El nombre complex

RAMON NOLLA
Departament de Matemàtiques
IES Pons d'Icart

1 Divisió entera de polinomis i la seva factorització

Recordem que anomenàvem *polinomis de coeficients reals amb la indeterminada* x a les expressions del tipus:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0, \text{ en què } a_k \in \mathbb{R} \text{ i } n \in \mathbb{N}.$$

No concretàvem ni aprofondíem en el significat de la lletra o *indeterminada* x. En el nostre cas ens conformàvem a entendre-la com una variable numèrica sense determinar.

Anomenàvem el valor de n, *grau* del polinomi. Els nombres a_k rebien el nom de coeficients del polinomi, i l'expressió a_kx^k s'anomenava *terme de grau* k. Aquests objectes es podien sumar, sumant els coeficients dels termes de mateix grau. També es podien multiplicar considerant tots els productes possibles entre termes de la manera següent:

$$\left(\sum_{k=0}^{p} a_kx^k\right) \cdot \left(\sum_{r=0}^{q} a_rx^r\right) = \sum_{s=0}^{p+q} \left(\sum_{k+r=s} a_kb_r\right) x^s.$$

1.1 Divisió entera de polinomis

Donats els polinomis $p(x)$ i $d(x)$ es pot demostrar que existeixen dos polinomis $q(x)$ i $r(x)$ tals que:

$$\begin{array}{ll} 1) & p(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x) \\ 2) & 0 \leq \text{grau}(r(x)) < \text{grau}(d(x)) \end{array}$$

L'operació d'obtenir els dos polinomis $q(x)$ i $r(x)$ a partir dels polinomis inicials s'anomena *divisió entera* dels polinomis $p(x)$ i $d(x)$. Els polinomis $q(x)$ i $r(x)$ reben, respectivament, els noms de *quocient* i *residu* de la divisió.

Exemple 1 *Divisió entera de* $p(x) = x^4 - 8x^2 + x + 7$ *entre* $d(x) = x^2 - 2x$.

- Càlcul mitjançant la definició:

  Observem que el grau del quocient ha de ser $4 - 2 = 2$ i el del residu ha de ser menor que 2. A més, en el quocient el coeficient de grau 2 ha de ser $\frac{1}{1} = 1$. Llavors,

$$x^4 - 8x^2 + x + 7 = (x^2 - 2x)(x^2 + bx + c) + (mx + s) = x^4 + (b-2)x^3 + (c-2b)x^2 + (m-2c)x + s.$$

Per tant, si igualem els coeficients dels termes de mateix grau, obtenim

$$\left.\begin{array}{l} b - 2 = 0 \\ c - 2b = -8 \\ m - 2c = 1 \\ s = 7 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} b = 2 \\ c = -8 + 2b = -4 \\ m = 1 + 2c = -7 \\ s = 7 \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} q(x) = x^2 + 2x - 4 \\ r(x) = -7x + 7 \end{array}}.$$

- Càlcul mitjançant l'algoritme clàssic:

$$
\begin{array}{rrrrrrr|l}
x^4 & & & -8x^2 & +x & +7 & & x^2-2x \\
\cline{8-8}
-x^4 & +2x^3 & & & & & & x^2+2x-4 \\
\cline{1-4}
 & 2x^3 & & -8x^2 & & & & \\
 & -2x^3 & & +4x^2 & & & & \\
\cline{2-5}
 & & & -4x^2 & +x & & & \\
 & & & 4x^2 & -8x & & & \\
\cline{3-6}
 & & & & -7x & +7 & &
\end{array}
$$

1.2 Regla de Ruffini

Observant l'algoritme clàssic de divisió havíem notat que allò que importava quan dividíem eren les diferents operacions a les quals sotmetíem els coeficients. En el cas particular en què el divisor era del tipus $x-a$ podíem aconseguir simplificar la manera de portar els càlculs per efectuar la divisió. Recordem la marxa amb un exemple:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & +x^2 & -15x & -18 & x-3 \\
\cline{5-5}
-2x^3 & +6x^2 & & & 2x^2+7x+6 \\
\cline{1-3}
 & 7x^2 & -15x & & \\
 & -7x^2 & +21x & & \\
\cline{2-4}
 & & 6x & -18 & \\
 & & -6x & +18 & \\
\cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}
\iff
\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & 1 & -15 & -18 \\
3 & & 6 & 21 & 18 \\
\hline
 & 2 & 7 & 6 & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & 1 & -15 & -18 \\
 & & \downarrow + & \downarrow + & \downarrow + \\
3 & & 6 & 21 & 18 \\
\hline
 & 2 & 7 & 6 & 0
\end{array}
$$

En l'exemple següent podeu esbrinar l'aplicació del mètode de Ruffini (1765–1822) per a un divisor de grau> 1.

Exemple 2 *Divisió de* $p(x) = x^7 - x^2 + 8$ *entre* $d(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$

$$
\begin{array}{r|rrrrrrrr}
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 8 \\
 & & & & & & & & \\
-2 & & -2 & 4 & -14 & 42 & -130 & & \\
3 & & & 3 & -6 & 21 & -63 & 195 & \\
-1 & & & & -1 & 2 & -7 & 21 & -65 \\
\hline\hline
 & \boxed{1} & \boxed{-2} & \boxed{7} & \boxed{-21} & \boxed{65} & \boxed{-201} & \boxed{216} & \boxed{-57}
\end{array}
$$

Així tenim: $\left\{ \begin{array}{rl} \text{Quocient:} & x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 21x + 65 \\ \text{Residu:} & -201x^2 + 216x - 57 \end{array} \right.$

1.3 Teorema del residu

Aquest teorema és de gran importància quan volem factoritzar un polinomi. Permet trobar el residu r de la divisió del polinomi $p(x)$ entre el polinomi $x-a$, sense fer la divisió i tenint en compte que $p(a) = r$. En el cas particular en què $a \in \mathbb{R}$ és una arrel del polinomi $p(x)$, llavors el residu és $r = p(a) = 0$ i aconseguim una primera descomposició en factors del polinomi. Una justificació d'aquestes afirmacions podria ser:

$$p(x) = q(x) \cdot (x - a) + r \Longrightarrow p(a) = q(a) \cdot 0 + r \Longrightarrow \boxed{p(a) = r}$$
$$a \text{ arrel de } p(x) \Longrightarrow r = p(a) = 0 \Longrightarrow \boxed{p(x) = q(x) \cdot (x - a)}$$

D'aquesta manera per a cada arrel $a \in \mathbb{R}$ aconseguim un factor $x - a$. Es pot demostrar que qualsevol polinomi de coeficients reals es pot descompondre en factors de grau 1 o 2.[1]Un cop aconseguit un factor de grau 2, és possible que aquest no es pugui descompondre més perquè no tingui arrels reals.

Exemple 3 *Descomposició factorial de* $p(x) = x^3 - 3x^3 + 4x - 12$.

Apliquem la regla de Ruffini, per trobar el primer factor. Recordem que els candidats enters a ser arrels de $p(x)$ i, per tant, a l'obtenció de residu 0, són els divisors del terme independent -12 d'aquest polinomi.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 4 & -12 \\ 3 & & 3 & 0 & 12 \\ \hline & 1 & 0 & 4 & 0 \end{array}$$

Una primera descomposició del polinomi és

$$p(x) = (x - 3)(x^2 + 4).$$

El segon factor compleix $p(x) = x^2 + 4 \geq 4 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Per tant, no té arrels i $p(x)$ no admet més descomposició.

1.4 Un exercici de descomposició factorial ampliant el camp dels nombres reals. Introducció intuïtiva al nombre complex

L'any 1702, Gottfried Wilhelm Leibniz, en un article aparegut a l'*Acta Eruditorum* titulat "Specimen novum Analyseos pro Scientia infiniti circa Summas et Quadraturas", tracta el problema de quadrar funcions racionals. Concretament, es planteja que aquest problema quedaria solucionat si de la descomposició de qualsevol polinomi resultessin sempre factors de graus 1 o 2. Allí mateix diu haver trobat un contraexemple en què això no es compleix. Intenta "quadrar la funció", —trobar l'àrea sota la corba—,

$$f(x) = \frac{1}{x^4 + a^4}\,.$$

L'estratègia consistia en descompondre aquesta funció en fraccions de denominadors de grau 1 o 2 amb coeficients reals, les quals se sabien quadrar. Per aconseguir-ho cal descompondre

[1]Aquest resultat és una de les possibles formulacions del *teorema fonamental de l'àlgebra*. Les seva primera formulació va ser feta Albert Girard (1629) i els primers intents de demostració foren de d'Alembert (1746) i Euler (1749). La primera prova satisfactòria l'aconseguí Gauss (1799). Hi va haver intents de negar la veritat del teorema. Veurem més avall que l'any 1702, Leibniz ho va intentar amb un contraexemple.

