Pentàgon amb paper plegat

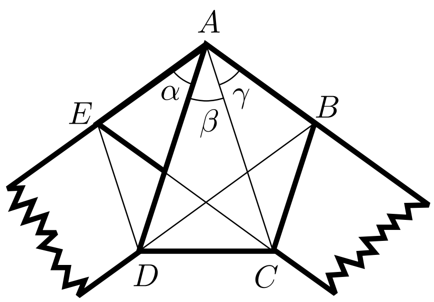
Ramon Nolla
Departament de Matemàtiques
IES Pons d'Icart

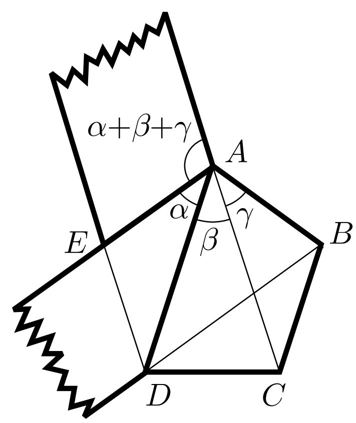
Es tracta de demostrar que el pentàgon que apareix fent un llaç aplanat amb un tira de paper rectangular és regular.

• Totes les línies dels gràfics són plecs o costats de la tireta rectangular inicial. Les gruixudes són visibles i les fines no ho són.

• En el gràfic esquerre anomenem:

$$\angle EAD = \alpha,\ \angle DAC = \beta,\ \angle CAB = \gamma.$$



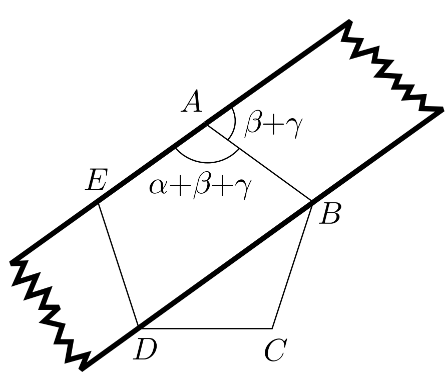


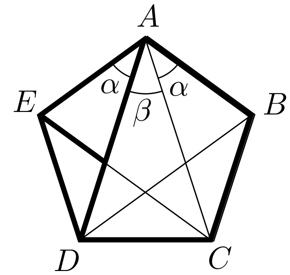
• Si despleguem sobre el costat AE tenim, —gràfic superior dret—,

$$(\alpha + \beta + \gamma) + (\alpha + \beta) = 180°.$$

• Si despleguem sobre el costat AB tenim, —gràfic inferior esquerre en què les línies fines il·lustren el pentàgon inicial—,

$$(\alpha + \beta + \gamma) + (\beta + \gamma) = 180°.$$

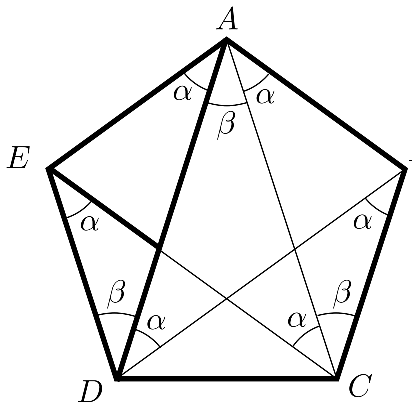


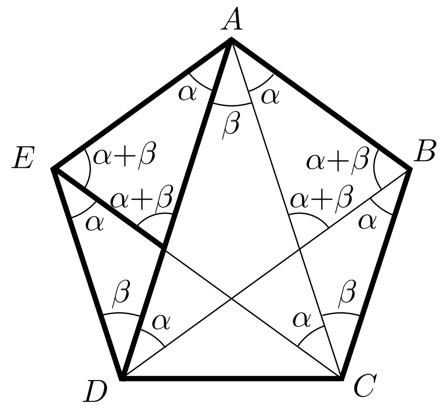


• Llavors, si restem les dues igualtats tenim com s'il·lustra en el gràfic superior dret:

$$\alpha = \gamma.$$

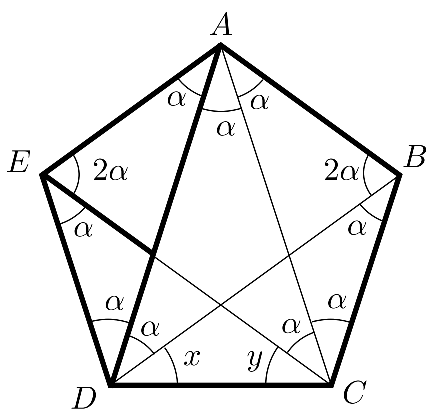
- Per les relacions entre els angles determinats per dues paral·leles i una secant tenim el gràfic inferior esquerre. Pel teorema de l'angle exterior i en ser $3\alpha+2\beta=180°$, —es comprova quan despleguem pel costat AB—, tenim el gràfic inferior dret.

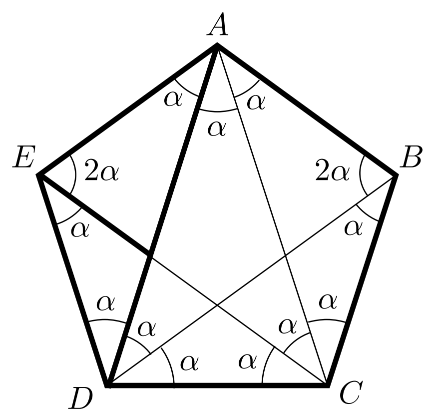




- Es compleix $\triangle ABC \equiv \triangle DEA$. Efectivament, en ser $ABCE$ i $AEDB$ trapezis isòsceles es compleix $ED = AB$ i $AE = BC$. D'altra banda, $\angle DEA = 2\alpha+\beta = \angle ABC$.
La congruència d'aquests triangles implica

$$\alpha = \angle EAD = \angle BCA = \beta.$$





- Finalment, en ser $180° = 3\alpha + 2\beta = 5\alpha$, si despleguem per DC obtenim:

  - en el vèrtex D: $3\alpha + 2x = 180° = 5\alpha \Longrightarrow x = \alpha$.

  - en el vèrtex C: $3\alpha + 2y = 180° = 5\alpha \Longrightarrow y = \alpha$.

- **Conclusions**

Primera conclusió: Tots els angles del pentàgon són iguals a 3α.

Segona conclusió: Els costats són tots iguals, en ser isòsceles tots els triangles determinats per tres vèrtexs consecutius del pentàgon.