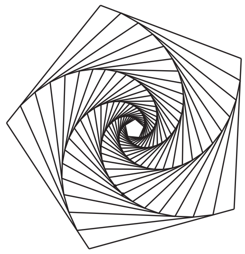
El nombre irracional. Radicals

RAMON NOLLA
Departament de Matemàtiques
IES Pons d'Icart



1 Introducció

El teorema de Pitàgoras podria ser un dels responsables d'una situació incòmoda en la geometria. Fins un determinat moment en el nostre estudi del nombre creiem, —tal com també creien els antics pitagòrics (VI aC)—, que amb els nombres enters i les seves raons o proporcions —les quals identifiquem amb els nombres racionals—, en teníem prou per mesurar qualsevol magnitud. Però els mateixos pitagòrics van descobrir que això era fals, i sembla que ho feren a partir d'aquest teorema. Així, els pitagòrics creien que els nombres enters positius i les seves raons ho regien tot. Proporcionaven la mesura de totes les coses, tan en el món material com en el món espiritual. Aristòtil (IV aC) ho explica en el llibre A de la *Metafísica*, 985 b:

> A l'època d'aquests [els filòsofs atomistes] i abans que ells, els anomenats pitagòrics es dedicaren a les matemàtiques i foren els primers en fer-les progressar; absorts en el seu estudi van creure que els seus principis ho eren de totes les coses. I com que els nombres són per naturalesa els primers d'aquests principis, i en els nombres creien contemplar moltes semblances amb els éssers existents i amb els que estan en formació —més que en el foc, la terra, o l'aigua (essent tal modificació dels nombres la justícia, tal altra l'ànima i la raó, una altre l'oportunitat, i quasi bé de manera semblant totes les altres coses)—; i com que veien que els atributs i les relacions de les escales musicals eren expressables en nombres, i semblava que totes les altres coses estaven constituïdes de manera similar, en tota la seva naturalesa, als nombres, i aquests semblaven ser els primers de tota la naturalesa, van suposar que els elements dels nombres eren els elements de tots els éssers existents, i que els cels tots eren harmonia i nombre.

La crisi que provocà el descobriment que això no era exactament així, fou tan gran que ho guardaren en secret. Tan greu fou la situació que, segons una de les versions[1] d'una anècdota molt citada, Hipas de Metapontum fou expulsat de l'escola pitagòrica i ofegat en el mar per haver-ho divulgat. Les conseqüències en el terreny de la geometria es poden intuir.[2]

2 Els orígens del nombre irracional

Per mirar d'entendre com s'origina el nombre irracional intentarem de trobar una proporció entre nombres enters que ens informi de la relació entre les mesures del costat OA i la diagonal OB

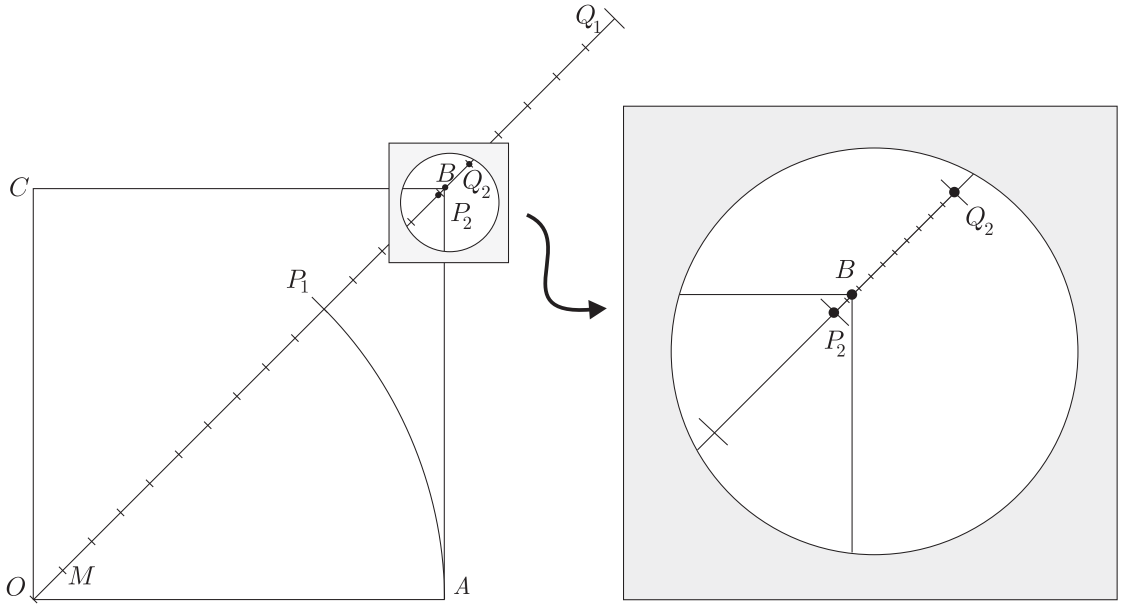
[1] Iàmblic a *De vita Pythagorae*.