$x^4 + a^4$ en factors. Incorpora $\sqrt{-1}$ al càlcul i diu que la descomposició no és possible perquè

$$\begin{aligned} x^4 + a^4 &= \left(x^2\right)^2 - \left(\sqrt{-a^4}\right)^2 = \left(x^2 + a^2\sqrt{-1}\right)\left(x^2 - a^2\sqrt{-1}\right) = \\ &= \left(x^2 - \left(\sqrt{-a^2\sqrt{-1}}\right)^2\right)\left(x^2 - \left(\sqrt{a^2\sqrt{-1}}\right)^2\right) = \\ &= \left(x - a\sqrt{-\sqrt{-1}}\right)\left(x + a\sqrt{-\sqrt{-1}}\right)\left(x - a\sqrt{\sqrt{-1}}\right)\left(x + a\sqrt{\sqrt{-1}}\right), \quad (1) \end{aligned}$$

i cap agrupació d'aquests factors dóna un polinomi de coeficients reals de grau menor que 4. A continuació falsarem el contraexemple en el cas concret $a^4 = 16$ seguint el camí de Leibniz en què treballava amb l'ampliació del camp numèric dels reals que resultava de la inclusió de $\sqrt{-1}$. Operarem amb aquests nombres com si complissin les propietats de les operacions aritmètiques dels reals, i veurem que $x^4 + 16$ admet descomposició en el camp real.[2] Això ens durà a considerar l'interès de l'ampliació del camp real amb els nous nombres generats per $\sqrt{-1}$, la qual anomenem *unitat imaginària*.[3] Per simplificar la notació definim:

$$i = \sqrt{-1}, \text{ és a dir, } i \text{ és un nombre tal que } i^2 = -1.^4$$

Pretenem trobar un dels valors de $\sqrt{i}$ i un dels de $\sqrt{-i}$ per seguir amb el càlcul de la igualtat (1). El primer que veiem és que aquests nombres no poden ser reals, perquè si ho fossin els seus quadrats $i, -i$ també serien reals. Per tant, suposarem que aquests nombres participen de dos mons numèrics i tenen una part del món real i una altra del món imaginari. Aquests nombres s'anomenen *complexos*. Els presentarem amb la notació $z = a + bi$, en què $a, b \in \mathbb{R}$ i representen, respectivament, el nombre d'unitats reals i d'unitats imaginàries del nombre complex z. Llavors, per a una de les arrels de i tenim,

$$\sqrt{i} = a + bi \iff (a+bi)^2 = i \iff (a^2 - b^2) + (2ab)i = i = 0 + i \iff \quad (2)$$

$$\iff \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 - \dfrac{1}{4a^2} = 0 \\ b = \dfrac{1}{2a} \end{cases} \iff \begin{cases} 4a^4 - 1 = 0 \\ b = \dfrac{1}{2a} \end{cases} \implies$$

$$\implies a = b = \frac{\sqrt{2}}{2} \implies \boxed{\sqrt{i} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\, i}. \quad (3)$$

---

[2]Observem que la descomposició de $x^4 + 16$ és immediata si utilitzem la tècnica de completar quadrats. Efectivament,

$$x^4 + 16 = (x^2+4)^2 - 8x^2 = (x^2+4)^2 - \left(2\sqrt{2}x\right)^2 = (x^2 + 2\sqrt{2}x + 4)(x^2 - 2\sqrt{2}x + 4).$$

Amb això volem mostrar que l'interès de la descomposició utilitzant les unitats imaginàries rau, no tant en la seva efectivitat pel que fa a rapidesa en la recerca de la solució, sinó en el fet que funciona i que, per tant, podem ampliar el camp numèric dels reals amb aquestes noves unitats i utilitzar-les en altres problemes.

[3]El terme *imaginari* és utilitzat per primera vegada per Descartes en el llibre III, pàg. 380, de *La Géométrie*. Allí tracta sobre les arrels dels polinomis i diu:

> Cal observar, finalment, que ni les arrels vertaderes ni les falses, han de ser necessàriament reals. A vegades són imaginàries.

Per a ell les arrels vertaderes eren les positives i les falses eren les negatives.

[4]El primer en utilitzar aquest símbol fou el matemàtic suís Leonhard Euler (1706–1783) en una memòria presentada l'any 1777 a l'Acadèmia de Sant Petersburg.

De la mateixa manera veuríem que una de les arrels de $-i$ és

$$\boxed{\sqrt{-i} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\, i}\,.$$

Conseqüentment, si continuem amb el càlcul de la igualtat (1), obtenim

$$x^4 + 16 = \left(x - \sqrt{2} + \sqrt{2}\, i\right)\left(x + \sqrt{2} - \sqrt{2}\, i\right)\left(x - \sqrt{2} - \sqrt{2}\, i\right)\left(x + \sqrt{2} + \sqrt{2}\, i\right).$$

Si agrupem el primer factor amb el tercer, i el segon amb el quart, obtenim

$$\begin{aligned} x^4 + 16 &= \left(\left(x - \sqrt{2}\right)^2 - 2(-1)\right)\left(\left(x + \sqrt{2}\right)^2 - 2(-1)\right) = \\ &= \left(x^2 - 2\sqrt{2}x + 4\right)\left(x^2 + 2\sqrt{2}x + 4\right). \end{aligned}$$

Exemple 4 *Descomposició factorial del polinomi* $p(x) = x^4 + 10x^2 + 169$.

- Mitjançant compleció quadrats:

$$\begin{aligned} x^4 + 10x^2 + 169 &= (x^2+13)^2 - 16x^2 = \left((x^2+13) - 4x\right)\left((x^2+13) + 4x\right) = \\ &= \boxed{(x^2 - 4x + 13)(x^2 + 4x + 13)}\,. \end{aligned}$$

- Mitjançant la recerca d'arrels del polinomi en el camp numèric complex:

$$x^4 + 10x^2 + 169 = 0 \iff x^2 = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 169}}{1} = \frac{-5 \pm 12i}{1} = \begin{cases} \nearrow & -5 + 12i \\ \searrow & -5 - 12i \end{cases} \iff$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} x = \sqrt{-5 + 12i} \\ \quad \text{o} \\ x = \sqrt{-5 - 12i}\,. \end{array} \right.$$

Calculem $x = \sqrt{-5 + 12i}$:

$$\sqrt{-5 + 12i} = a + bi \iff (a + bi)^2 = -5 + 12i \iff (a^2 - b^2) + (2ab)i = -5 + 12i \iff$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} a^2 - b^2 = -5 \\ 2ab = 12 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} a^2 - \dfrac{36}{a^2} = -5 \\ b = \dfrac{6}{a} \end{array} \right. \iff$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} a^4 + 5a^2 - 36 = 0 \\ b = \dfrac{6}{a} \end{array} \right. \implies$$

$$\iff a^2 = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 144}}{2} = \frac{-5 \pm 13}{2} = \begin{cases} \nearrow & 4 \\ \searrow & -9 \end{cases} \text{ i } b = \frac{6}{a} \implies$$

$$\implies \sqrt{-5 + 12i} = \begin{cases} \nearrow & 2 + 3i \\ \searrow & -2 - 3i\,. \end{cases}$$

De la mateixa manera es pot veure que

$$\sqrt{-5-12i} = \begin{cases} 2-3i \\ -2+3i\,. \end{cases}$$

Finalment, obtenim la descomposició:

$$\begin{aligned} x^4+10x^2+169 &= (x-2-3i)(x+2+3i)(x-2+3i)(x+2-3i) = \\ &= \big((x-2)^2-(3i)^2\big)\big((x+2)^2-(3i)^2\big) = \boxed{(x^2-4x+13)(x^2+4x+13)}\,. \end{aligned}$$

