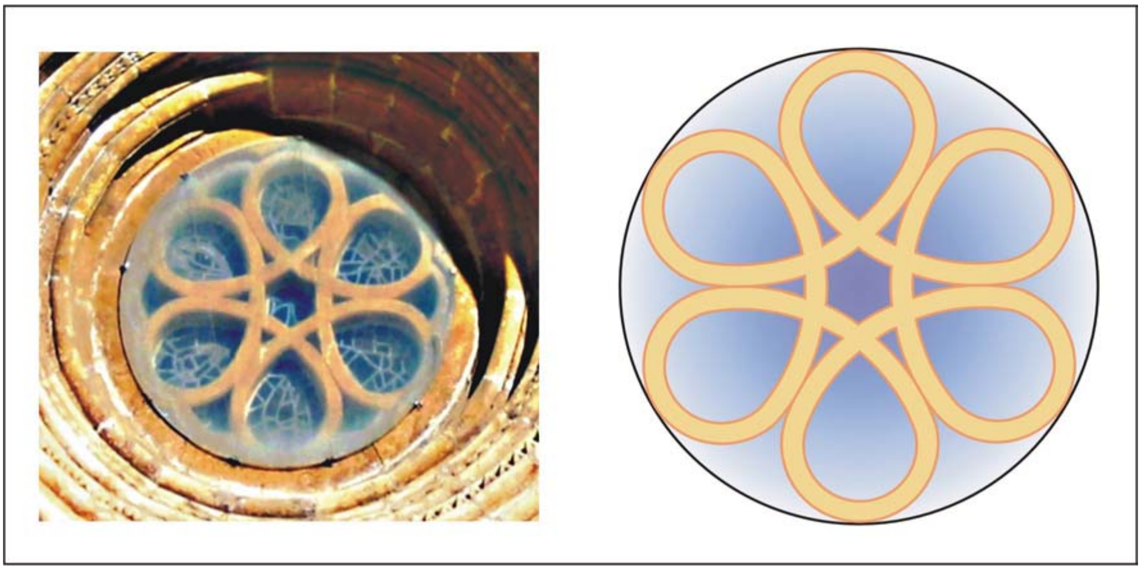




Mosaic p6m

2.2 Activitats sobre mosaics

4. Identifiqueu els moviments que no alteren l'aspecte d'aquesta rosassa de la catedral de Tarragona.



5. En el disseny de la pàgina 14 apliqueu:

a) Un gir de centre P i angle 180° sobre la línia poligonal ABC.

b) Un gir de centre C i angle 120° sobre la línia ABC i el resultat de l'apartat (a).

c) Un gir de centre C i angle 240° sobre la línia ABC i el resultat de l'apartat (a).

d) Translacions de vectors OM, ON i les seves composicions, sobre la configuració resultant.

6. En el disseny de la pàgina 15 apliqueu:

a) Una simetria axial d'eix LM sobre la línia poligonal PQR.

b) Un gir de centre P i angle 90° sobre la línia poligonal PQR i el resultat de l'apartat (a).

c) Un gir de centre P i angle 180° sobre la configuració que resulta de (b).

d) Translacions de vectors OA, OB i les seves composicions, sobre el resultat de (c).

7. En el disseny de la pàgina 16 obtindreu un disseny de l'Alhambra de Granada si apliqueu:

a) Un gir de centre P i angle 120° sobre la línia poligonal PQR i AB.

b) Un gir de centre P i angle 120° sobre el resultat de (a).

c) Una simetria axial d'eix MN sobre la configuració de l'interior del triangle OMN.

d) Translacions de vectors OM, ON i les seves composicions, sobre el resultat de (c).

8. Considereu el mosaic de la pàgina 17 del qual només representem una part finita.

a) Trobeu els girs, simetries axials i lliscaments que no alteren l'aspecte del mosaic.

b) Trobeu una regió quadrada mínima que en traslladar-la generi el mosaic.

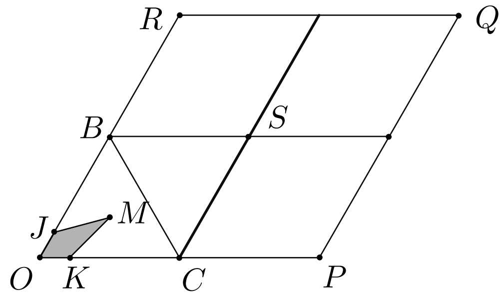
c) Trobeu el triangle rectangle mínim que en aplicar-li girs, simetries axials i translacions genera la regió quadrada anterior i, per tant, el mosaic.

9. Dades de la figura adjunta:

– $ORQP$ i $OBSC$ són rombes tals que $\angle COB = 60°$.

– M és el baricentre del triangle OBC.

– J i K compleixen $OJ = OK$ i $\angle JMK = 30°$.



a) En un full A4 apaïsat copieu el disseny anterior a escala 1:3 i genereu un mosaic mitjançant l'aplicació dels moviments següents:

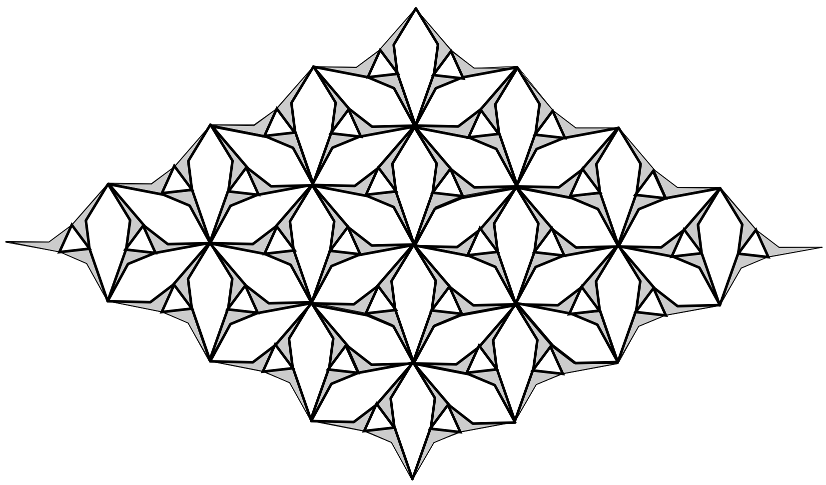
– Girs del quadrilàter $OJKM$, de 120° al voltant del punt M, fins que torni sobre si mateix.

