Una introducció a l'àlgebra de matrius des de la geometria

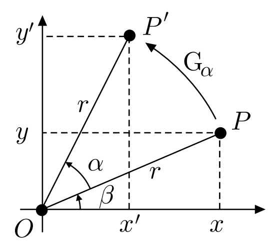
Ramon Nolla
Departament de Matemàtiques
IES Pons d'Icart

Farem una presentació de les equacions de girs i simetries en format matricial i veurem que les equacions de les composicions d'aquests moviments es poden presentar, amb estalvi de manipulacions algèbriques, operant adequadament aquestes matrius.

1 Equacions d'un gir

Donada una referència ortonormal considerem el gir G_α de centre $O(0,0)$ i angle α. Anomenem P' el punt transformat d'un punt P per aquest gir. Cercarem les equacions que relacionen les coordenades (x', y') de P' amb les coordenades (x, y) de P.

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\mathrm{G}_\alpha} & P' \\ (x,y) & \longmapsto & (x',y') \end{array}$$



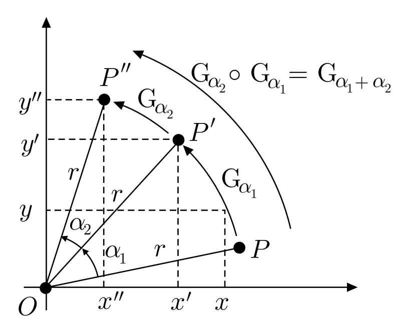
Si el punt P es troba a distància r de l'origen O de coordenades i l'angle d'OP amb la direcció positiva de l'eix d'abscisses és β, obtenim de l'observació del gràfic adjunt,

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{l} x = r\cos\beta \\ y = r\sin\beta \end{array}\right\} \\[2ex] \left.\begin{array}{l} x' = r\cos(\alpha+\beta) \\ y' = r\sin(\alpha+\beta) \end{array}\right\} \end{array}\right. \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} x' = r\cos\alpha\cos\beta - r\sin\alpha\sin\beta \\ y' = r\sin\alpha\cos\beta + r\cos\alpha\sin\beta \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{array}}$$

2 Equacions d'una composició de dos girs

Considerem dos girs G_{α_1} i G_{α_2} de centre $O(0,0)$ i angles α_1 i α_2. La seva composició $\mathrm{G}_{\alpha_2} \circ \mathrm{G}_{\alpha_1}$ actua sobre un punt P segons l'esquema

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\mathrm{G}_{\alpha_1}"] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{G}_{\alpha_2}\circ\mathrm{G}_{\alpha_1}"] & P' \arrow[r, "\mathrm{G}_{\alpha_2}"] & P'' \\ (x,y) \longmapsto & (x',y') \mapsto & (x'',y'') \end{tikzcd}$$



Del gràfic adjunt, en què resaltem $\mathrm{G}_{\alpha_2} \circ \mathrm{G}_{\alpha_1} = \mathrm{G}_{\alpha_1+\alpha_2}$, es desprèn que

$$\boxed{\begin{array}{l} x'' = x\cos(\alpha_1+\alpha_2) - y\sin(\alpha_1+\alpha_2) \\ y'' = x\sin(\alpha_1+\alpha_2) + y\cos(\alpha_1+\alpha_2) \end{array}}$$

De forma paral·lela si no recorrem a la visualització gràfica de la composició i actuem d'una manera exclusivament analítica tenim

$$\left.\begin{array}{l} x' = x\cos\alpha_1 - y\sin\alpha_1 \\ y' = x\sin\alpha_1 + y\cos\alpha_1 \end{array}\right\} \quad \text{i} \quad \left.\begin{array}{l} x'' = x'\cos\alpha_2 - y'\sin\alpha_2 \\ y'' = x'\sin\alpha_2 + y'\cos\alpha_2 \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x'' = x\cos\alpha_1\cos\alpha_2 - y\sin\alpha_1\cos\alpha_2 - x\sin\alpha_1\sin\alpha_2 - y\cos\alpha_1\sin\alpha_2 \\ y'' = x\cos\alpha_1\sin\alpha_2 - y\sin\alpha_1\sin\alpha_2 + x\sin\alpha_1\cos\alpha_2 + y\cos\alpha_1\cos\alpha_2 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x'' = x(\cos\alpha_1\cos\alpha_2 - \sin\alpha_1\sin\alpha_2) - y(\sin\alpha_1\cos\alpha_2 + y\cos\alpha_1\sin\alpha_2) \\ y'' = x(\cos\alpha_1\sin\alpha_2 + \sin\alpha_1\cos\alpha_2) + y(\cos\alpha_1\cos\alpha_2 - \sin\alpha_1\sin\alpha_2) \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} x' = x\cos(\alpha_1+\alpha_2) - y\sin(\alpha_1+\alpha_2) \\ y' = x\sin(\alpha_1+\alpha_2) + y\cos(\alpha_1+\alpha_2) \end{array}}$$