[2] Plantegeu-vos de quina manera calcularíeu l'àrea exacta d'un rectangle si no podeu mesurar amb la mateixa unitat de longitud els seus costats.

d'un quadrat. Ho farem provant de mesurar la diagonal i el costat del quadrat amb una mateixa unitat de mesura i veurem que això ens abocarà a un procés d'un nombre infinit d'etapes que impedeix trobar la proporció entre aquests segments.
Comencem amb la tria d'una unitat de mesura, per exemple el costat OA. Llavors, $OA = 1$ i si apliquem el teorema de Pitàgoras

$$OB^2 = OA^2 + OA^2 = 2\,OA^2 = 2 \cdot 1^2 = 2 \Longrightarrow 1 = OP_1 < OB < OQ_1 = 2,$$

en què P_1 i Q_1, —vegeu el gràfic—, són els punts que proporcionen les mesures 1 i 2 a partir del punt O sobre la recta suport de la diagonal OA.



Ens trobem amb que el segment OB no queda mesurat per la unitat de mesura OA. En una situació com aquesta, el que fem és triar una unitat de mesura més petita.[3] Considerem la unitat de mesura $\frac{OA}{10}$. Aconseguim la mesura entera $OA = 10$ i per a OB obtenim

$$OB = \sqrt{OA^2 + OA^2} = \sqrt{2\,OA^2} = 10\sqrt{2} \approx 1.4142\ldots \Longrightarrow 14 < OB < 15.$$

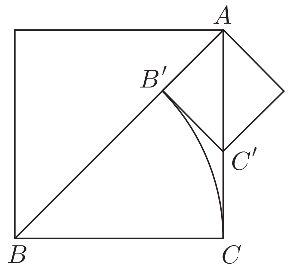
En no aconseguir una mesura entera de OB seguim dividint les successives unitats en 10 parts, $\frac{OA}{100}$, $\frac{OA}{1000}$, ... Obtenim la següent taula de resultats:

Unitat de mesura	mesura de OA	OB^2	$= OA^2 + OA^2$ $= 2\,OA^2$	mesura de $OB = \sqrt{2\,OA^2} = OA\sqrt{2}$
OA	1	$2 \cdot 1^2$	$= 2$	$1 = OP_1 < OB < OQ_1 = 2$
$\frac{OA}{10}$	10	$2 \cdot 10^2$	$= 200$	$14 = OP_2 < OB < OQ_2 = 15$
$\frac{OA}{100}$	100	$2 \cdot 100^2$	$= 20000$	$141 = OP_3 < OB < OQ_3 = 142$
$\frac{OA}{1000}$	1000	$2 \cdot 1000^2$	$= 2000000$	$1414 = OP_4 < OB < OQ_4 = 1415$
$\frac{OA}{10000}$	10000	$2 \cdot 10000^2$	$= 200000000$	$14142 = OP_4 < OB < OQ_4 = 14143$
...	...	...		...

[3]Per exemple, quan volem mesurar en metres una distància. Si no dóna un resultat enter, passem a mesurar en decímetres, centímetres, etc, fins que obtenim un nombre enter d'aquestes unitats.

Observem a la taula que no aconseguim mesurar OB amb un nombre enter. Això vol dir que no existeix una unitat comuna de mesura? Es podria pensar que si dividíssim la unitat inicial en un nombre diferent de parts que 10^n, o bé si triéssim una unitat diferent de sortida la cosa podria funcionar. La realitat és que no funciona, i els pitagòrics sembla que se'n convenceren perquè els seus intents els abocaven a processos del tot semblants al que hem presentat. La recerca de la unitat de mesura els implicava en processos d'infinitat d'etapes. Aquest punt era inacceptable per a ells, els processos havien de començar i acabar i això era impossible a no ser que el nombre de passos fos finit.
Presentem un procés que hagués pogut ser pitagòric.[4] Suposem que existeix un segment $\bar{s}$ que mesura la diagonal AB i el costat BC d'un quadrat.

Llavors $\bar{s}$ mesura el costat AC i el segment diferència $AB' = AB - BB' = AB - BC$, en què B' és la intersecció de la circumferència (B, BC) amb la diagonal AB. Si construïm el quadrat de costat AB', és evident que $AB' = B'C' = CC'$, la qual cosa implica que el segment $\bar{s}$ mesura AB' i la diferència $AC' = AC - CC' = AC - AB'$.