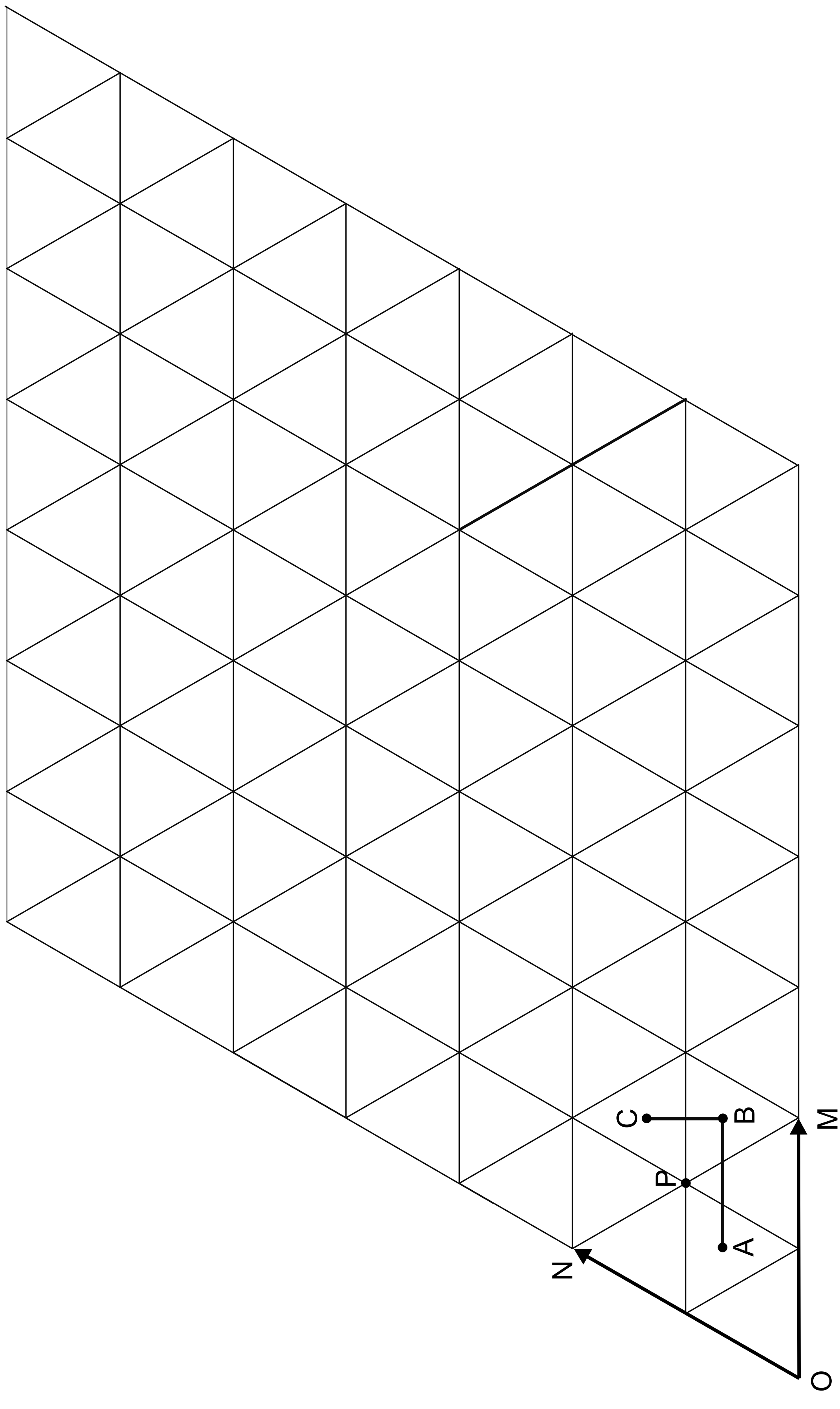
– Simetria de les figures resultants respecte la recta BC.

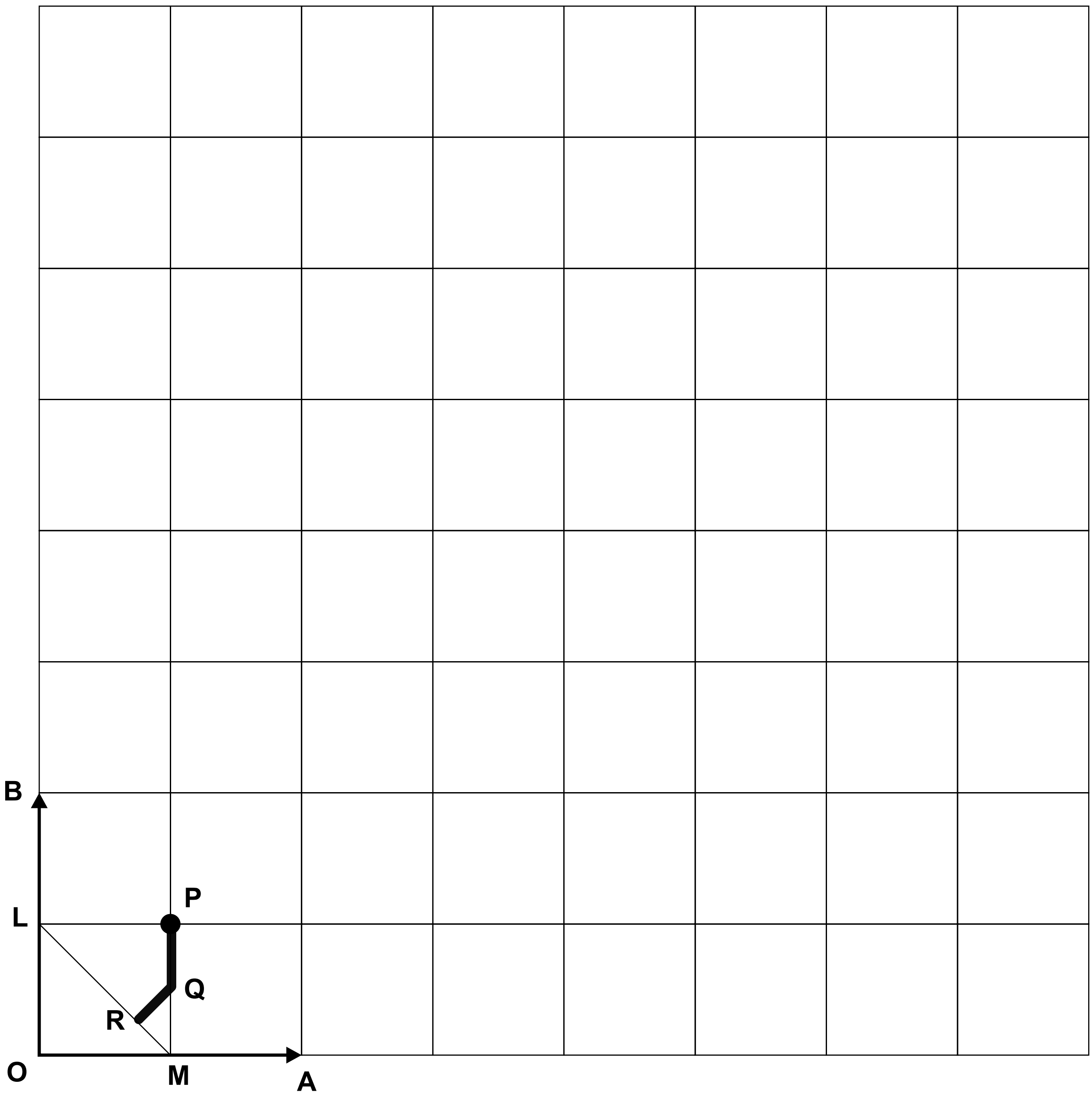
– Translacions de vectors $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OS}$ de la configuració resultant en el paral·lelogram $OCSB$.