2 La resolució algebraica de l'equació de tercer grau. La solució del "casus irreducibilis" mitjançant unitats imaginàries

L'algoritme de resolució amb radicals de l'equació de segon grau era conegut des de la Babilònia del segon mil·lenni abans de la nostra era. No passa el mateix amb l'equació de tercer grau, en què el mètode de resolució amb radicals no va ser descobert fins el segle XVI pels algebristes italians.[5] Farem un estudi de la resolució inspirat en la lectura dels mètodes d'aquests autors, especialment dels que trobem a l'*Ars Magna* de Girolamo Cardano (1501–1576). Prendrem com a punt de referència per a la nostra argumentació, un exercici en què completem quadrats per resoldre l'equació de segon grau mitjançant la intervenció de les operacions aritmètiques i els radicals. Suposem que volem trobar les solucions de l'equació

$$x^2-4x=16.$$

Som conscients que la dificultat d'aïllar la x rau en l'existència de termes en x^2 i en x. Si algun d'aquests no existís, o bé si poguéssim presentar l'equació en la forma

$$(x-\lambda)^2 \pm \mu = 16,$$

la resolució seria immediata. Veiem que això es pot aconseguir:

$$x^2-4x=16 \Longleftrightarrow (x-2)^2-4=16 \Longleftrightarrow (x-2)^2=20 \Longleftrightarrow x=2\pm\sqrt{20}.$$

Esbrinem les dificultats que trobarem si intentem resoldre una equació cúbica aplicant aquesta actuació, —ara es tractarà de "completar cubs"—, amb la finalitat de trobar una resolució en què intervinguin les operacions aritmètiques i els radicals. Concretament, considerarem un exemple "senzill" en el que no apareixen termes de segon grau:[6]

[5] Aquesta va ser una història embolicada en què els actors principals van ser del Ferro, del Fiore, Tartaglia, Cardano, Ferrari i Bombelli.

[6] Aquest exemple és el que serveix a Cardano per començar l'estudi de la resolució de les equacions de tercer grau. L'estudi li ocupa els capítols 11–23 de l'*Ars Magna* i l'exemple el trobem en el capítol 11 , el qual titula "Sobre el cub i la cosa igual al nombre". Allí introdueix el tema dient:

> Scipione del Ferro de Bolonya fa prop de 30 anys va descobrir aquesta regla i la comunicà a Antonio Maria Fior de Venezia, la disputa del qual amb Niccoló Tartaglia de Brescia, va donar l'oportunitat a Niccoló de descobrir-la pel seu cantó. Aquest me la va proporcionar en resposta als meus precs, encara que sense la demostració. Proveït d'aquest ajut, vaig cercar la demostració de maneres diverses. Això va ser molt difícil. La meva versió d'això és la que segueix.

El que segueix, a l'*Ars Magna*, és una demostració geomètrica, utilitzant volums de cubs i ortoedres, de la resolució de l'equació $x^3+6x=20$ que nosaltres estudiem en llenguatge algebraic.

$$x^3 + 6x = 20. \tag{4}$$

Mirarem de completar cubs. Considerem

$$(x+\lambda)^3 = x^3 + 3\lambda x^2 + 3\lambda^2 x + \lambda^3.$$

La cosa no pinta massa bé, perquè apareixen termes de grau 2. Podem evitar-ho i aconseguir una presentació similar a $x^3 + 6x$ escrivint

$$(x+\lambda)^3 - \lambda^3 = x^3 + 3\lambda(x+\lambda)x, \tag{5}$$

amb la novetat que quan imposem que sigui igual a $x^3 + 6x$ apareixen dues condicions:

$$\begin{aligned} (x+\lambda)^3 - \lambda^3 &= 20 \\ 3\lambda(x+\lambda) &= 6. \end{aligned}$$

Per simplificar les notacions, anomenem

$$u = x + \lambda, \qquad v = \lambda,$$

i resolem el sistema que resulta:

$$\left\{ \begin{array}{c} u^3 - v^3 = 20 \\ u^3 v^3 = 8 \end{array} \right. \Longrightarrow u^3 - \frac{8}{u^3} = 20 \Longrightarrow u^6 - 20u^3 - 8 = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} u^3 = 10 \pm \sqrt{100+8} = 10 \pm 6\sqrt{3} \\ v^3 = u^3 - 20 = -10 \pm 6\sqrt{3}. \end{array} \right.$$

Si considerem el primer valor de u^3 i el primer de v^3 s'obté

$$x = u - v = \sqrt[3]{6\sqrt{3}+10} - \sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}.$$

Si no disposem de calculadora podem mirar de simplificar aquest resultat, centrant-nos en el càlcul de les arrels cúbiques. Mirarem si existeix alguna arrel cúbica de $6\sqrt{3}+10$ del tipus $a + b\sqrt{3}$, amb $a, b \in \mathbb{N}$.

$$\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10} = a + b\sqrt{3} \iff a^3 + 3a^2b\sqrt{3} + 9ab^2 + 3b^3\sqrt{3} = 6\sqrt{3} + 10 \iff$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} a^3 + 9ab^2 = 10 \\ 3a^2b + 3b^3 = 6 \end{array} \right.$$

Si busquem possibles solucions naturals, de la primera equació resulta que $a = 1$ i llavors, si substituïm a les dues equacions, en resulta $b = 1$. És immediat comprovar que la solució $\sqrt{3}+1$ trobada és bona,

$$\left(\sqrt{3}+1\right)^3 = 3\sqrt{3} + 9 + 3\sqrt{3} + 1 = 6\sqrt{3} + 10.$$

En el cas de $\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}$ s'actuaria igual amb l'única diferència que hauríem de buscar els valors de a i b entre tots els enters. En resultaria

$$\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10} = \sqrt{3} - 1.$$

En definitiva, una solució de l'equació és

$$x = \left(\sqrt{3}+1\right) - \left(\sqrt{3}-1\right) = 2.$$

2.1 Estudi general del cas $\mathbf{x^3 + p\,x + q = 0}$

Actuem com en l'exemple anterior. Es tracta de resoldre $x^3 + px = -q$ completant el cub $(x+\lambda)^3$ de manera que sigui igual a $x^3 + p\,x$:

$$-q = x^3 + p\,x = (x+\lambda)^3 - \lambda^3 = x^3 + 3\lambda(x+\lambda)x \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} (x+\lambda)^3 - \lambda^3 = -q \\ 3\lambda(x+\lambda) = p. \end{array} \right.$$

Si simplifiquem les notacions com abans i resolem el sistema que resulta tenim

$$\left\{ \begin{array}{l} u = x+\lambda \\ v = \lambda \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} u^3 - v^3 = -q \\ u^3 v^3 = \left(\dfrac{p}{3}\right)^3 \end{array} \right. \Longrightarrow u^3 - \frac{p^3}{27u^3} = -q \Longrightarrow 27u^6 + 27qu^3 - p^3 = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} u^3 = \dfrac{-27q \pm \sqrt{27^2 q^2 + 4\cdot 27p^3}}{54} = -\dfrac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{q}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{p}{3}\right)^3} \\ v^3 = u^3 + q = \dfrac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{q}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{p}{3}\right)^3}. \end{array} \right.$$

Finalment, en se $x = u - v$, en resulta

$$\boxed{x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}}\;. \tag{6}$$

Tot seguit estudiarem un exemple en què es mostra que podem aplicar aquest resultat a la resolució d'equacions més generals, fent una petita transformació. Més concretament, tractarem amb una equació cúbica que té un terme de grau 2.[7]

Exemple 5 *Resolució de l'equació* $x^3 - 6x^2 + 7x - 10 = 0$.