En definitiva, en el cas d'existir la unitat comuna de mesura $\bar{s}$ del costat i la diagonal d'un quadrat, aquesta també mesuraria la diagonal i el costat d'un altre quadrat més petit. Aquest procés es podria repetir tantes vegades com es volgués, no tindria final, la qual cosa implica que no arribaríem a determinar la unitat de la qual s'ha suposat l'existència. Però, per als grecs, l'existència de $\bar{s}$ s'ha d'establir a partir de la seva construcció en un nombre finit de passos. En no haver-ho aconseguit, l'interrogant de l'existència de $\bar{s}$ segueix en peu, encara que han aparegut indicis prou grans a favor de la resposta negativa. Està clar que si es pogués establir que el costat del quadrat es fa tan petit com es vulgui, en particular més petit que $\bar{s}$, obtindríem una contradicció. Aquesta és l'alternativa d'Èudox (IV aC), que Euclides (300 aC) desenvolupa en el teoremes X.1 i X.2 dels *Elements*, encara que cal justificar-la amb la introducció del postulat, atribuït a Èudox, anomenat d'Arquimedes (III aC) que Euclides presenta sota la forma de la definició V.4 en els seus *Elements*.[5]
Aristòtil, defugint aquests arguments sobre la impossibilitat d'una execució infinita amb principi i final, trobà un argument indirecte per demostrar de manera definitiva la no existència d'una proporció d'enters que definís la relació entre aquests dos segments.[6]

L'argument d'Aristòtil, presentat a la nota 6, en un llenguatge més entenedor va així:

> Suposem que la diagonal OB i el costat OA fossin commensurables. Això vol dir que la raó entre OB i OA, la qual nosaltres presentem pel teorema de Pitàgoras com a $\frac{OB}{OA} = \frac{\sqrt{2\,OA^2}}{OA} = \sqrt{2}$, pot ser expressada com una relació o raó entre enters, és a dir,

[4]Extret de NOLLA R. [2006] *Estudis i activitats sobre problemes clau de la història de la matemàtica*, 19-20. Publicacions de la SCM. Institut d'Estudis Catalans.

Aquest text es pot descarregar des de `http://www.xtec.net/~rnolla/EstActPCHM.htm`.

[5]Postulat d'Arquimedes: Donades dues magnituds del mateix tipus (per exemple, nombres reals positius) no nul·les, sempre es pot trobar un múltiple de la més petita que superi la gran.

[6]Els grecs anomenaren incommensurables els segments amb aquesta propietat. L'argumentació d'Aristòtil, per demostrar la incommesurabilitat d'aquests dos segments en la seva obra *Primers analítics* I. 23. 41a., és bastant obscura i diu:

> Tots els raonaments que arriben a una conclusió mitjançant el que és impossible proven el que és fals, i la proposició del principi la demostren, per hipòtesi, quan resulta alguna cosa falsa des de l'assumpció de la contradicció; com, per exemple, que la diagonal és incommensurable es prova perquè el que és senar es fa igual al parell, en suposar que sigui commensurable.

com una fracció racional. O sigui que $\sqrt{2} = p/q$ en què p i q són naturals. A més, podem suposar que p i q no tenen divisors comuns.[7] Llavors, en ser

$$\frac{p^2}{q^2} = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2\,,\ \text{tenim } p^2 = 2q^2.$$

Per tant, p^2 és parell i, consegüentment, p és parell. Llavors **q és senar**, en no tenir cap divisor comú amb p. D'altra banda, en ser p parell, $2q^2 = p^2$ és múltiple de 4, és a dir q^2 és parell i, per tant, **q és parell**. Llavors, **q és senar i parell** i com diu Aristòtil, ≪el senar es fa igual al parell≫, però això és contradictori. Per tant, el punt de partida és fals i la diagonal és incommensurable amb el costat. És a dir que $\sqrt{2}$ no es pot expressar com una fracció racional.

Els intents de trobar la manera d'explicar aquesta situació va fer evolucionar molt la manera d'entendre la matemàtica, els seus objectes i els seus mètodes. Tan gran ha sigut aquesta evolució, que actualment no tenim cap objecció al fet d'acceptar l'existència de nombres que no es poden expressar com a raó, relació o fracció d'enters. Els anomenem *nombres irracionals* i en tenim un exemple en $\sqrt{2}$. En el llenguatge decimal es caracteritzen per tenir un nombre infinit de xifres decimals que no es repeteixen de manera periòdica. Això implica que la seva representació decimal només es pot fer de manera aproximada.