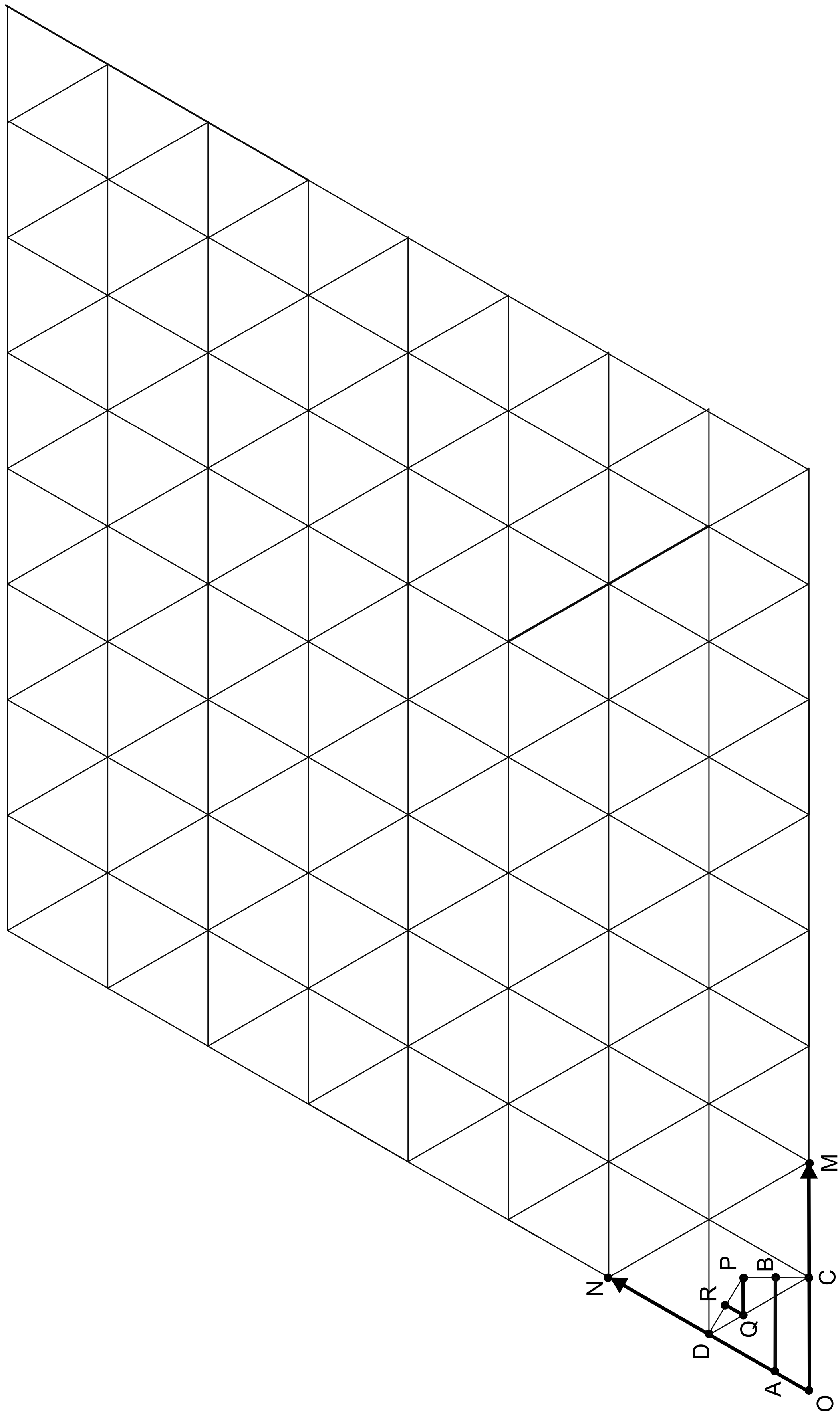
b) Si $OC = 1$, calculeu l'àrea de la figura generada pel quadrilàter $OJKM$.

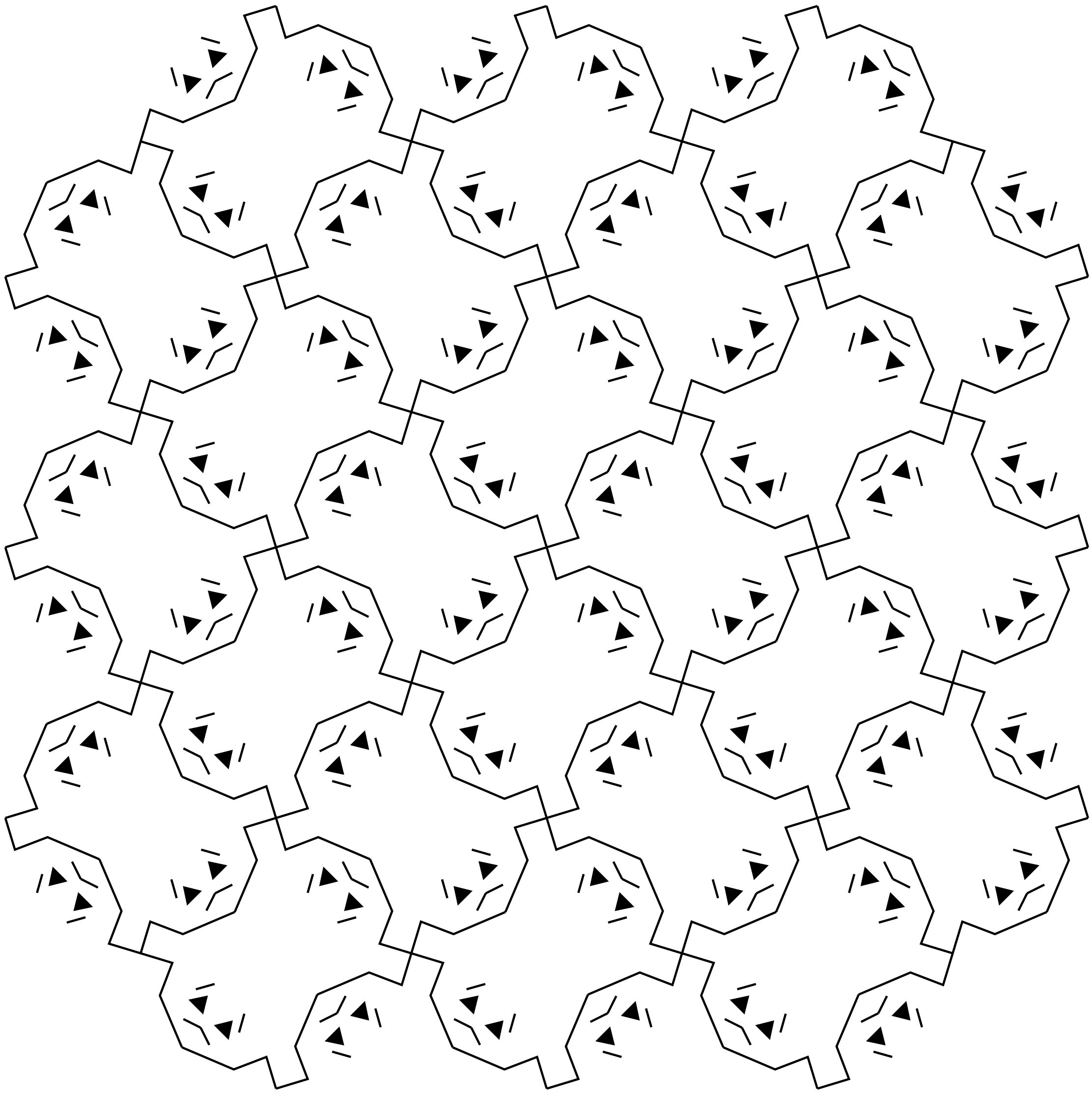
10. Trobeu un **motiu o disseny mínim** que permeti generar el mosaic adjunt, amb l'ajut de girs de 120°, simetries axials i translacions aplicats sobre aquest motiu. Feu-ne la comprovació mitjançant la construcció de part del mosaic amb el disseny mínim que heu trobat. Expliqueu ordenadament la successió de moviments que apliqueu.