Es comprova immediatament que una solució és $x = 5$. Esbrinarem si la podem obtenir a partir de la regla (6). El primer pas consisteix a transformar aquesta equació en una del tipus estudiat més amunt. S'ha d'eliminar el terme de grau 2 i, per aconseguir-ho, caldrà cercar una canvi d'incògnita. El que proposem és treballar amb una nova incògnita z tal $x = z + \alpha$, en què $\alpha \in \mathbb{R}$ és un valor que hem de cercar per tal que resulti una equació sense terme de grau 2. L'equació que resulta quan fem la substitució és:

$$\begin{array}{l} (z+\alpha)^3 - 6(z+\alpha)^2 + 7(z+\alpha) - 10 = 0 \Longleftrightarrow \\ \quad \Longleftrightarrow \quad z^3 + (3\alpha - 6)z^2 + (3\alpha^2 - 12\alpha + 7)z + \alpha^3 - 6\alpha^2 + 7\alpha - 10 = 0. \end{array}$$

Observem que $\alpha \in \mathbb{R}$ ha de satisfer $3\alpha - 6 = 0$. Per tant, $\alpha = 2$ i la substitució que cal fer és $z = x - 2$.[8] Llavors, obtenim l'equació

$$z^3 - 5z - 12 = 0.$$

[7]No perdem de vista que els exemples que presentem es podrien resoldre fàcilment utilitzant la regla de Ruffini i el teorema del residu, els quals proporcionarien les arrels racionals dels polinomis implicats. L'interès d'aquest tractament rau en la seva utilitat en els casos que no existeix cap arrel racional i, des del punt de vista teòric, en l'existència d'una regla o *algoritme* que permet expressar la solució mitjançant les quatre operacions aritmètiques, $+ . -, \times, \div$, i l'extracció d'arrels.

[8]És immediat comprovar que si presentem la forma general de l'equació de tercer grau

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

La substitució que cal fer per eliminar el terme de grau 2 és $z = x + \frac{a}{3}$.

Apliquem la regla (6) trobada i obtenim

$$\begin{aligned} z &= \sqrt[3]{6+\sqrt{(-6)^2+\left(\frac{-5}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{(-6)^2+\left(\frac{-5}{3}\right)^3}} = \\ &= \sqrt[3]{6+\frac{11}{9}\sqrt{21}}+\sqrt[3]{6-\frac{11}{9}\sqrt{21}} \end{aligned}$$

Mirarem de simplificar aquesta expressió per veure si obtenim la solució $x = 5$ de l'equació no transformada, o de manera equivalent $z = x - 2 = 5 - 2 = 3$. Observem, també, que dins de cada radical cúbic hi ha una part racional, —el 6—, i una part irracional, —$\frac{11}{9}\sqrt{21}$—. Podem pensar aquestes parts com independents, en el sentit que són una combinació, —suma o resta—, d'un cert nombre racional d'unitats racionals, —6 vegades l'1—, i d'un cert nombre racional d'unitats irracionals —$\frac{11}{9}$ vegades l'arrel de 21—, i que $\sqrt{21}$ no es pot expressar en termes racionals. Conjecturem que la seva arrel cúbica pugui ser del mateix tipus, és a dir

$$\sqrt[3]{6+\frac{11}{9}\sqrt{21}} = a + b\sqrt{21}. \tag{7}$$

Si fos així, tindríem que

$$\sqrt[3]{6-\frac{11}{9}\sqrt{21}} = a - b\sqrt{21}. \tag{8}$$

perquè $\left(a+b\sqrt{21}\right)^3$ i $\left(a-b\sqrt{21}\right)^3$ només es diferencien pel signe de la part irracional. Efectivament,

$$\left(a+b\sqrt{21}\right)^3 = \left(a^3+63ab^2\right)+\left(3a^2b+21b^3\right)\sqrt{21} \tag{9}$$

$$\left(a-b\sqrt{21}\right)^3 = \left(a^3+63ab^2\right)-\left(3a^2b+21b^3\right)\sqrt{21} \tag{10}$$

Llavors, des de les igualtats (7) i (8) i de la perspectiva d'obtenir la solució $z = 3$, proposem,

$$3 = \left(a+b\sqrt{21}\right)+\left(a-b\sqrt{21}\right) = 2a \Longrightarrow a = \frac{3}{2}.$$

Si tenim en compte això i (7), (8), (9) i (10),

$$\begin{aligned} 6+\frac{11}{9}\sqrt{21} &= \left(\frac{3}{2}+b\sqrt{21}\right)^3 = \left(\frac{27}{8}+\frac{189}{2}b^2\right)+\left(\frac{27}{4}b+21b^3\right)\sqrt{21} \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left(\frac{27}{8}+\frac{189}{2}b^2\right) = 6 \\ \left(\frac{27}{4}b+21b^3\right) = \frac{11}{9} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} b^2 = \frac{2}{189}\left(6-\frac{27}{8}\right) = \frac{1}{36} \\ \frac{27}{4}b+21b^3 = \frac{11}{9} \end{array}\right. \end{aligned} \tag{11}$$

De la primera equació resulta $b = \frac{1}{6}$ o bé $b = -\frac{1}{6}$. Si substituïm aquests valors a la segona equació de l'últim sistema (11), obtenim que l'únic valor vàlid de b és $\frac{1}{6}$. Efectivament,

$$\left\{\begin{array}{r} \frac{27}{4}\frac{1}{6}+21\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{9}{8}+\frac{7}{72} = \frac{88}{72} = \frac{11}{9} \\ \frac{27}{4}\left(-\frac{1}{6}\right)+21\left(-\frac{1}{6}\right)^3 = -\frac{9}{8}+\frac{7}{72} = -\frac{88}{72} = -\frac{11}{9}. \end{array}\right.$$

En definitiva, podem concloure que

$$\sqrt[3]{6+\frac{11}{9}\sqrt{21}}=\frac{3}{2}+\frac{1}{6}\sqrt{21},$$

i, per tant,

$$\sqrt[3]{6-\frac{11}{9}\sqrt{21}}=\frac{3}{2}-\frac{1}{6}\sqrt{21}.$$

D'aquí resulta que,

$$z=\sqrt[3]{6+\frac{11}{9}\sqrt{21}}+\sqrt[3]{6-\frac{11}{9}\sqrt{21}}=3\Longrightarrow x=z+2=5.$$

2.2 El "casus irreducibilis" i les unitats imaginàries

Hem vist a l'últim exemple que podíem reduir l'estudi de totes les equacions del tipus $x^3+ax^2+bx+c=0$ a l'estudi de les del tipus $x^3+px+q=0$, a partir de la substitució $z=x+\frac{a}{3}$. La solució, mitjançant la suma de dues arrels cúbiques, presenta problemes en alguns casos. Si observem la regla (6) de resolució de l'equació cúbica, notem que si

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3<0,$$

apareixen unitats imàginaries. Aquest era el cas considerat irreductible, és a dir que no podia ser resolt mitjançant la regla.[9] Bombelli va trobar la solució donant les regles per operar amb les unitats imaginàries. Presentarem la resolució d'una equació d'aquest tipus:

$$x^3-15x-4=0.$$

Podem comprovar fàcilment que una de les seves solucions és $x=4$. Apliquem la regla per mirar d'obtenir-la:

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{2^2-5^3}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{2^2-5^3}}=\sqrt[3]{2+11i}+\sqrt[3]{2-11i}.$$

Actuem com a l'exemple 5 i conjecturem

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{2+11i}=2+bi \quad &\Longleftrightarrow \quad 2+11i=(2+bi)^3=\left(8-6b^2\right)+\left(12b-b^3\right)i\Longleftrightarrow\\ &\Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{c}8-6b^2=2\\ 12b-b^3=11\end{array}\right. \Longleftrightarrow b=1.\end{aligned}$$

Llavors,

$$\sqrt[3]{2+11i}=2+i \ \text{ i } \ \sqrt[3]{2-11i}=2-i\Longrightarrow x=\sqrt[3]{2+11i}+\sqrt[3]{2-11i}=2+i+2-i=4.$$

Exemple 6 *Si considerem l'equació $x^3-52x+96=0$, és immediat trobar les seves arrels -8, 2, 6, utilitzant la regla de Ruffini. També es pot comprovar que si s'utilitza la regla de resolució de la cúbica mitjançant radicals, apareixen nombres imaginaris. Llavors, si actuem com a l'exposició de més amunt es troba l'arrel més gran:*

$$x=3+\frac{5\sqrt{3}\,i}{3}+3-\frac{5\sqrt{3}\,i}{3}=6.$$

[9] L'opinió de Cardano en el capítol 37 de l'*Ars Magna*, és que el treball amb aquest tipus de nombres és "veritablement sofisticat" per acabar opinant que és "tan subtil com inútil". L'alternativa de resolució de Cardano era donar regles particulars en què actuava per tempteig.