3 Radicals

La notació que s'utilitza per presentar els nombres que tenen el seu quadrat igual a un nombre a és $\sqrt{a}$, rep el nom de *radical* i es llegeix *arrel quadrada d'a*. Des d'un altre punt de vista, l'operació d'extreure l'arrel quadrada és la inversa de l'operació d'elevar al quadrat, és a dir:

$$\sqrt{a} = x \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 = a.$$

Per exemple, si treballem amb nombres positius:

$$\sqrt{9} = 3 \Longleftrightarrow 3^2 = 9, \quad \sqrt{2} \approx 1.4142 \Longleftrightarrow 1.4142^2 \approx 2, \quad \sqrt{441} = 21 \Longleftrightarrow 21^2 = 441.$$

Més general encara, és la definició següent, la qual fa referència no tan sols a la inversa de l'operació d'elevar al quadrat, sinó a l'operació inversa de qualsevol potència d'exponent natural: Anomenem *arrel d'índex n* d'un nombre a i la representem amb la notació $\sqrt[n]{a}$, el nombre x tal que $x^n = a$. És a dir,

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = x \Longleftrightarrow x^n = a}\,.$$

Exemples:

$$\sqrt[3]{0.125} = 0.5 \Longleftrightarrow 0.5^3 = 0.125, \quad \sqrt[4]{16} = 2 \Longleftrightarrow 2^4 = 16, \quad \sqrt[6]{27} \approx 1.73205 \Longleftrightarrow 1.73205^6 \approx 27.$$

Existeixen altres tipus de nombres irracionals que no estudiem. Un dels més coneguts és el nombre π que defineix la relació o raó entre la longitud de la circumferència i el seu diàmetre.

[7] Això es justifica pel fet que si en tinguessin només caldria dividir-los pel seu màxim comú divisor per eliminar els factors comuns.

4 Propietats de les operacions amb radicals

Una de les primeres qüestions que es plantegen és la de cercar quines propietats faciliten el càlcul amb radicals. Presentem i demostrem les propietats que es poden utilitzar en les operacions amb radicals. Les estratègies de les demostracions passen, en la majoria de casos, per convertir una part de les expressions al llenguatge més conegut de les potències. (Centrem l'estudi en el camp dels nombres positius.)

1. $\boxed{\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}}$

Demostració:

$$\left\{\begin{matrix}\sqrt[n]{a}=x\\ \sqrt[n]{b}=y\end{matrix}\underset{(1)}{\Longleftrightarrow}\begin{matrix}a=x^n\\ b=y^n\end{matrix}\right\}\Longrightarrow \sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{x^n\cdot y^n}\underset{(2)}{=}\sqrt[n]{(x\cdot y)^n}\underset{(3)}{=}x\cdot y=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\,.$$

(1) i (3) Per la definició d'arrel enèsima.
(2) Per la regla de multiplicació de potències d'exponent igual.

2. $\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}}$

Demostració:

$$\left\{\begin{matrix}\sqrt[n]{a}=x\\ \sqrt[n]{b}=y\end{matrix}\underset{(1)}{\Longleftrightarrow}\begin{matrix}a=x^n\\ b=y^n\end{matrix}\right\}\Longrightarrow \sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\sqrt[n]{\frac{x^n}{y^n}}\underset{(2)}{=}\sqrt[n]{\left(\frac{x}{y}\right)^n}\underset{(3)}{=}\frac{x}{y}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\,.$$

(1) i (3) Per la definició d'arrel enèsima.
(2) Per la regla de divisió de potències d'exponent igual.

3. $\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^k=\sqrt[n]{a^k}}$

Demostració:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k=\underbrace{\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{a}\cdots\sqrt[n]{a}}_{k\text{ factors}}\underset{(1)}{=}\sqrt[n]{\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdots a}_{k\text{ factors}}}=\sqrt[n]{a^k}.$$

(1) Per la propietat número **1**.

4. $\boxed{\sqrt[n\cdot p]{a^{k\cdot p}}=\sqrt[n]{a^k}}$

Demostració:

$$\left\{\sqrt[n]{a^k}=x\underset{(1)}{\Longleftrightarrow}a^k=x^n\right\}\Longrightarrow\sqrt[n\cdot p]{a^{k\cdot p}}\underset{(2)}{=}\sqrt[n\cdot p]{(a^k)^p}=\sqrt[n\cdot p]{(x^n)^p}=$$
$$=\sqrt[n\cdot p]{x^{n\cdot p}}=x=\sqrt[n]{a^k}\,.$$

(1) Per la definició d'arrel enèsima.
(2) Per la regla d'operació de la potència d'una potència.

5. $\boxed{\sqrt[n\cdot p]{a}=\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}}$

Demostració:

$$\left\{\sqrt[p]{a}=x\underset{(1)}{\Longleftrightarrow}x^p=a\right\}\Longrightarrow\sqrt[n\cdot p]{a}=\sqrt[n\cdot p]{x^p}\underset{(2)}{=}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}$$

(1) Per la definició d'arrel enèsima.
(2) Per la propietat número **4**.

