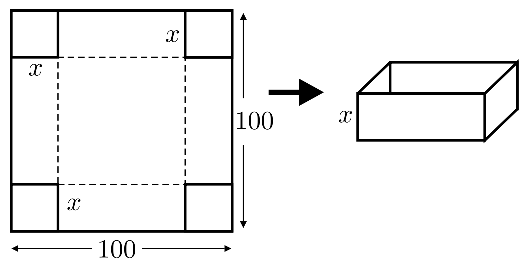
Un problema d'optimització

RAMON NOLLA
Departament de Matemàtiques
IES Pons d'Icart

• Problema de la construcció d'una caixa —ortoedre— de volum màxim a partir d'una cartolina quadrada, sotmès a un tractament algèbric

> Disposem d'una cartolina quadrada de costat 100. Es tracta de construir un ortoedre retallant quadrats de costat x dels seus cantons i plegant per les línies de punts tal com indica la figura, de manera que aquest tingui el volum màxim.



El primer que farem serà trobar una expressió algèbrica per al volum de la caixa en funció de la variable x. Notem que els costats de la base de la caixa mesuren $10 - 2x$ i la seva alçada mesura x. Per tant, si representem amb la notació $V(x)$ el volum de la caixa, obtenim

$$V(x) = (100 - 2x)^2 \cdot x = 4x^3 - 400x^2 + 10000x\,, \text{ en què } 0 < x < 50.$$

A continuació, farem l'estudi en tres etapes,

E1. Cercarem una aproximació del valor màxim de la funció polinòmica que descriu el volum $V(x)$ en funció de x, mitjançant una taula de valors i un esquema gràfic d'aquesta funció.

E2. Per trobar la solució exacta del problema, conjecturarem que el valor màxim ve determinat per un punt del gràfic de la funció $V(x)$ que toca tangencialment a una recta horitzontal. Això ho traduirem, en el llenguatge de l'àlgebra, com trobar l'arrel doble d'un polinomi que resultarà del sistema d'equacions que representa la recta horitzontal i la funció.

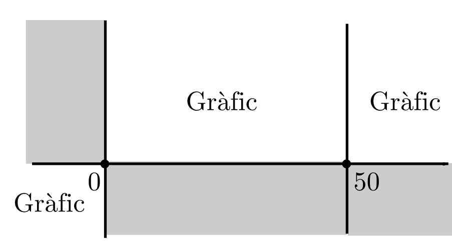
E3. Finalment, provarem algèbricament que el valor trobat és màxim.

• E1. Aproximació del valor màxim. Abans de construir la taula de valors, cerquem les regions del pla que ocuparà el gràfic a partir de l'estudi del signe de $V(x)$.

— $V(x) = 0 \iff (100 - 2x)^2 \cdot x = 0$

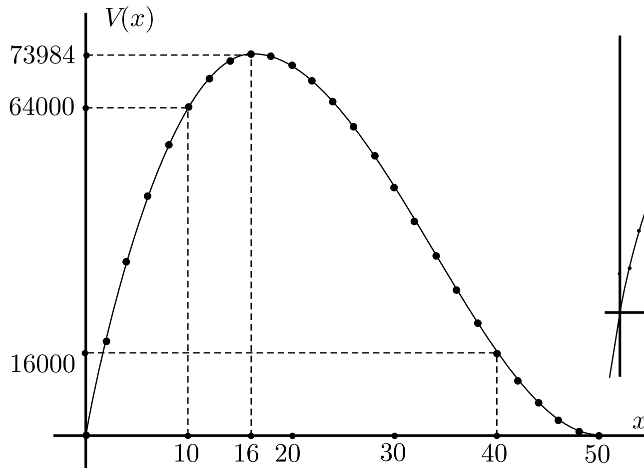
$$\iff \left\{ \begin{array}{c} (100-2x)^2 = 0 \\ \text{o} \\ x = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} x = 50 \\ \text{o} \\ x = 0 \end{array} \right.$$

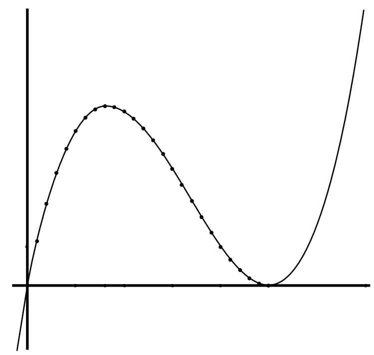
$$\left.\begin{array}{l} \text{— } V(x) > 0 \iff x > 0 \text{ i } x \neq 50 \\ \text{— } V(x) < 0 \iff x < 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{l} \text{perquè} \\ (100-2x)^2 \geq 0 \end{array} \right)$$