C
B
M
P
A
N
O


B
P
L
Q
R
O
M
A


M
N
P
B
C
R
Q
D
A
O



3 Mosaics periòdics a la casa Castellarnau

A la casa Castellarnau hem localitzat 29 mosaics els quals pertanyen a 9 tipus d'entre els 17 possibles. Proposem dos grups d'activitats al seu voltant.

3.1 Activitats I

Presentem 9 mosaics de tipus diferents que es troben a diferents indrets de la casa. Es proposa:

a) Identificar-ne la situació en la Casa.

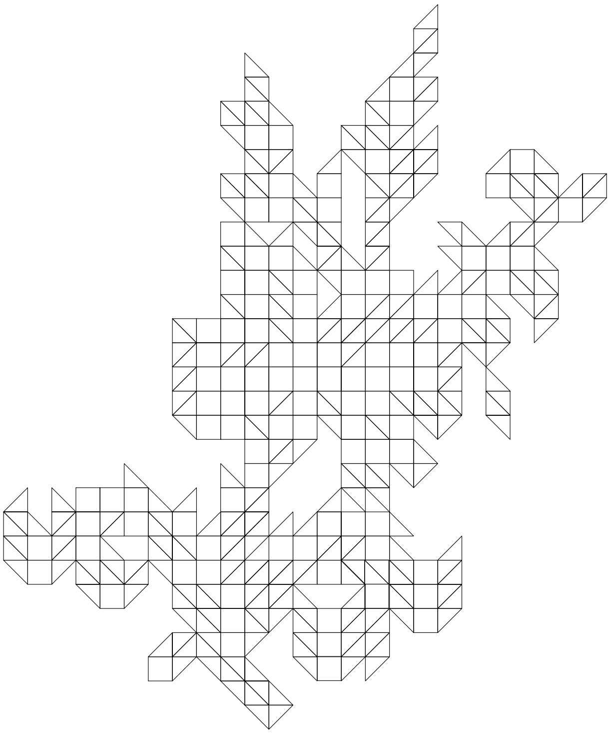
b) El seu acoloriment similar al de la casa o amb recreació lliure de colors.

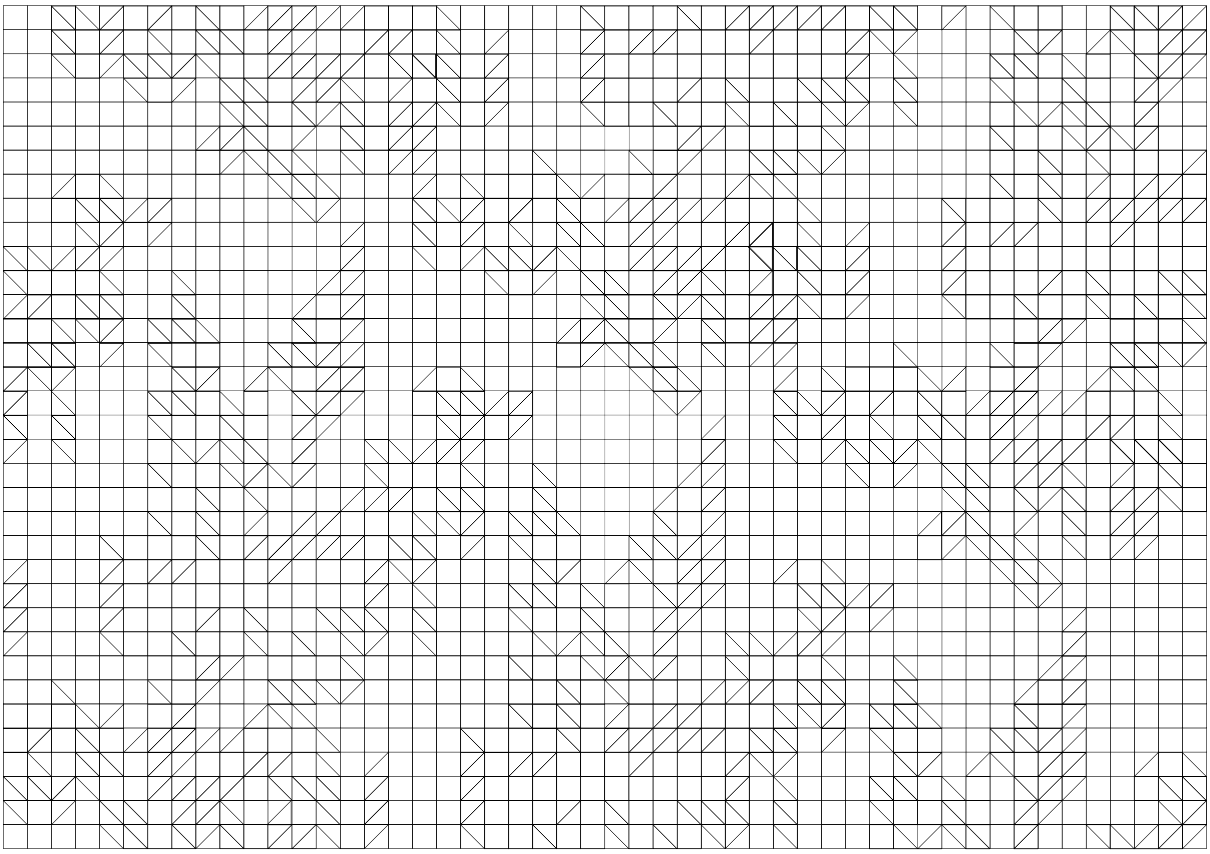
c) Cercar-ne els moviments que els deixen invariables.

d) Cercar-ne cel·les reticulars i bases.