3 Canvi de llenguatge algèbric. Matrius

Observem que per trobar els coeficients que proporcionen les equacions de la composició, només s'han vist implicats els coeficients de cadascun dels girs de la composició (raons trigonomètriques dels angles α_1 i α_2).
Si disposem aquests coeficients i les coordenades dels punts implicats en l'equació resultant a la secció **??**, en les configuracions matricials següents

$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad P' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad \mathrm{G}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

i fem la presentació

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\quad \mathrm{G}_\alpha \quad} & P' \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{pmatrix}, \end{array}$$

notem que per passar de la matriu de P a la matriu de P' hem multiplicat ordenadament els coeficients F_{ij} de cada fila F_i de la matriu del gir G_α pels coeficients C_j de la columna C de coeficients del punt P i hem sumat els resultats per a cada fila.[1] És a dir,

$$\begin{array}{ccccccc} & & & C & & & \\ & & & \downarrow & & & \\ \begin{array}{l} F_1 \to \\ F_2 \to \end{array} & \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} F_{11}\cdot C_1 + F_{12}\cdot C_2 \\ F_{21}\cdot C_1 + F_{22}\cdot C_2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow F_1\cdot C \\ \leftarrow F_2\cdot C \end{array} \end{array}$$

[1] Recordem que és el mateix que fèiem per calcular el producte escalar de dos vectors a $\mathbb{R}^2$.

Observem que succeeix si multiplicarem les matrius de dos girs G_{α_1} i G_{α_2}, estenent aquesta regla. És a dir, si fem

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} C_1 & C_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \end{array} \\ \begin{array}{c} F_1 \rightarrow \\ F_2 \rightarrow \end{array} & \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} F_1 \cdot C_1 & F_1 \cdot C_2 \\ F_2 \cdot C_1 & F_2 \cdot C_2 \end{pmatrix}.$$

Veurem que el resultat és la matriu del gir $\mathrm{G}_{\alpha_1+\alpha_2}$. Efectivament,

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2 \\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} \cos\alpha_2\cos\alpha_1 - \sin\alpha_2\sin\alpha_1 & -\cos\alpha_2\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2\cos\alpha_1 \\ \sin\alpha_2\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2\sin\alpha_1 & -\sin\alpha_2\sin\alpha_1 + \cos\alpha_2\cos\alpha_1 \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} \cos(\alpha_1+\alpha_2) & -\sin(\alpha_1+\alpha_2) \\ \sin(\alpha_1+\alpha_2) & \cos(\alpha_1+\alpha_2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Que aquesta operació, la qual rep el nom de *producte de matrius*, funcioni en la seva aplicació dóna peu a tractar les matrius com objectes d'un conjunt que es poden operar d'aquesta i d'altres maneres com veurem més endavant. Aquestes operacions tindran unes propietats similars però no sempre igual a les operacions amb nombres.

Exercici: Considereu les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Comproveu que $A \cdot B = B \cdot A$ i $A \cdot C \neq C \cdot A$. Això significa que el producte, en general, no és commutatiu.

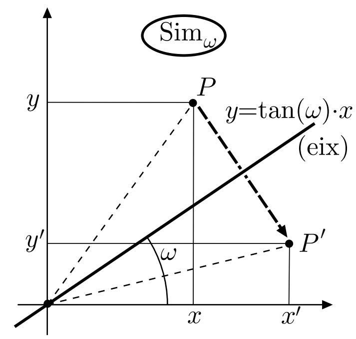
4 Aplicació a la composició d'un gir i una simetria

Abans d'entrar a l'estudi abstracte de les operacions amb matrius insistirem amb les aplicacions. Treballarem per trobar la matriu de la composició d'un gir i una simetria axial tal que el seu eix contingui el centre de gir. Veurem que aquesta matriu permetrà la identificació del moviment resultant de la composició.

4.1 Matriu d'una simetria axial

Considerarem un sistema de coordenades ortonormal que tingui l'origen sobre un punt O de l'eix r de simetria i que r no coincideix amb l'eix d'ordenades. Considerem

$r:\ y = mx$	Eix de simetria, en què $m = \tan\omega$ i ω és l'angle de r amb OX^{+}.
$P = (x, y)$	Punt del pla.
$P' = \mathrm{Sim}_{\,\omega}(P) = (x', y')$	Punt transformat del punt P per la simetria $\mathrm{Sim}_{\,\omega}$ d'eix r.
$M = \left(\dfrac{x + x'}{2}, \dfrac{y + y'}{2}\right)$	Punt mitjà de P i P'.