Calculem els valors de $V(x)$ per als valors enters de la variable x. En resulta una primera taula i una primera aproximació del gràfic.

x	$V(x)$
0	0
2	18432
4	33856
6	46464
8	56448
10	64000
12	69312
14	**72576**
16	**73984**
18	**73728**
20	72000
22	68992
24	64896
26	59904
28	54208
30	48000
32	41472
34	34816
36	28224
38	21888
40	16000
42	10752
44	6336
46	2944
48	768
50	0





A la taula de l'esquerra i al gràfic superior, observem que el **valor màxim s'obté probablement quan x pertany a l'interval $(\mathbf{14}, \mathbf{18})$**.

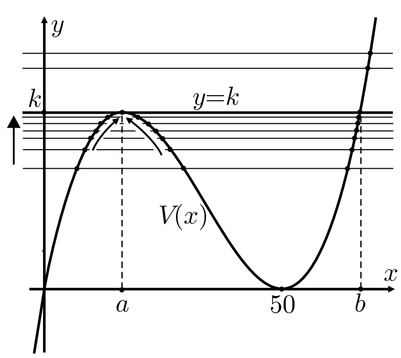
Es podria comprovar que, si cerquem valors de $V(x)$ tals que x sigui exterior a l'interval $[0, 50]$, —els quals no són admissibles en el nostre problema—, i estudiem la tendència de $V(x)$ quan $x \to \pm\infty$ llavors, el gràfic té una forma com el de damunt a la dreta.

A la taula de la dreta hem "afinat" les aproximacions, i si el gràfic de $V(x)$ conserva el seu comportament regular, el **volum màxim s'obtindria per a algun x $\in$ $(\mathbf{16.4}\,,\ \mathbf{16.8})$**

x	$V(x)$
14	72576
14.4	72999.94
14.8	73351.17
15.2	73631.23
15.6	73841.66
16	73984
16.2	74030.11
16.4	**74059.78**
16.6	**74073.18**
16.8	**74070.53**
17	74052
17.2	7401.78
17.6	7390.31
18	73728

• **E2. Recerca algèbrica exacta del valor màxim.** En aquesta etapa utilitzarem una conjectura que relacionarà la tangència geomètrica amb una condició algèbrica sobre un polinomi. Això implicarà la necessitat de demostrar en una etapa posterior que el resultat trobat és correcte.

Per començar observem l'esquema gràfic que tenim de $V(x)$ i afegim-hi les rectes paral·leles $y = k$ a l'eix OX d'abscisses. Apareixen un, dos o tres punts d'intersecció.



Més concretament, si considerem el cas de la recta $y = k$ que toca el gràfic de $V(x)$ en el punt màxim que volem trobar, aquesta recta i el gràfic de $V(x)$ només tenen dos punts en comú. A més, entre aquests dos, el punt de contacte que es troba en el màxim té la característica de ser un punt de tangència entre els dos gràfics.

El fet clau es troba en pensar aquest punt com un "punt doble" generat pels dos punts de tall de la corba amb les rectes "inferiors", quan aquestes es desplacen paral·lelament en la direcció positiva de l'eix OY d'ordenades. Si ho traduïm al llenguatge de l'àlgebra, tenim que la resolució del sistema d'equacions determinat per aquesta recta i la funció polinòmica $V(x)$ tindrà dues solucions i la que ens interessa, —la del punt de tangència—, haurà de ser doble. En definitiva, hem d'imposar que hi hagi solució doble en el sistema

$$\left.\begin{array}{l} y = 4x^3 - 400x^2 + 10000x \\ y = k \end{array}\right\} \iff 4x^3 - 400x^2 + 10000x - k = 0\,.$$