3 Els nombres complexos. Definició i estructura

Considerem el conjunt $\mathbb{R}$ de nombres reals i acceptem l'existència d'un nombre no real i, el qual anomenem la *unitat imaginària*, tal que $i^2 = -1$. Definim el conjunt dels nombres complexos com

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi, \text{ tals que } a, b \in \mathbb{R}\}.$$

La representació dels nombres complexos z mitjançant el binomi $a + bi$, rep el nom de *forma binòmica* del nombre complex z. Anomenem $a \in \mathbb{R}$ *part real* del nombre complex z la qual representem per $Re(z)$, i anomenem $b \in \mathbb{R}$ *part imaginària* de z i la representem per $Im(z)$. Direm que $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ són iguals ssi $Re(z_1) = Re(z_2)$ i $Im(z_1) = Im(z_2)$. Podem considerar el conjunt $\mathbb{R}$ com un subconjunt de $\mathbb{C}$, si fem la identificació $a = a + 0i$.

3.1 Estructura

Per tal que l'estructura algebraica dels reals s'estengui als complexos definirem la suma i el producte de complexos de manera que s'ajusti a les actuacions de les seccions anteriors. En particular aconseguirem que la seva restricció al camp real coincideixi amb la suma i el producte de reals.

Suma: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
Producte: $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

Si el producte costa de memoritzar, només cal observar que es pot obtenir si actuem amb les propietats de la suma i multiplicació dels reals:

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac + bd(-1) + (ad + bc)i = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Observem que la restricció als reals funciona bé:

$$\begin{aligned} a, b \in \mathbb{R} &\implies a + b = (a + 0i) + (b + 0i) = (a + b) + (0 + 0)i = (a + b) + 0i \\ a, b \in \mathbb{R} &\implies a \cdot b = (a + 0i) \cdot (b + 0i) = (a \cdot b - 0 \cdot 0) + (a \cdot 0 + 0 \cdot b)i = ab + 0i. \end{aligned}$$

És fàcil de comprovar que els complexos amb aquestes operacions tenen les mateixes propietats que els reals: Commutativa i associativa per a la suma i el producte, existència d'element neutre (—$0 + 0i$ per a la suma, $1 + 0i$ per al producte—, existència d'element simètric o oposat per a la suma —simètric de $a + bi$ igual a $-a - bi$—, i existència d'element invers per al producte si $z \neq 0$.[10] Cercarem l'element invers $x + yi$ de $a + bi \neq 0$.

$$(a + bi)(x + yi) = 1 + 0i \iff \left\{ \begin{array}{l} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{a}{a^2 + b^2} \\ y = \dfrac{-b}{a^2 + b^2} \end{array} \right. .$$

És a dir,

$$(a + bi)^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}\, i.$$

[10] També es diu que els reals i els complexos, amb la suma i el producte, tenen la mateixa estructura algebraica. Aquesta estructura rep el nom de *cos commutatiu*.

Disposem d'una manera alternativa de trobar aquest invers, si actuem amb les notacions que utilitzem amb els reals:

$$(a+bi)^{-1} = \frac{1}{a+bi} = \frac{1}{a+bi} \cdot \frac{a-bi}{a-bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\, i.$$

Observem que hem utilitzat la tècnica de racionalització. Si $z = a+bi$, el complex $a-bi$ rep el nom de *complex conjugat* de z i es representa amb la notació $\bar{z}$.

3.2 Extracció d'arrels

L'ampliació el camp dels reals ha vingut provocada en l'intent d'assignar un valor a $\sqrt{-1}$. Al nou conjunt ampliat de nombres els hem anomenat complexos. A la secció 1.4 i a la secció 2.2 hem calculat algunes arrels quadrades i una arrel cúbica de nombres complexos. En tots els casos els resultats han sigut nombres complexos. La qüestió que es planteja és que si, com passa en el cas de $\sqrt{-1}$, és possible que ens trobem en la necessitat d'ampliar el camp complex per poder assignar un valor a les arrels d'índex natural d'un nombre complex. Si estudiem aquesta qüestió podem comprovar que en el cas que l'arrel sigui d'índex 2, això no passa perquè, si actuem com a les seccions citades, no és massa difícil comprovar que[11]

$$\sqrt{a+bi} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + \sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\, i.$$

Quant a les arrels d'índex superior, ho podem esbrinar de la manera següent:

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a+bi} = z \iff\ & a+bi = z^n \iff (bi)^2 = (z^n - a)^2 \iff -b^2 = (z^n-a)^2 \iff \\ \iff\ & z^{2n} - 2az^n + a^2 + b^2 = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

El polinomi en la lletra z de la part dreta de (12), es pot descompondre pel teorema fonamental de l'àlgebra, en polinomis de coeficients reals de grau màxim igual a 2. Conseqüentment, cadascun dels factors resultants només pot donar lloc a arrels reals o complexes. Per tant, no s'originen nombres que no pertanyin al camp complex i no hi ha necessitat d'ampliació. De fet, la versió del teorema fonamental de l'àlgebra el camp dels complexos assegura que no tant sols els polinomis de la igualtat (12) tenen les seves arrels dins a $\mathbb{C}$, sinó que tot polinomi de grau n amb coeficients reals o complexos té totes les seves n arrels en $\mathbb{C}$. És a dir, que cap polinomi amb coeficients a $\mathbb{C}$, pot generar arrels "exteriors" a $\mathbb{C}$. Per aquest motiu es diu que no existeixen *extensions algebraiques* de $\mathbb{C}$ o, també, que $\mathbb{C}$ és *algebraicament tancat.*

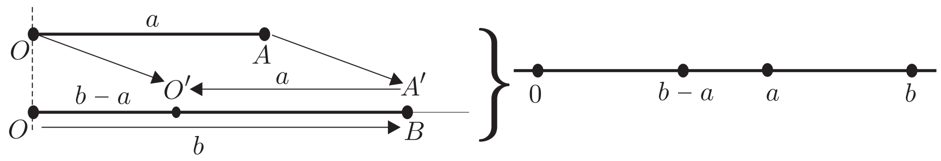
Hem vist a la secció 2.2 que el càlcul d'arrels cúbiques en el camp complex s'ha fet conjecturant el valor de la part real del resultat. No sabem si aquest era l'únic resultat possible. D'altra banda si plantegem el problema sense conjecturar la part real, en resulta un sistema de difícil resolució. Si s'augmenta l'índex de l'arrel, les dificultats també creixen. En la secció següent veurem que amb una bona interpretació geomètrica del nombre complex, el càlcul d'arrels de qualsevol índex es converteix en un afer trivial.

[11] Només cal establir $\sqrt{a+bi} = x+yi$, i resoldre el sistema que en resulta: $\left\{ \begin{array}{l} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b. \end{array} \right.$

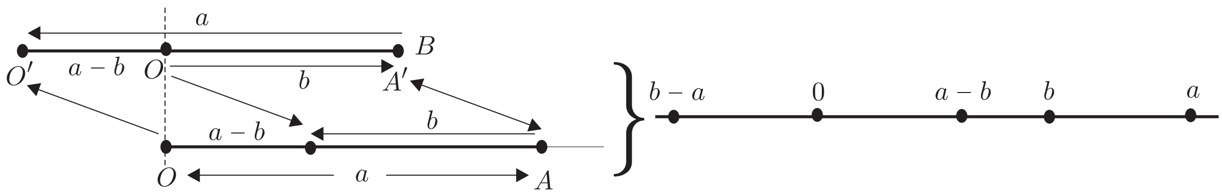
4 Representació gràfica dels nombres complexos

Estem tan habituats a la representació dels reals sobre una recta, que no ens plantegem quina és la idea clau que hi ha darrere la identificació entre nombres i punts de la recta. Veurem que si captem aquesta idea podrem inferir-ne una representació dels complexos sense forçar massa la situació.[12] La representació dels reals positius no té gaires secrets, si s'accepta la identificació de cada real positiu amb un segment que el té per longitud. Això permet representar aquests nombres sobre una semirecta en què identifiquem l'origen amb el nombre 0 i un altre punt, a la seva dreta, amb el nombre 1. Podem lligar la representació de nombres negatius amb el fet de trobar una representació geomètrica per a la solució d'equacions del tipus $x + a = b$, en què $a > b > 0$. Es tracta de restar un segment OA de longitud a, d'un altre OB de longitud més petita b.[13] Fixem-nos en el cas més senzill d'assignar un punt de la semirecta a la diferència $OB - OA = b - a$ quan $a < b$:

– Considerem A i B sobre la semirecta d'origen O.
– Traslladem OA sobre la semirecta, fins obtenir $O'A'$ de manera que A' coincideixi amb B.
– Els nombres 0, a, b i $b - a$ venen representats pels punts O, A, B i O', desplaçat de O, en la translació anterior.