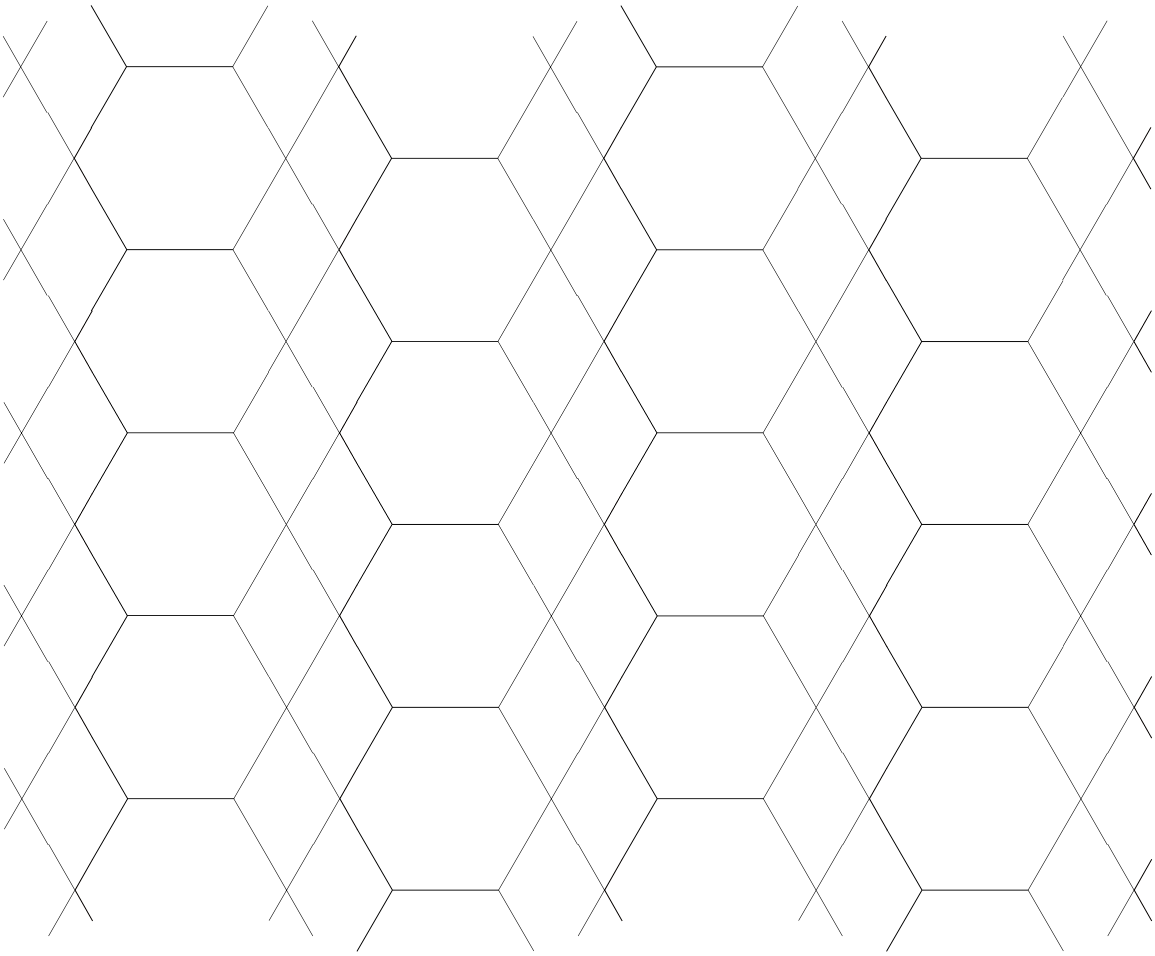
e) Classificar-los segons els tipus que es presenten a la secció 2.1.