6. $\boxed{\begin{array}{c} n = d\cdot q + r \\ 0 \le r < d \end{array} \Longrightarrow \sqrt[d]{a^n} = a^q \cdot \sqrt[d]{a^r}}$

Demostració:

$$\sqrt[d]{a^n} \;=\; \sqrt[d]{a^{d\cdot q+r}} \underset{(1)}{=} \sqrt[d]{a^{q\cdot d}\cdot a^r} \underset{(2)}{=} \sqrt[d]{a^{q\cdot d}}\cdot \sqrt[d]{a^r} \underset{(3)}{=} a^q \cdot \sqrt[d]{a^r}$$

(1) Per la regla de multiplicació de potències de mateixa base.
(2) Per la propietat número **1**.
(3) Per la propietat número **4**.

5 Exemples

Exemple 1 *Aplicació de la propietat* **1***, a la simplificació de* $\sqrt[3]{25}\cdot\sqrt[3]{40}$.

Resolució ràpida: $\sqrt[3]{25}\cdot\sqrt[3]{40} \underset{(\mathbf{1})}{=} \sqrt[3]{25\cdot 40} = \sqrt[3]{1000} = \sqrt[3]{10^3} = 10.$

Resolució factorial: $\sqrt[3]{25}\cdot\sqrt[3]{40} \underset{(\mathbf{1})}{=} \sqrt[3]{25\cdot 40} = \sqrt[3]{5^2\cdot 2^3\cdot 5} = \sqrt[3]{5^3\cdot 2^3} = \sqrt[3]{(5\cdot 2)^3} = 5\cdot 2 = 10.$

Exemple 2 *Aplicació de les propietats* **1** *i* **4***, a la simplificació de* $\sqrt[12]{x^7}\cdot\sqrt[20]{x^3}$.

L'estratègia consistirà en transformar els radicals en una altres d'equivalents i índex igual per tal de poder aplicar la propietat **1**. Per aconseguir-ho, utilitzem la propietat **4**. Aquesta ens permet trobar radicals equivalents tals que el seu índex és múltiple de l'índex inicial. És a dir, hem de trobar múltiples comuns dels índexs i, més concretament, cercarem el mínim comú múltiple dels índexs implicats. En el nostre cas l'índex amb el que interessa treballar és m.c.m$(12, 20) = 60$.

$$\sqrt[12]{x^7}\cdot\sqrt[20]{x^3} \underset{(\mathbf{4})}{=} \sqrt[60]{x^{35}}\cdot\sqrt[60]{x^9} \underset{(\mathbf{1})}{=} \sqrt[60]{x^{35}\cdot x^9} = \sqrt[60]{x^{44}} \underset{(\mathbf{4})}{=} \sqrt[15]{x^{11}}\,.$$

Exemple 3 *Aplicació de la propietat* **6** *a l'extracció de factors de* $\sqrt[7]{256\,x^{100}\,y^{14}}$.

Observem que $\left\{\begin{array}{l} 256 = 2^8 = 2^{1\cdot 7+1} \\ x = 100 = x^{14\cdot 7+2} \\ y^{14} = y^{2\cdot 7}. \end{array}\right.$

Per tant, $\sqrt[7]{256\,x^{100}\,y^{14}} \;=\; 2\,x^{14}\,y^2\,\sqrt[7]{2\,x^2}.$

Exemple 4 *Aplicació de les propietats* **1***,* **2***,* **4** *i* **6** *a la simplificació de* $\dfrac{\sqrt[9]{a^8}\cdot\sqrt[6]{a^5}}{\sqrt[15]{a^2}}$.

Si tenim en compte que m.c.m$(9, 6, 15) = 90$, obtenim

$$\frac{\sqrt[9]{a^8}\cdot\sqrt[6]{a^5}}{\sqrt[15]{a^2}} \underset{(\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{4})}{=} \sqrt[90]{\frac{a^{80}\cdot a^{75}}{a^{12}}} = \sqrt[90]{\frac{a^{155}}{a^{12}}} = \sqrt[90]{a^{143}} \underset{(\mathbf{6})}{=} a\,\sqrt[90]{a^{53}}\,.$$

Exemple 5 *Aplicació de les propietats a la simplificació de* $\dfrac{\sqrt[4]{128\,x^{101}\,y^3}\cdot\sqrt[6]{x^5\,\sqrt{27\,x\,y^{43}}}}{\sqrt[3]{36\,(x\,y)^{50}}}$.