Ara, podem estendre l'actuació anterior al cas de representar $x = b - a$ quan $a > b$, d'on obtindrem la representació dels nombres negatius que ja coneixem. Efectivament, en el gràfic observem que $b - a$ s'identifica amb el punt O' situat a l'esquerra de O i a una distància $a - b$ d'aquest últim.



En general, qualsevol nombre negatiu x es representa per un punt situat a l'esquerra de l'origen i a distància $|x|$ d'aquest. La idea clau resideix en *identificar cada nombre amb un segment orientat sobre la recta* a partir d'un origen O que identifiquem amb el nombre 0. Amb això hem pogut solucionar el problema de representar les solucions de qualsevol equació del tipus $x + a = b$.

En el camp complex tenim un problema nou, volem representar la solució de $x^2 = -1$. Aquest problema és equivalent al de la representació de la solució de

$$\frac{-1}{x} = \frac{x}{1}\,. \tag{13}$$

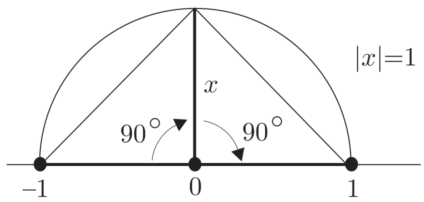
[12] Wessel, Argand i Gauss van ser els introductors de la representació que farem dels complexos, encara que abans d'ells ja havia estat feta per Euler sense lligar-la amb la seva estructura.

[13] Euclides, en els *Elements* I.3, resol aquesta qüestió quan $a < b$.

Aquest equació és un cas particular de l'equació més general

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}\,.$$

Quan a i b són positius el teorema de l'altura resol immediatament la qüestió de trobar una representació gràfica de la seva solució. El problema resideix en que interessa estudiar el cas $a = -1 < 0$, $b = 1 > 0$. Considerem, com abans cada nombre real a identificat amb un segment de longitud $|a|$ d'orientació determinada pel seu signe. Llavors, veiem en el gràfic adjunt que el teorema de l'altura permet associar al nombre x tal que $x^2 = -1 \cdot 1 = -1$, un segment de longitud 1. Però, com podem representar x?



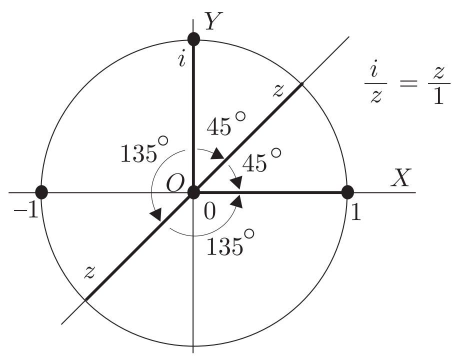
El gràfic on representem el teorema de l'altura i la identificació dels reals amb segments orientats suggereixen una línia d'actuació. Associem a x una orientació fora de la recta real, l'orientació perpendicular a aquesta recta. D'aquesta manera $x = \sqrt{-1}$ queda identificat amb un segment de longitud 1, orientat perpendicularment a la recta on representem els reals i amb origen el punt que representa el 0. Així, la relació (13) es pot entendre de la manera següent:[14]

> El nombre $x = \sqrt{-1}$ es representa amb un segment orientat tal que el seu valor numèric absolut satisfà:
>
> $$\frac{|-1|}{|x|} = \frac{|x|}{|1|}\,,\ \text{és a dir } |x| = 1,$$
>
> i l'orientació de -1 respecte de x ($90°$ de diferència), és la mateixa que la de x respecte de 1 ($90°$ de diferència).

D'aquesta manera podem tractar altres exemples, fins trobar una manera general de representar qualsevol nombre complex. Considerem el nombre complex z tal que és mitjana proporcional entre i i 1. Si actuem segons la interpretació anterior, el segment que el representa té un valor numèric $|z|$ tal que

$$\frac{|i|}{|z|} = \frac{|z|}{|1|}\,, \qquad \text{és a dir} \qquad |z| = 1.$$

Quant a la seva orientació ha de formar el mateix angle amb el segment que representa el nombre i que amb el que representa el nombre 1. Per tant, segueix la direcció de la bisectriu del primer i tercer quadrant.



D'altra banda, si cerquem la seva forma binòmica tenim

$$\frac{i}{z} = \frac{z}{1} \iff z^2 = i \iff z = \sqrt{i}$$

[14] Això és el que fa Argand.

Un dels valors d'aquesta arrel el tenim calculat en la fórmula (3) de la pàgina 4:

$$\sqrt{i} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\, i.$$

D'allí mateix podríem treure l'altre valor:

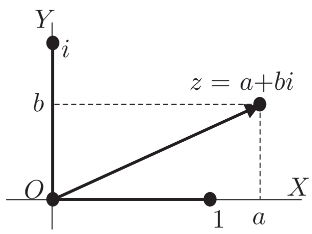
$$\sqrt{i} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\, i.$$

És notable d'observar que els valors de les projeccions sobre les direccions OX i OY de 1 i i, dels segments orientats que es proposen per a la representació del complex $z = \sqrt{i}$, coincideixen amb les seves parts reals i imaginàries. Efectivament,

$$\text{Projecció de } z = \sqrt{i} \text{ sobre } OX \;=\; \left\{ \begin{array}{l} |z| \cos 45^\circ \;= 1 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ |z| \cos 135^\circ = 1 \cdot \dfrac{-\sqrt{2}}{2} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right\} = Re(\sqrt{i}).$$

$$\text{Projecció de } z = \sqrt{i} \text{ sobre } OY \;=\; \left\{ \begin{array}{l} |z| \sin 45^\circ \;= 1 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ |z| \sin 135^\circ = 1 \cdot \dfrac{-\sqrt{2}}{2} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right\} = Im(\sqrt{i}).$$

Això ens indica una manera de representar gràficament qualsevol complex. Donat un complex $z = a+bi$, el representarem sobre un pla com un segment orientat o vector d'origen $(0,0)$ i extrem (a,b). El punt (a,b) rep el nom d'*afix* del complex $z = a + bi$ i també se l'identifica amb el complex.

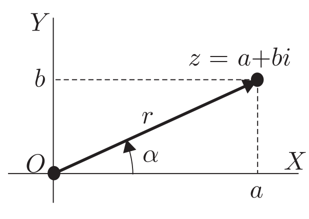


5 Formes polar i trigonomètrica d'un nombre complex

La representació gràfica dels complexos sobre el pla suggereix un altre tipus de presentació per als complexos. Concretament, el vector que hem identificat amb un complex queda determinat si coneixem el seu mòdul i la seva orientació o angle que forma amb la direcció positiva de l'eix real OX. així establim que:

El complex $z = a + bi$ es pot presentar amb la notació r_α, anomenada *forma polar*, en què:

- $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ rep el nom de *mòdul* de z i s'escriu $|z|$.
- α rep el nom d'*argument* de z i satisfà $\tan\alpha = \dfrac{b}{a}$.
- El valor de α ve determinat pels signes de a i b, i pot ser substituït per $\alpha + n \cdot 360^\circ$. De tots aquests, aquell que es troba a l'interval $[0^\circ, 360^\circ[$ rep el nom d'*argument principal* de z.