Si ho expressem d'una altra manera, cal imposar que el polinomi

$$p(x) = 4x^3 - 400x^2 + 10000x - k = 0, \tag{1}$$

tingui un arrel $x = a$ doble, és a dir que la descomposició factorial de $p(x)$ ha de ser

$$p(x) = 4(x-a)^2(x-b) \tag{2}$$

Finalment, si volem trobar la longitud $x = a$ de la cartolina que hem de retallar i el volum $V(a) = k$ màxim resultant, només caldrà tenir present que les expressions (1) i (2) representen el mateix polinomi. Si desenvolupem l'expressió (2) en resulta

$$p(x) = 4(x^2 - 2ax + a^2)(x-b) = 4x^3 + 4(-b-2a)x^2 + 4(a^2+2ab)x - 4a^2b \tag{3}$$

En ser els polinomis (1) i (3) iguals, també ho seran els seus coeficients i, per tant,

$$\left\{\begin{array}{c} -400 = 4(-2a-b) \\ 10000 = 4(a^2+2ab) \\ -k = -4a^2b \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} 100 = 2a+b \\ 2500 = a^2+2ab \\ k = 4a^2b\,. \end{array}\right.$$

Si aïllem $b = 100 - 2a$ i substituïm en la segona equació, obtindrem el volum k i el retall $x = a$ que hem de fer a la cartolina inicial:

$$\begin{aligned} 2500 = a^2 + 200a - 4a^2 \iff\ & 3a^2 - 200a + 2500 = 0 \\ \iff\ & a = \frac{100 \pm \sqrt{10000-7500}}{3} = \frac{100 \pm 50}{3} = \left\langle \begin{array}{l} 50 \\ \boxed{\dfrac{50}{3} \approx 16.667} \end{array}\right. \\ \implies\ & b = 100 - 2\frac{50}{3} = \frac{200}{3} \\ \implies\ & k = 4\left(\frac{50}{3}\right)^2 \cdot \frac{200}{3} = \boxed{\frac{2000000}{27} \approx 74074.074}\,. \end{aligned}$$

Hem obtingut els valors exactes del volum màxim i del retall que hem de fer a la cartolina inicial.[1]

- **E3. Demostració algèbrica de la certesa del resultat obtingut.** Com s'ha dit més amunt, el fet de fonamentar els nostres càlculs sobre conjectures obliga, si volem estar segurs del resultat, a demostrar que és correcte. Per fer-ho, n'hi haurà prou amb demostrar que

$$\boxed{V\left(\frac{50}{3}\right) > V\left(\frac{50}{3} + h\right),\ \text{quan } 0 < \frac{50}{3} + h < 50} \tag{4}$$

[1] Fem notar que la solució $a = 50$ també correspon a un punt doble. No la tenim en compte perquè, com s'aprecia a l'esquema gràfic, és un punt que proporciona el volum mínim de valor 0, el qual correspon a un retall de la cartolina de longitud 50.

Passem al càlcul de les expressions implicades.[2]

$$\begin{aligned}
V\left(\frac{50}{3}+h\right) &= 4\left(\frac{50}{3}+h\right)^3 - 400\left(\frac{50}{3}+h\right)^2 + 10000\left(\frac{50}{3}+h\right) \\
&= \underbrace{\left[4\left(\frac{50}{3}\right)^3 - 400\left(\frac{50}{3}\right)^2 + 10000\left(\frac{50}{3}\right)\right]}_{V(50/3)} + 4\left(\frac{50^2}{3}h + 50h^2 + h^3\right) - \\
&\quad -400\left(\frac{100}{3}h + h^2\right) + 10000h\,.
\end{aligned}$$

Llavors, calculem

$$\begin{aligned}
V\left(\frac{50}{3}+h\right) - V\left(\frac{50}{3}\right) &= \frac{10000}{3}h + 200h^2 + 4h^3 - \frac{40000}{3}h - 400h^2 + 10000h \\
&= 4h^3 - 200h^2 = 4h^2(h-50) < 0, \quad \forall h < 50.
\end{aligned}$$

És a dir,

$$V\left(\frac{50}{3}\right) > V\left(\frac{50}{3}+h\right), \quad \text{quan} \quad \frac{50}{3}+h < \frac{50}{3}+50.$$

Notem que la restricció obtinguda sobre h inclou els valors de h per als quals s'havia de fer la demostració de l'expressió (4).

[2] S'han obviat algunes etapes del càlcul, per la qual cosa és convenient refer els càlculs amb més detall si no s'entenen. Una de les identitats que s'han utilitzat és la que proporciona el desenvolupament del cub d'un binomi,

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$