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt[4]{128\,x^{101}\,y^3}\cdot\sqrt[6]{x^5\,\sqrt{27\,x\,y^{43}}}}{\sqrt[3]{36\,(x\,y)^{50}}} &= \sqrt[12]{\frac{\left(2^7\right)^3\,x^{303}\,y^9\,x^{10}\,3^3\,x\,y^{43}}{\left(2^2\right)^4\,\left(3^2\right)^4\,x^{200}\,y^{200}}} = \\ &= \sqrt[12]{2^{21-8}\,3^{3-8}\,x^{303+10+1-200}\,y^{9+43-200}} = \sqrt[12]{\frac{2^{13}\,x^{114}}{3^5\,y^{148}}} = \\ &= \frac{2\,x^9}{y^{12}}\,\sqrt[12]{\frac{2\,x^6}{3^5\,y^4}}\,.\end{aligned}$$

6 Altres qüestions

6.1 Suma i diferència de radicals

Cal observar que la suma de radicals no comparteix la propietat del producte i la divisió de radicals. En general, tenim

$$\boxed{\sqrt[n]{a+b}\neq\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}\,.$$

Per comprovar que això és cert, només cal fer-ho sobre algun exemple. Així tenim,

$$\begin{aligned}\sqrt{16}+\sqrt{49}=4+7=11\neq\sqrt{65}=\sqrt{49+16}\\ \sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{27}=2+3=5\neq\sqrt[3]{35}=\sqrt[3]{8+27}.\end{aligned}$$

No és difícil comprovar, en el cas $n=2$, que

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b}\Longleftrightarrow a=0 \text{ o } b=0.$$

Quan treballem amb sumes o diferències de radicals, una de les possibles actuacions per a la seva simplificació passa per aplicar la propietat distributiva, mitjançant la recerca de factors comuns. Així, en general:

$$\boxed{\sqrt[n]{b^n\cdot a}\pm\sqrt[n]{c^n\cdot a}=(b\pm c)\cdot\sqrt[n]{a}}\,.$$

Exemple 6 *Aplicació a la simplificació de* $\dfrac{\sqrt{27}-\sqrt{12}}{\sqrt{6}}$.

$$\frac{\sqrt{27}-\sqrt{12}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3^2\cdot 3}-\sqrt{2^2\cdot 3}}{\sqrt{2}\,\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{3}}{\sqrt{2}\,\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\,\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

6.2 Racionalització

En algunes ocasions pot ser convenient per raons de càlcul, presentar les fraccions amb radicals de manera que aquests no apareguin en el denominador. El procés seguit per aconseguir-ho rep el nom de *racionalització*. Estudiem dos casos que ens orientaran en la resolució de les situacions que es presentin en el curs:

Cas 1:

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^k}}=\frac{a}{\sqrt[n]{b^k}}\cdot\frac{\sqrt[n]{b^{n-k}}}{\sqrt[n]{b^{n-k}}}=\frac{a\,\sqrt[n]{b^{n-k}}}{\sqrt[n]{b^n}}=\frac{a\,\sqrt[n]{b^{n-k}}}{b}\,.$$

Cas 2:

$$\frac{a}{b+\sqrt{c}}=\frac{a}{b+\sqrt{c}}\cdot\frac{b-\sqrt{c}}{b-\sqrt{c}}=\frac{a\,(b-\sqrt{c})}{b^2-c}$$

Exemple 7 *Racionalització de* $\dfrac{a}{\sqrt[5]{a}\,\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}$.

$$\frac{a}{\sqrt[5]{a}\,\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)} = \frac{a}{\sqrt[5]{a}\,\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}\cdot\frac{\sqrt[5]{a^4}\,\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{\sqrt[5]{a^4}\,\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)} = \frac{a\,\sqrt[5]{a^4}\,\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{a\,(5-2)} = \frac{\sqrt[5]{a^4}\,\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{3}\,.$$

Exemple 8 *Simplificació de* $\dfrac{\left(1+\sqrt{2}\right)^2-\left(1-\sqrt{2}\right)^2}{\sqrt{96}}$.

$$\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^2-\left(1-\sqrt{2}\right)^2}{\sqrt{96}} = \frac{3+2\sqrt{2}-3+2\sqrt{2}}{4\,\sqrt{6}} = \frac{4\sqrt{2}}{4\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{12}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}\,.$$

7 Potències d'exponent fraccionari

Observarem les operacions que realitzem amb els exponents i els índexs de les expressions radicals, quan multipliquem radicals de diferent índex. Veurem que són les mateixes que es realitzen quan sumem fraccions. Això permetrà que introduïm una nova notació en la presentació de radicals, en què s'utilitzaran exponents fraccionaris.
Estudiem el producte següent:

$$\sqrt[12]{x^7}\cdot\sqrt[18]{x^5}.$$

En ser m.c.m$(12,18)=36$, l'expressió detallada de les operacions que realitzem és

$$\sqrt[12]{x^7}\cdot\sqrt[18]{x^5} = \sqrt[36]{x^{\frac{36}{12}\cdot 7+\frac{36}{18}\cdot 5}} = \sqrt[36]{x^{31}}.$$