11. **Mosaic 1**

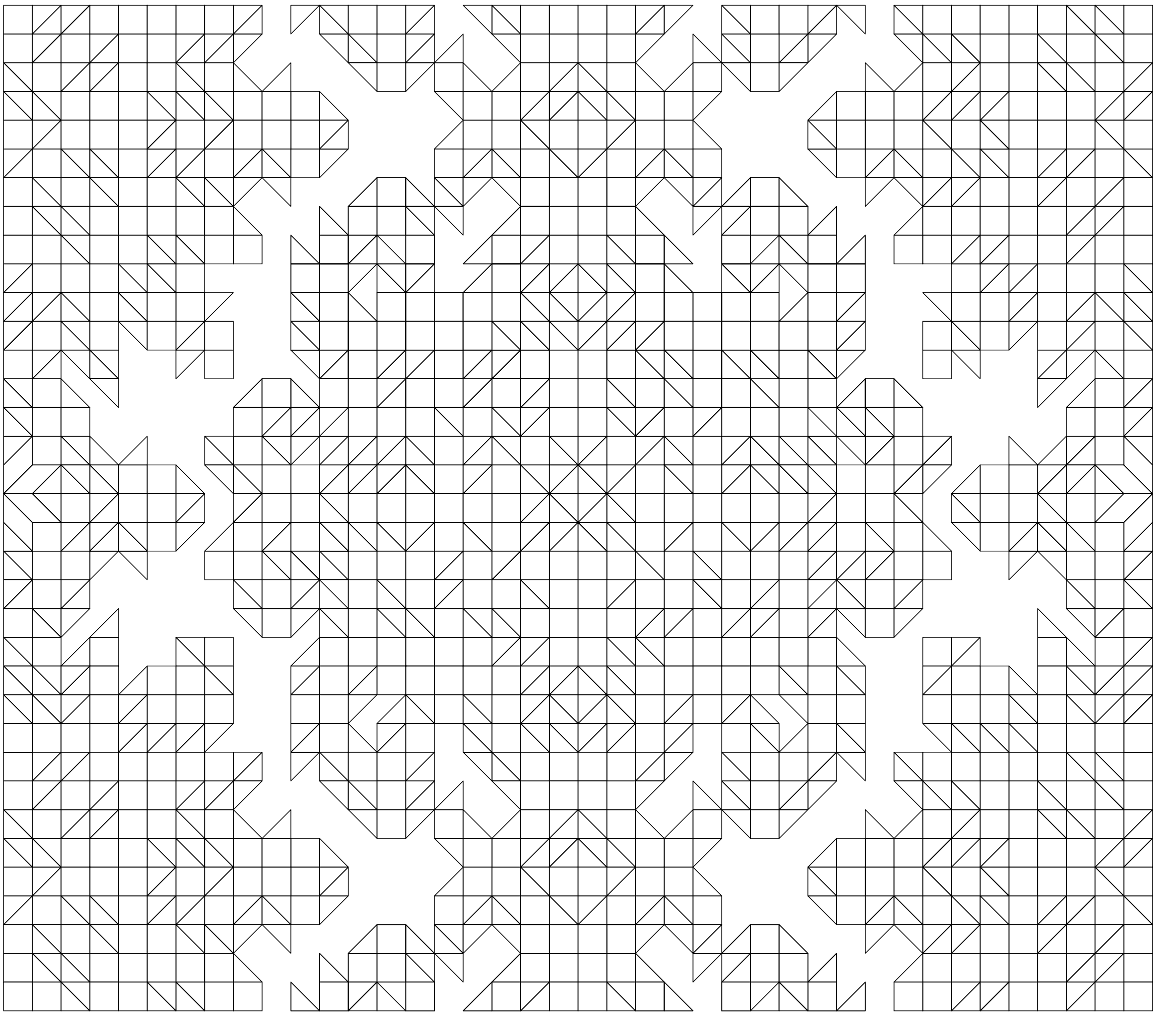




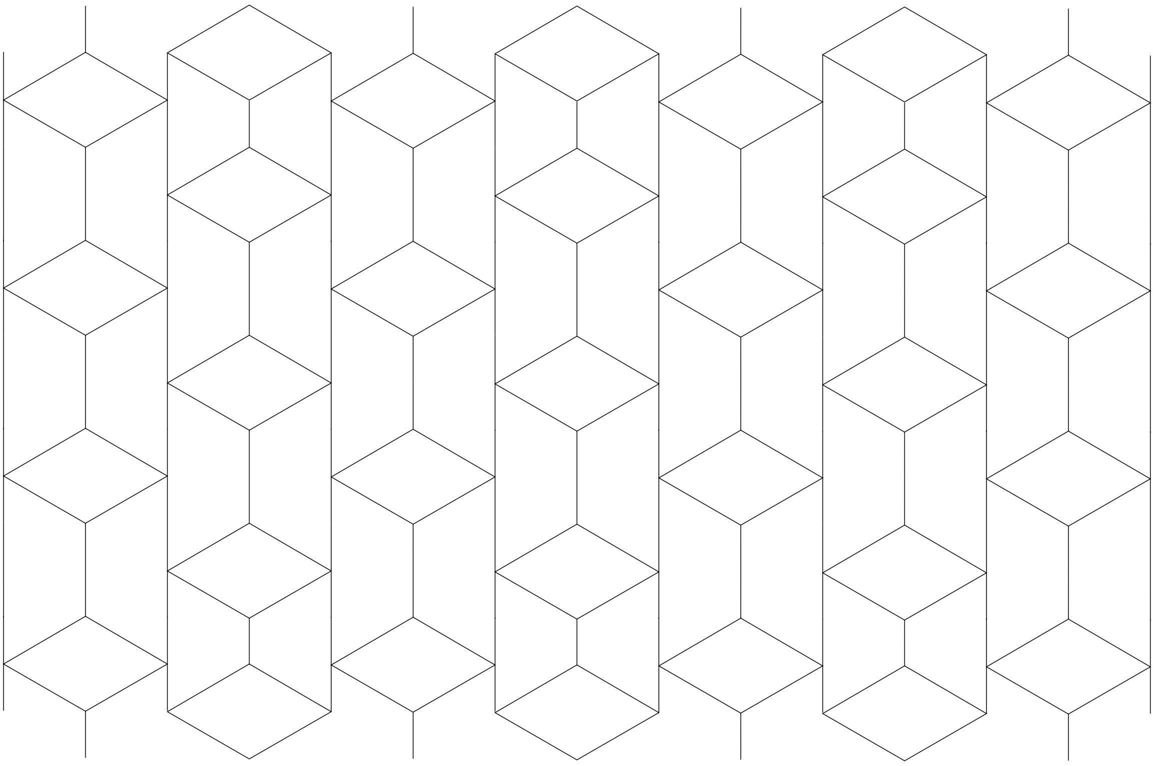
12. **Mosaic 2**



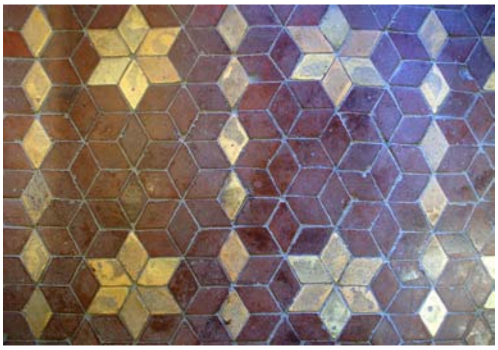
13. Mosaic 3

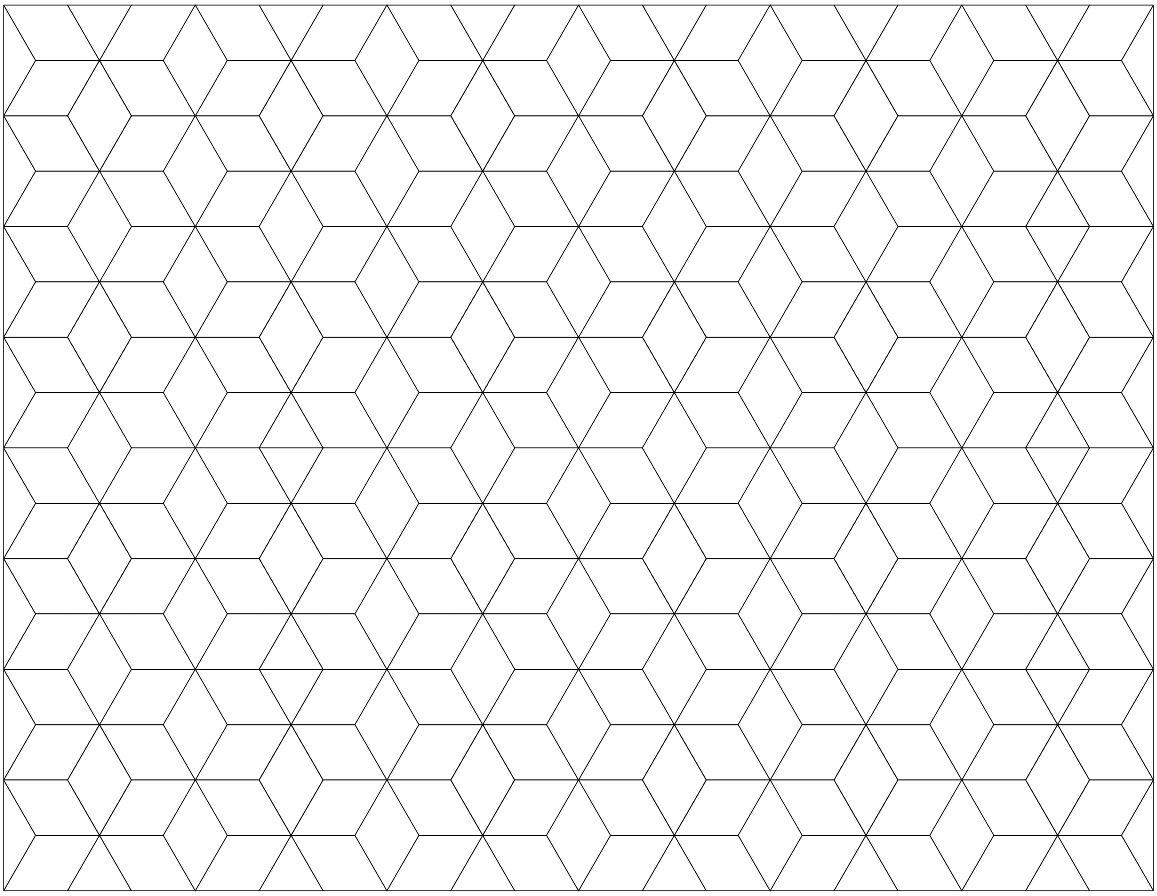


14. **Mosaic 4**

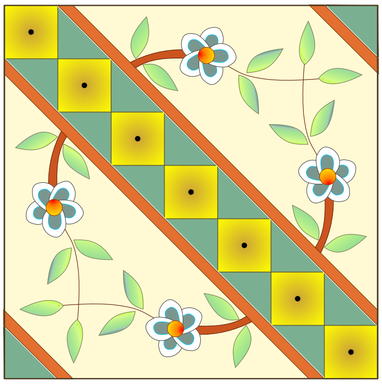


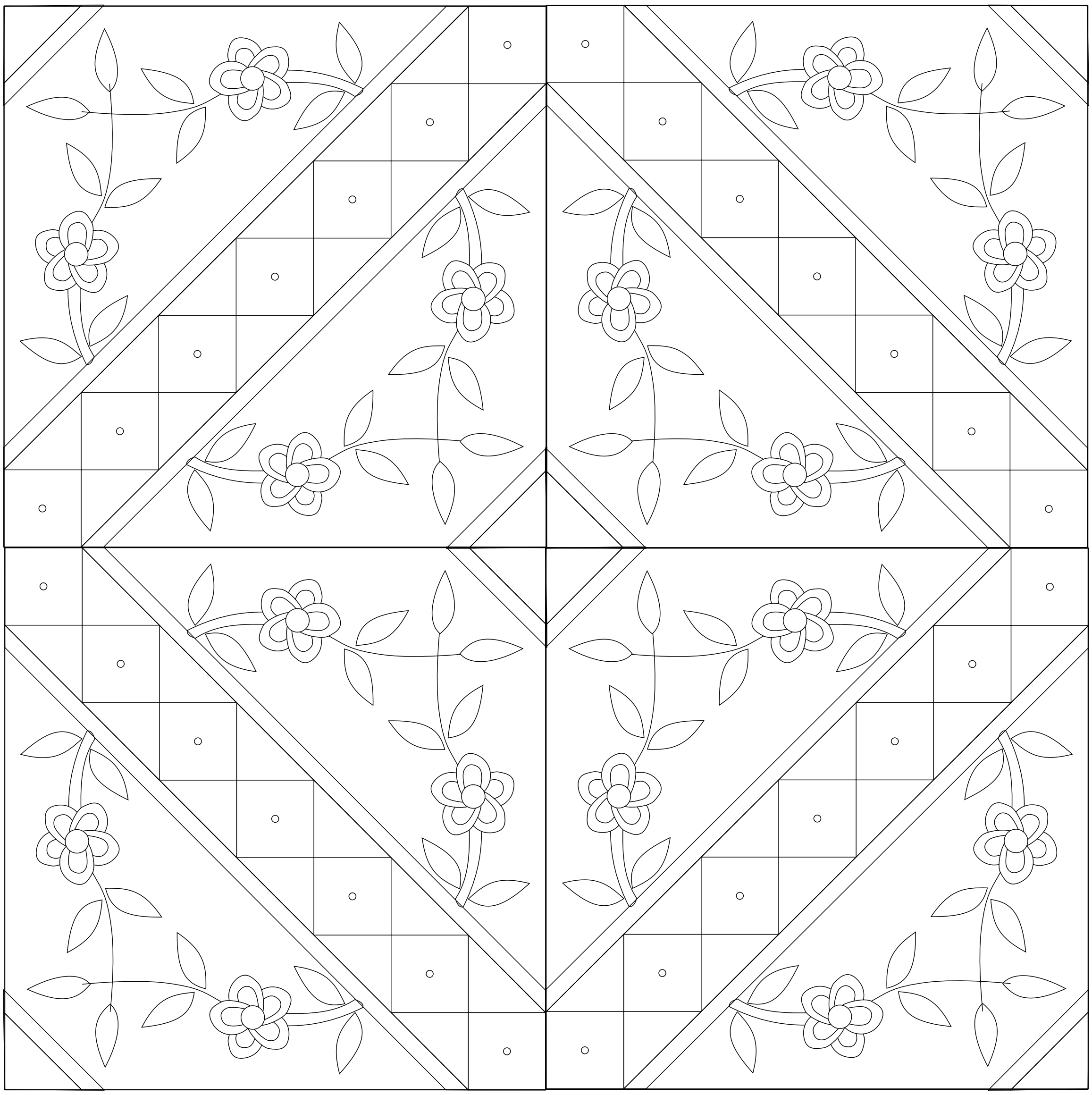
15. **Mosaic 5**



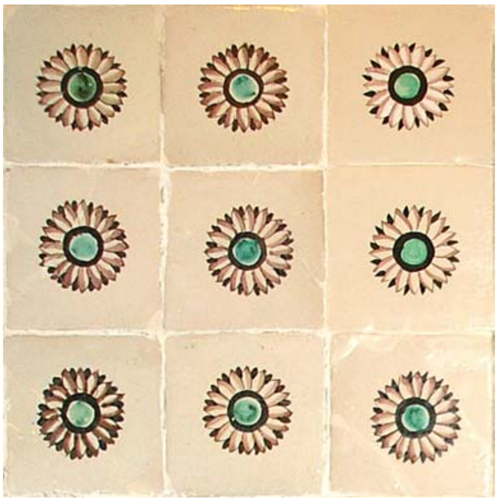


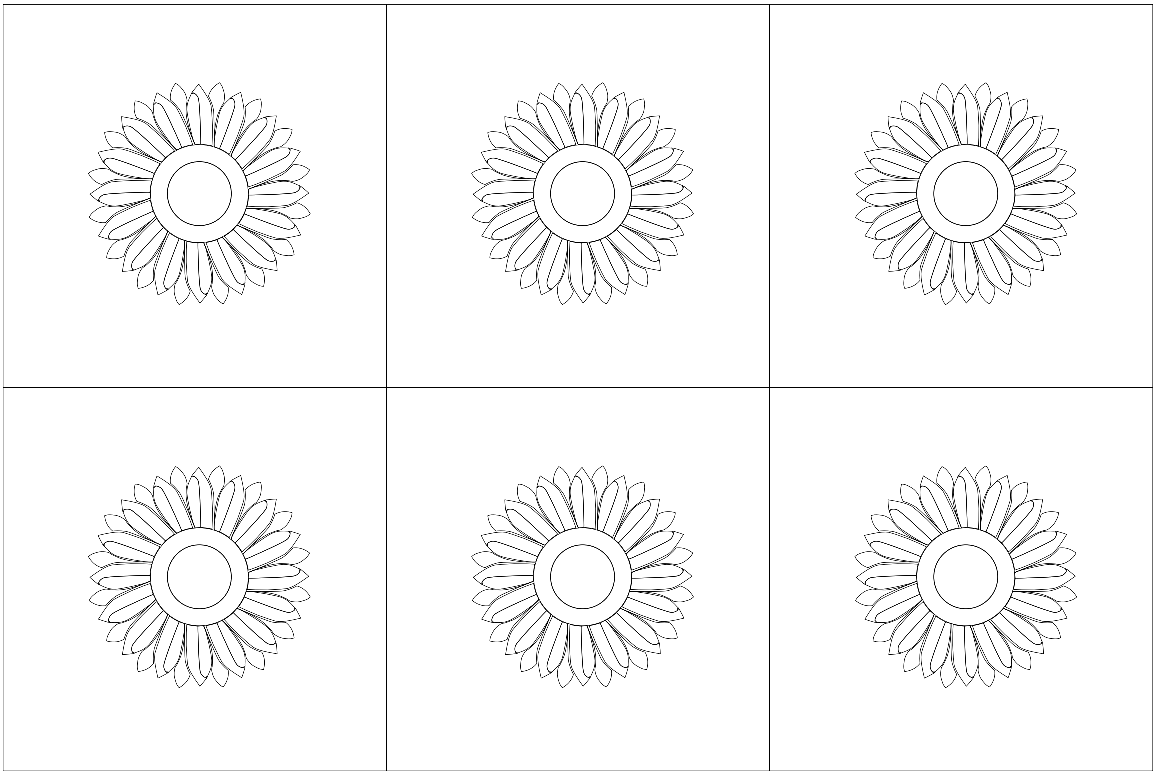
16. Mosaic 6