D'aquí es desprèn que

$$r_\alpha = s_\beta \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} r = s \\ \quad \text{i} \\ \alpha = \beta + k \cdot 360^\circ, \text{ en què } k \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$$

Exemple 7 *Presentació de $z = 4 - 2i$ en forma polar.*

$$\left.\begin{array}{l} z = 4 - 2i \\ r = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \\ \tan\alpha = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2} \Longrightarrow \alpha = 120^\circ \ \text{ o } \ \alpha = 300^\circ \end{array}\right\} \Longrightarrow z = \left(2\sqrt{5}\right)_{300^\circ}$$

Si mirem de convertir un complex $z = r_\alpha$ donat en forma polar a la seva expressió en forma binòmica en resulta una presentació en llenguatge trigonomètric anomenada *forma trigonomètrica.* Si observem la representació gràfica tenim:

$$z = r_\alpha = r\cos\alpha + i\,r\sin\alpha = \underbrace{r(\cos\alpha + i\sin\alpha).}_{\text{forma trigonomètrica}}$$

Exemple 8 *Formes trigonomètrica i binòmica de $z = \left(\sqrt{2}\right)_{45^\circ}$*

$$z = \underbrace{\sqrt{2}\,(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)}_{\text{forma trigonomètrica}} = \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\,i = \underbrace{1+i}_{\substack{\text{forma}\\ \text{binòmica}}}$$

5.1 Operacions en forma polar

- **Producte:** $r_\alpha \cdot s_\beta = (r\cdot s)_{\alpha+\beta}$

$$\begin{aligned} r_\alpha \cdot s_\beta &= r(\cos\alpha + i\sin\alpha)\cdot s(\cos\beta + i\sin\beta) = \\ &= r\cdot s\,[(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)] = \\ &= r\cdot s[\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)] = (r\cdot s)_{\alpha+\beta} \end{aligned}$$

- **Potència d'exponent natural:** $(r_\alpha)^n = (r^n)_{n\cdot\alpha}$

$$(r_\alpha)^n = \underbrace{r_\alpha\cdot r_\alpha\cdot r_\alpha\cdots r_\alpha}_{(n)} = (r^n)_{n\cdot\alpha}$$

- **Divisió:** $\dfrac{r_\alpha}{s_\beta} = \left(\dfrac{r}{s}\right)_{\alpha-\beta}$

$$\begin{aligned} \left(\frac{r}{s}\right)_{\alpha-\beta} &= \frac{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)}{s(\cos\beta + i\sin\beta)} = \frac{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)}{s(\cos\beta + i\sin\beta)}\cdot\frac{\cos\beta - i\sin\beta}{\cos\beta - i\sin\beta} = \\ &= \frac{r[(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) + i(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)]}{s[(\cos^2\beta + \sin^2\beta) + i(\sin\beta\cos\beta - \cos\beta\sin\beta)} = \\ &= \left(\frac{r}{s}\right)\cdot\frac{\cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta)}{1+0i} = \left(\frac{r}{s}\right)_{\alpha-\beta} \end{aligned}$$

- **Arrels d'índex natural:** $\sqrt[n]{r_\alpha} = \left(\sqrt[n]{r}\right)_{\frac{\alpha}{n}+k\cdot\frac{360^\circ}{n}}$, $k \in \{0,1,2,\ldots,n-1\}$.

$$\sqrt[n]{r_\alpha} = x_\omega \iff (x_\omega)^n = r_\alpha \iff \left\{\begin{array}{l} x^n = r \\ n\cdot\omega = \alpha + k\cdot 360^\circ,\ k\in\mathbb{Z} \end{array}\right. \iff$$

$$\overset{(*)}{\iff} \left\{\begin{array}{l} x = \sqrt[n]{r} \\ \omega = \frac{\alpha}{n} + k\cdot\frac{360^\circ}{n},\ k\in\{0,1,2,\ldots,n-1\} \end{array}\right.$$

($*$) Els valors enters de k, majors que $n-1$ o menors que 0 no es consideren perquè proporcionen les mateixes arrels que els dels casos $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$.

Exemple 9 *Càlcul de les arrels sisenes de -1 i la seva aplicació a la factorització de x^6+1.*

Segons l'últim resultat, en ser $-1 = 1_{180^\circ}$, tenim

$$\sqrt[6]{-1} = \sqrt[6]{1_{180^\circ}} = \begin{cases} 1_{30^\circ} &= \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\, i \\ 1_{90^\circ} &= i \\ 1_{150^\circ} &= -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\, i \\ 1_{210^\circ} &= -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\, i \\ 1_{270^\circ} &= -i \\ 1_{330^\circ} &= \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\, i \end{cases}$$

Per tant,

$$\begin{aligned} & x^6 + 1 = \\ = \; & \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\, i\right)\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\, i\right)(x-i)(x+i)\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\, i\right)\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\, i\right) = \\ = \; & \left[\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right]\left(x^2+1\right)\left[\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right] = \\ = \; & \left(x^2 - \sqrt{3}\, x + 1\right)\left(x^2 + \sqrt{3}\, x + 1\right)\left(x^2+1\right). \end{aligned}$$

Factorització alternativa (sense treballar en el camp complex):
Si considerem $z = x^2$, tenim $x^6 + 1 = z^3 + 1$. Llavors si apliquem la regla de Ruffini:

$$\left.\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & & -1 & 1 & -1 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow x^6 + 1 = z^3 + 1 = (z+1)(z^2 - z + 1) = (x^2+1)(x^4 - x^2 + 1).$$

Per descompondre el segon factor, utilitzem la tècnica de completar quadrats:

$$x^4 - x^2 + 1 = \left(x^2+1\right)^2 - 3x^2 = \left[\left(x^2+1\right) + \sqrt{3}\, x\right]\left[\left(x^2+1\right) - \sqrt{3}\, x\right]$$

Conseqüentment,

$$x^6 + 1 = (x^2+1)\left(x^2 - \sqrt{3}\, x + 1\right)\left(x^2 + \sqrt{3}\, x + 1\right).$$

5.2 Fórmula de Moivre

Abraham de Moivre (1667–1754) demostra conèixer en els seus escrits, encara que d'una manera no explícita, el resultat següent:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Podem provar aquesta fórmula utilitzant la presentació en forma polar dels nombres complexos. Efectivament,

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (1_\theta)^n = (1^n)_{n\cdot\theta} = 1_{n\cdot\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Una de les aplicacions d'aquest resultat la tenim en la recerca de l'expressió de $\cos n\alpha$ i $\sin n\alpha$ en funció de $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$. Efectivament, de les igualtats

$$\begin{aligned}
&\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \\
&= \binom{n}{0}\cos^n\theta + i\binom{n}{1}\cos^{n-1}\theta\sin\theta + \cdots + i^k\binom{n}{k}\cos^{n-k}\theta\sin^k\theta + \cdots + i^n\binom{n}{n}\sin^n\theta = \\
&= \left(\binom{n}{0}\cos^n\theta - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta - \cdots\right) + \\
&\quad +i\left(\binom{n}{1}\cos^{n-1}\theta\sin\theta - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta + \binom{n}{5}\cos^{n-5}\theta\sin^5\theta - \cdots\right),
\end{aligned}$$

en resulta

$$\begin{aligned}
\cos(n\theta) &= \binom{n}{0}\cos^n\theta - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta - \cdots \\
\sin(n\theta) &= \binom{n}{1}\cos^{n-1}\theta\sin\theta - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta + \binom{n}{5}\cos^{n-5}\theta\sin^5\theta \cdots - .
\end{aligned}$$

Exemple 10 *Resolució de l'equació* $\cos 4\theta = 6\cos^2\theta - 2$.