És fàcil observar que les operacions que fem per trobar l'índex del radical i l'exponent de la x són les mateixes que fem quan sumem les fraccions $\frac{7}{12}$ i $\frac{5}{18}$. Efectivament,

$$\text{m.c.m}(12,18)=36 \quad\Longrightarrow\quad \frac{7}{12}+\frac{5}{18}=\frac{\frac{36}{12}\cdot 7+\frac{36}{18}\cdot 5}{36}=\frac{31}{36}\,.$$

Això suggereix la introducció d'una nova presentació per als radicals utilitzant exponents fraccionaris. Siguin $p,q\in\mathbb{Z}$ i $q>0$, definim

$$\boxed{a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}}\,.$$

- Una altra manera de trobar-li un significat a l'expressió $a^{\frac{p}{q}}$ seria a partir de la qüestió

Trobeu un nombre x tal que $a^x=\sqrt[q]{a^p}$

Per trobar x ens desfem de les notacions més complexes aplicant la definició d'arrel, és a dir,

$$a^x=\sqrt[q]{a^p}\iff (a^x)^q=a^p\iff a^{x\cdot q}=a^p\iff x\cdot q=p\iff x=\frac{p}{q}\,.$$

Aquesta nova operació de potències amb exponents fraccionaris satisfà totes les propietats de les operacions entre potències d'exponents enters. Una mostra la tenim en el producte estudiat més amunt i en mostrem uns exemples d'aplicació.

Exemple 9 *Simplificació de* $\dfrac{\sqrt{a\,c\,\sqrt[3]{b}}\cdot\sqrt[4]{a^5\,b^2}}{\sqrt[3]{\left(a^2c\right)^5\,b}}$.

$$\frac{\sqrt{a\,c\,\sqrt[3]{b}}\cdot\sqrt[4]{a^5\,b^2}}{\sqrt[3]{\left(a^2\,c\right)^5\,b}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{5}{4}-\frac{10}{3}}\cdot b^{\frac{1}{6}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}\cdot c^{\frac{1}{2}-\frac{5}{3}} = a^{-\frac{19}{12}}\cdot b^{\frac{1}{3}}\cdot c^{-\frac{7}{6}} = \frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[12]{a^{19}}\,\sqrt[6]{c^7}} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[12]{a^{19}}\,\sqrt[6]{c^7}}\cdot\frac{\sqrt[12]{a^5}\,\sqrt[6]{c^5}}{\sqrt[12]{a^5}\,\sqrt[6]{c^5}} = \frac{\sqrt[12]{a^5\,b^4\,c^{10}}}{a^2\,c^2}.$$

Si actuem sense exponents fraccionaris arribem al mateix resultat:

$$\frac{\sqrt{a\,c\,\sqrt[3]{b}}\cdot\sqrt[4]{a^5\,b^2}}{\sqrt[3]{\left(a^2\,c\right)^5\,b}} = \sqrt[12]{\frac{a^6\,c^6\,b^2\,a^{15}\,b^6}{a^{40}\,c^{20}\,b^4}} = \sqrt[12]{\frac{b^4}{a^{19}\,c^{14}}}\cdot\sqrt[12]{\frac{a^5\,c^{10}}{a^5\,c^{10}}} = \frac{\sqrt[12]{a^5\,b^4\,c^{10}}}{a^2\,c^2}.$$

Exemple 10 *Recerca, sense calculadora, dels valors de* $81^{\frac{3}{4}},\ 32^{0.4},\ 2.25^{-\frac{3}{2}}$.

$$\begin{aligned}
81^{\frac{3}{4}} &= \left(3^4\right)^{\frac{3}{4}} = 3^3 = 27.\\
32^{0.4} &= 32^{\frac{4}{10}} = \left(2^5\right)^{\frac{2}{5}} = 2^2 = 4.\\
2.25^{-\frac{3}{2}} &= \left(\frac{225}{100}\right)^{-\frac{3}{2}} = \left(\left(\frac{15}{10}\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}
\end{aligned}$$

8 La relació entre la diagonal i el costat del pentàgon regular

Es tracta d'esbrinar quina és la relació o raó entre la diagonal i el costat del pentàgon regular. Aquest és un dels problemes, junt amb el de la relació entre la diagonal i el costat d'un quadrat, que es conjectura que va provocar el descobriment dels irracionals.
Amb la notació de la figura adjunta es tracta d'esbrinar el valor de AC/AB. Si volem simplificar les notacions, podem considerar AB com a unitat de mesura i, si anomenem $AC = x$, es tracta de trobar el valor de