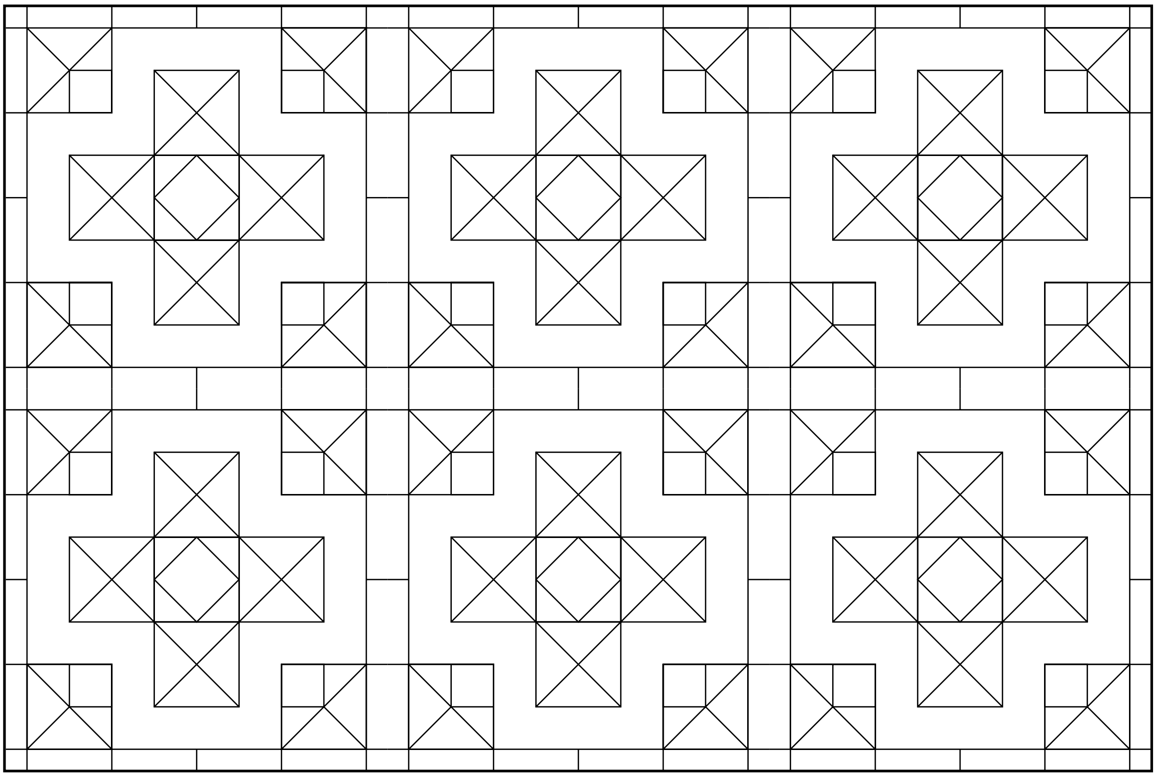


17. **Mosaic 7**

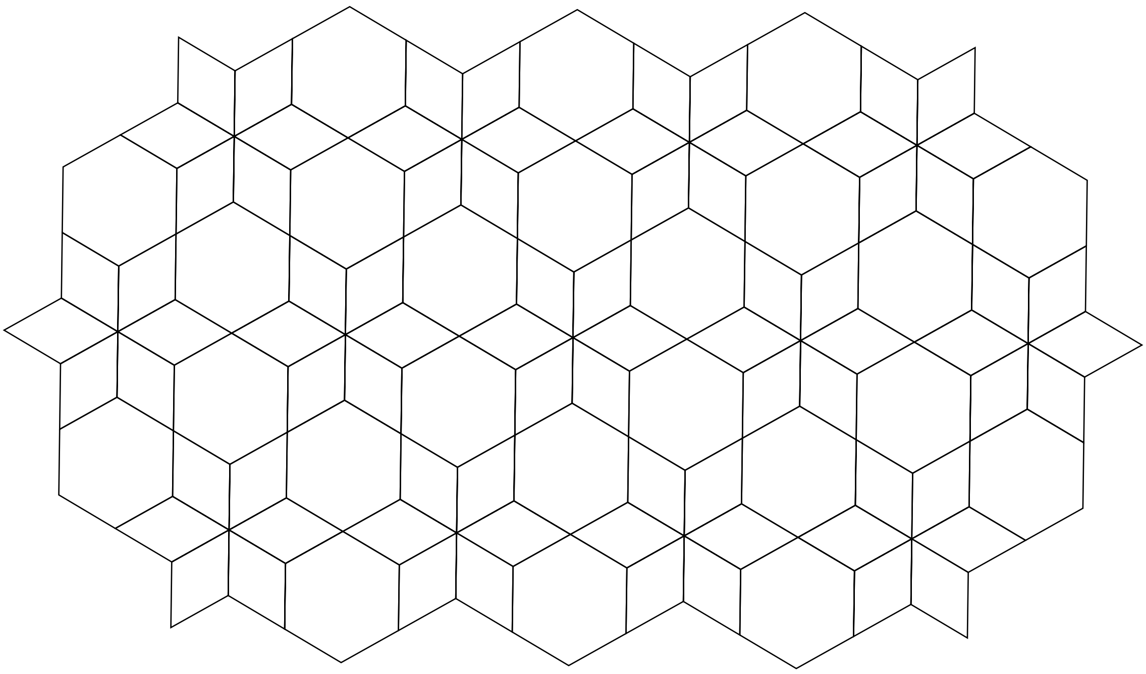




18. Mosaic 8



19. **Mosaic 9**



3.2 Activitats II

En aquest últim grup d'activitats, presentem la resta de mosaics que hem trobat a la casa. Es proposa que en cadascun dels 20 dissenys presentats esbrineu:

a) La seva situació en la Casa.

b) Els moviments que els deixen invariables.

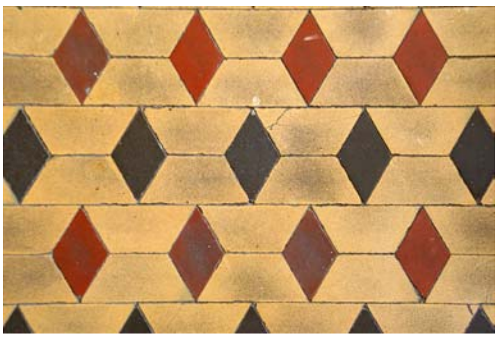
c) Les cel·les reticulars i bases.

d) El tipus al qual pertanyen.

20. Mosaic 10

21. Mosaic 11

22. Mosaic 12



23. Mosaic 13

24. Mosaic 14

25. Mosaic 15

26. Mosaic 16

27. Mosaic 17

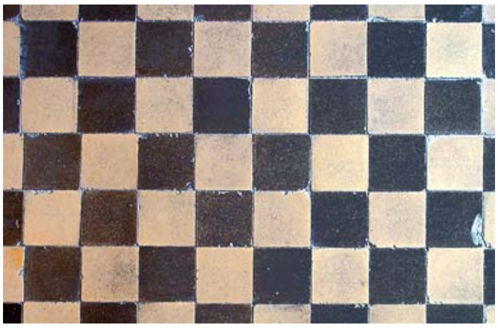
28. Mosaic 18

29. Mosaic 19

30. Mosaic 20

31. Mosaic 21

32. Mosaic 22



33. Mosaic 23

34. Mosaic 24

35. Mosaic 25

36. **Mosaic 26**

37. **Mosaic 27**

38. **Mosaic 28**

39. **Mosaic 29**

Índex