Expressem $\cos 4\theta$ en funció de $\cos\theta$:

$$\begin{aligned}
\cos 4\theta &= \binom{4}{0}\cos^4\theta - \binom{4}{2}\cos^2\theta\sin^2\theta + \binom{4}{4}\sin^4\theta = \cos^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta = \\
&= \cos^4\theta - 6\cos^2\theta + 6\cos^4\theta + 1 + \cos^4\theta - 2\cos^2\theta = \\
&= 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1
\end{aligned}$$

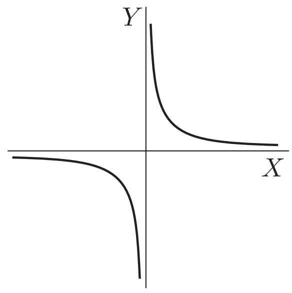
Llavors, resolem l'equació transformada:

$$\begin{aligned}
8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1 = 6\cos^2\theta - 2 \iff 8\cos^4\theta - 14\cos^2\theta + 3 = 0 \iff \\
\iff \cos^2\theta = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{8} = \frac{7\pm 5}{8} = \begin{cases} \dfrac{3}{2} \\[4pt] \dfrac{1}{4} \end{cases}
\end{aligned}$$

És a dir que $\cos\theta = \pm\frac{1}{2}$ i, per tant, $\theta = \begin{cases} 60^\circ + n\cdot 180^\circ \\ 150^\circ + n\cdot 180^\circ. \end{cases}$

6 Exercicis resolts

Exercici 1 *Representeu gràficament els afixos dels nombres complexos z tals que $z^2 - \bar{z}^2 = 4i$.*

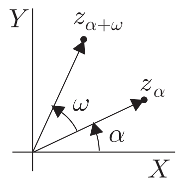


$$\begin{aligned} z = x + yi &\iff (x+yi)^2 - (x-yi)^2 = 4i \iff \\ &\iff x^2 - y^2 + 2xyi - (x^2 - y^2 - 2xyi) = 4i \iff \\ &\iff 4xyi = 4i \iff \\ &\iff y = \frac{1}{x} \quad \text{és una hipèrbola equilàtera} \end{aligned}$$

Exercici 2 *Calculeu i^{327} de dues maneres.*

$$\begin{aligned} i^{327} &= (1_{90^\circ})^{327} = \left(1^{327}\right)_{29430^\circ} = 1_{360^\circ \cdot 81 + 270^\circ} = 1_{270^\circ} = \cos 270^\circ + i \sin 270^\circ = -i. \\ i^{327} &= i^{4 \cdot 81^\circ + 3} = \left(i^4\right)^{81} \cdot i^3 = 1^{81} \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i. \end{aligned}$$

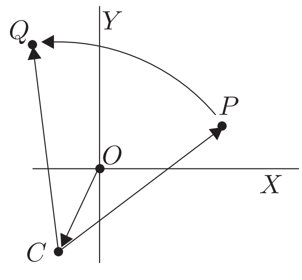
Exercici 3 *Interpreteu geomètricament el producte $z_\alpha \cdot 1_\omega$.*



Si operem $z_\alpha \cdot 1_\omega = (z \cdot 1)_{\alpha+\omega} = z_{\alpha+\omega}$, observem que l'afix de z_α s'ha transformat en el punt que resulta d'aplicar-li un gir de centre $(0,0)$ i angle ω.

Exercici 4 *Trobeu les coordenades del punt Q que resulta de girar el punt $P(3,1)$ un angle de 60° amb centre $C(-1,-2)$.*

$$\begin{aligned} Q &= C + CQ = C + \mathrm{Gir}_{60^\circ}(CP) = \\ &= -1 - 2i + [(3+i) - (-1-2i)] \cdot 1_{60^\circ} = \\ &= -1 - 2i + (4+3i)(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) = \\ &= -1 - 2i + (4+3i)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i\right) = \\ &= -1 - 2i + \left(\frac{4 - 3\sqrt{3}}{2} + \frac{3 + 4\sqrt{3}}{2}\, i\right) = \\ &= \frac{2 - 3\sqrt{3}}{2} + \frac{-1 + 4\sqrt{3}}{2}\, i \end{aligned}$$



Exercici 5 *Resoleu l'equació $z^3 + 1 - i = 0$.*

$$z^3 = -1+i \iff z = \sqrt[3]{-1+i} \iff$$

$$\iff z = \sqrt[3]{\left(\sqrt{2}\right)_{135^\circ}} = \begin{cases} \left(\sqrt[6]{2}\right)_{45^\circ} = \dfrac{\sqrt[3]{4}}{2} + \dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}\, i \\ \left(\sqrt[6]{2}\right)_{165^\circ} = \sqrt[6]{2}(\cos 165^\circ + i \sin 165^\circ) \\ \left(\sqrt[6]{2}\right)_{285^\circ} = \sqrt[6]{2}(\cos 285^\circ + i \sin 285^\circ) \end{cases}$$

Exercici 6 *Calculeu el valor del nombre* $z = \dfrac{a-9i}{4-ai}$ *si sabem que és real.*

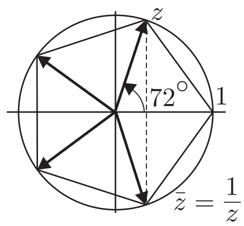
$$\frac{a-9i}{4-ai} = \frac{a-9i}{4-ai} \cdot \frac{4+ai}{4+ai} = \frac{13a + (a^2-36)i}{16+a^2} \in \mathbb{R} \iff a^2 - 36 = 0 \iff a = \pm 6 \implies$$

$$\implies \frac{a-9i}{4-ai} = \frac{13a + (a^2-36)i}{16+a^2} = \begin{cases} \dfrac{78}{52} = \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{-78}{52} = \dfrac{-3}{2} \end{cases}$$

Exercici 7 *Calculeu* $\cos 72^\circ$ *tenint en compte que és igual a la part real d'una de les arrels cinquenes de la unitat diferents de* $z = 1$.

Les arrels cinquenes de la unitat satisfan l'equació $z^5 - 1 = 0$. Per tant $|z| = 1$ i es compleix

$$\begin{aligned} |z| = 1 &\iff |z|^2 = 1 \iff z \cdot \bar{z} = 1 \iff \bar{z} = \frac{1}{z}. \\ z^5 = 1 &\iff 0 = z^5 - 1 = (z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + 1) \iff \\ &\iff z = 1 \quad \text{o bé} \quad z^4 + z^3 + z^2 + 1 = 0. \end{aligned} \tag{14}$$



Manipulem l'última equació per tal de trobar $\cos 72^\circ$, tenint en compte que una solució ha de ser $z = 1_{72^\circ}$ i que ha de complir

$$\cos 72^\circ = \mathrm{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right),$$

Primer dividim l'equació (14) per z^2 i després completem quadrats:

$$z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0 \iff \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + z + \frac{1}{z} - 1 = 0 \iff$$

$$\iff z + \frac{1}{z} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}. \end{cases}$$

Finalment, observem que la solució 1_{72° ha de tenir la part real positiva i s'obté,

$$\cos 72^\circ = \mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Exercici 8 *Utilitzeu el desenvolupament de* $(1+i)^n$ *per calcular les sumes*

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-\cdots \qquad i \qquad \binom{n}{1}-\binom{n}{3}+\binom{n}{5}-\cdots$$

Primerament observem que $(1+i)=\left(\sqrt{2}\right)_{\frac{\pi}{4}}$ i, per tant, $(1+i)^n$ es pot expressar de les dues maneres següents:

$$\begin{aligned}
(1+i)^n &= \binom{n}{0}+\binom{n}{1}i+\binom{n}{2}i^2+\binom{n}{3}+\binom{n}{4}i^4+\binom{n}{5}i^5+\cdots= \\
&= \left[\binom{n}{0}-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-\cdots\right]+\left[\binom{n}{1}-\binom{n}{3}+\binom{n}{5}-\cdots\right]i. \\
(1+i)^n &= \left(\sqrt{2}\right)^n\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^n=\left(\sqrt{2}\right)^n\left(\cos\left(n\,\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(n\,\frac{\pi}{4}\right)\right)
\end{aligned}$$

Consegüentment,

$$\begin{aligned}
\binom{n}{0}-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-\cdots &= \left(\sqrt{2}\right)^n\cos\left(n\,\frac{\pi}{4}\right) \\
\binom{n}{1}-\binom{n}{3}+\binom{n}{5}-\cdots &= \left(\sqrt{2}\right)^n\sin\left(n\,\frac{\pi}{4}\right).
\end{aligned}$$

Índex