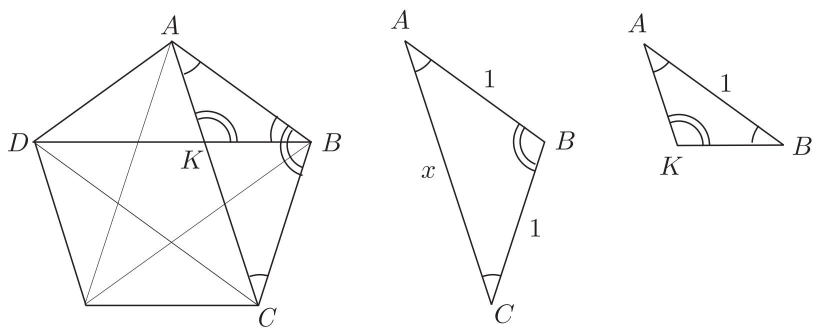
$$\frac{AC}{AB} = \frac{x}{1} = x.$$

• Els triangles $\triangle ABC$ i $\triangle AKB$ són semblants perquè tenen els mateixos angles. Efectivament,
— En ser $AB = BC$, el triangle $\triangle ABC$ és isòsceles. Llavors,

$$\widehat{ABC} = \frac{3\cdot 180^\circ}{5} = 108^\circ \quad \text{i} \quad \widehat{BAC} = \widehat{BCA} = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ.$$

— D'altra banda en el triangle $\triangle AKB$ tenim,

$$\widehat{BAK} = \widehat{BAC} = 36^\circ, \quad \widehat{ABK} = \frac{180^\circ - \widehat{BAD}}{2} = 36^\circ \quad \text{i} \quad \widehat{AKB} = 180^\circ - 2\cdot 36^\circ = 108^\circ.$$



- Un altre fet remarcable és que, en ser $\widehat{BKC} = \widehat{KBC}$, llavors $KC = BC$. Efectivament,

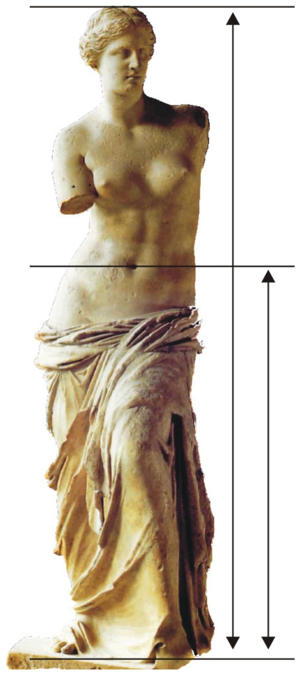
$$\begin{aligned} \widehat{KBC} &= \widehat{ABC} - \widehat{ABK} = 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ \\ \widehat{BKC} &= 180^\circ - \widehat{AKB} = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ \end{aligned}$$

- De tot això obtenim $AC = x,\ KC = BC = AB = 1 \Longrightarrow AK = x - 1$ i, per tant, en ser proporcionals els costats dels triangles $\triangle ABC$ i $\triangle AKB$,

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AK} \Longleftrightarrow \frac{x}{1} = \frac{1}{x-1} \Longleftrightarrow x^2 - x - 1 = 0.$$

Llavors,

$$\begin{aligned} x^2 - x - 1 = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 1 = 0 \Longleftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \\ &\Longleftrightarrow \quad x = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}} \Longleftrightarrow \boxed{\frac{AC}{AB} = x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}. \end{aligned}$$



Aquest nombre es representa amb la lletra Φ (*Phi*) i s'anomena *nombre d'or*. Es conjectura que podria estar en els orígens del descobriment de les magnituds incommensurables (nombres irracionals), i que era un dels secrets ocults en l'estrella pitagòrica constituïda per les cinc diagonals d'un pentàgon regular. Se li atribueix un simbolisme d'equilibri i harmonia. Així, sembla que hi ha molts escultors i arquitectes que l'han tingut com a referència a l'hora d'establir les proporcions de les seves obres. Un exemple el tenim en l'escultura de *Venus* (II aC) descoberta a l'illa de Milo el 1820, en què la relació entre la seva altura i la distància del melic a la planta dels peus és igual a Φ. Tanmateix, hi ha qui defensa que aquesta presa de posició a favor d'aquesta proporció no és certa. Un estudi d'aquesta qüestió, bastant exhaustiu i entenedor, el trobareu a Mario Livio, *La proporción àurea*. Ariel, Barcelona, 2006.

Activitat proposada. Construcció d'un pentàgon regular a partir del seu costat.
Indicació: Observeu que donat el costat a, la diagonal d satisfà

$$\frac{d}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{1}{2} + \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}.$$

Llavors, amb l'ajut del teorema de Pitàgores, es pot construir el pentàgon.

Índex