Llavors,

- En ser el segment PP' perpendicular a l'eix r, tenim

$$(x' - x, y' - y)\,(1, m) = 0 \Longleftrightarrow x' - x + m(y' - y) = 0 \Longleftrightarrow \boxed{x' + my' = x + my}\,. \qquad (1)$$

- En ser el punt mitjà M, de P i P', pertanyent a l'eix r de simetria, tenim

$$\frac{y + y'}{2} = m\,\frac{x + x'}{2} \Longleftrightarrow \boxed{mx' - y' = y - mx}\,. \qquad (2)$$

Consegüentment, si es resol el sistema en (x', y') obtingut, s'obté

$$(\mathbf{??}) \text{ i } (\mathbf{??}) \iff \left\{ \begin{array}{rl} (\mathbf{??}): & x' + my' = x + my \\ m\cdot(\mathbf{??}) - (\mathbf{??}): & (m^2+1)y' = 2mx + (m^2-1)y \end{array} \right.$$

$$\iff \begin{array}{l} y' = \dfrac{2m}{m^2+1}\,x + \dfrac{m^2-1}{m^2+1}\,y \\ x' = x + my - \dfrac{2m^2}{m^2+1}\,x - \dfrac{m^3-m}{m^2+1}\,y = \dfrac{1-m^2}{m^2+1}\,x + \dfrac{2m}{m^2+1}\,y \end{array}$$

Si ho presentem en forma matricial, s'obté la matriu de la simetria axial en funció de m,

$$\begin{pmatrix} x' \\ \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1-m^2}{m^2+1} & \dfrac{2m}{m^2+1} \\ \dfrac{2m}{m^2+1} & \dfrac{m^2-1}{m^2+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \\ y \end{pmatrix}.$$

Si utilitzem el fet que $m = \tan\omega$, obtenim una presentació més simplificada. Efectivament, és fàcil comprovar, —ho deixem com un exercici—, que

$$\frac{1-m^2}{m^2+1} = \cos(2\omega) \quad \text{i} \quad \frac{2m}{m^2+1} = \sin(2\omega)\,.$$

Llavors, la presentació de la simetria $P' = \mathrm{Sim}_{\,\omega}(P)$ és

$$\boxed{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\omega) & \sin(2\omega) \\ \sin(2\omega) & -\cos(2\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}\,.$$

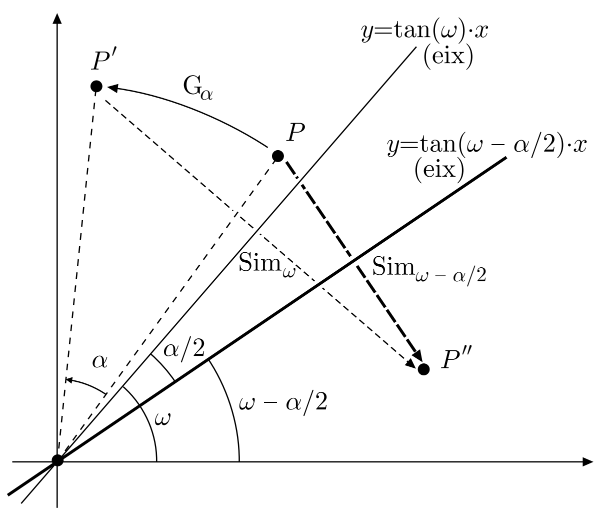
4.2 Composició de gir i simetria

En el cas de la composició de dos girs de mateix centre, hem conclòs que el producte de les dues matrius ens donava el gir resultant. Partint de la base que la composició d'un gir amb una simetria axial que contingui el centre de gir també es pot representar amb el producte de les matrius associades, esbrinarem quin moviment en resulta. Trobarem que el resultat és la simetria axial $\mathrm{Sim}_{\omega-\frac{\alpha}{2}}$ que conté el centre de gir. En un llenguatge més simbòlic volem estudiar

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\mathrm{G}_\alpha"] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{Sim}_\omega \circ \mathrm{G}_\alpha"] & P' \arrow[r, "\mathrm{Sim}_\omega"] & P'' \end{tikzcd}$$

Multipliquem directament les matrius dels dos moviments i obtenim

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sim}_\omega \circ \mathrm{G}_\alpha &= \begin{pmatrix} \cos(2\omega) & \sin(2\omega) \\ \sin(2\omega) & -\cos(2\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(2\omega)\cos\alpha + \sin(2\omega)\sin\alpha & \cos(2\omega)(-\sin\alpha) + \sin(2\omega)\cos\alpha \\ \sin(2\omega)\cos\alpha - \cos(2\omega)\sin\alpha & -\sin(2\omega)\sin\alpha - \cos(2\omega)\cos\alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(2\omega-\alpha) & \sin(2\omega-\alpha) \\ \sin(2\omega-\alpha) & -\cos(2\omega-\alpha) \end{pmatrix} = \mathrm{Sim}_{\frac{2\omega-\alpha}{2}} = \mathrm{Sim}_{\omega-\frac{\alpha}{2}}
\end{aligned}$$



Conclusió

$$\boxed{\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\mathrm{G}_\alpha"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{Sim}_{\omega-\frac{\alpha}{2}}"'] & P' \arrow[r, "\mathrm{Sim}_\omega"] & P'' \end{tikzcd}}$$