Successions recurrents

Ramon Nolla
Departament de Matemàtiques
IES Pons d'Icart – 1997

1 Introducció

De tots es prou coneguda l'anècdota biogràfica de Carl Friedrich Gauss (1777–1855), en la que s'explica com, quan encara era un nen, deixà bocabadat el seu mestre en trobar la suma dels cent primers nombres naturals en pocs segons. Possiblement el seu resultat fou aconseguit per les consideracions següents:

$$\begin{array}{rcl} S_{100} &=& 1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 + 100 \\ S_{100} &=& 100 + 99 + 98 + \cdots + 3 + 2 + 1 \\ \hline 2S_{100} &=& 101 + 101 + 101 + \cdots + 101 + 101 + 101 \end{array}$$

d'on resultava immediatament $S_{100} = \dfrac{100 \cdot 101}{2} = 5050.$

Una anàlisi d'aquesta actuació ens permet afirmar que, com a mínim, es poden sumar seguint aquest procediment els termes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ d'aquelles successions que es poden expressar mitjançant una *recurrència* del tipus

$$a_k = a_{k-1} + d, \text{ on } k \in \{2, 3, \ldots, n\} \text{ i } d \in \mathbf{R} \text{ és constant.} \tag{1}$$

SR 1 *Demostreu que en una recurrència del tipus* (1) *la suma de termes* $a_k + a_{n-k+1}$ *equidistants dels extrems és constant, i trobeu la suma dels* n *termes.*

SR 2 *Trobeu la fracció racional que genera el nombre decimal periòdic* $2,3\overline{17}$ *utilitzant la suma de termes d'una successió definida recurrentment.* *Solució:* 1147/495

Tot seguit establirem la definició de successió recurrent i proposarem alguns problemes[1] que admetran interpretacions en termes de successions recurrents. Aquests ens permetran adquirir ofici en la recerca i manipulació de recurrències de les quals mirarem, en alguns casos, de sistematitzar-ne el tractament.

Definició 1 *Una successió* a_n *es diu definida en forma recurrent si satisfà una equació del tipus*

$$a_n = f(n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-k}), \quad \textit{on} \quad k < n \tag{2}$$

és a dir, si està definida en funció del lloc n *que ocupa cada terme, i dels* k *termes anteriors. El nombre* k *de termes que cal retrocedir per definir* a_n *rep el nom d'ordre de la successió. Una solució particular de l'equació* (2) *és una successió que la satisfà. La solució general de l'equació* (2) *és el conjunt de successions que la satisfan.*

Observem que en aquesta equació la incògnita és la successió, i el problema que es planteja és trobar-li una expressió no recurrent, una expressió "tancada".

[1] En la col·lecció de problemes resolts i no resolts que es proposen, estan inclosos, entre d'altres, els de l'article de J.M. Brunat, Successions recurrents, *Sessions de preparació per a l'Olimpíada Matemàtica*, 1997.

SR 3 *El joc de les torres de Hanoi consta de tres pals verticals A, B i C, i de n discos de radis diferents que, al principi, són apilats de gran (sota) a petit (dalt), travessats pel pal A. L'objectiu és col·locar la pila en idèntica posició però en el pal B. L'única jugada permesa és passar el disc més alt d'una pila a la posició superior d'una altra pila, sense cobrir, però, un disc més petit. Trobeu una relació recurrent per al nombre mínim de jugades necessàries per completar el joc i resoleu-la.*

Sigui x_n = nombre de jugades mínim per a n discos. Podríem intentar una resolució no recurrent si observem després d'uns quants assaijos que

$$x_1 = 1\ ,\ x_2 = 3\ ,\ x_3 = 7\ ,\ x_4 = 15\ ,\dots$$

d'on es podria conjecturar $x_n = 2^n - 1$, i demostrar-ne la validesa per inducció.
Intentarem calcular x_{n+1} de manera recurrent. Per fer-ho considerem que hem de posar el disc més gran d'A en B i després la resta damunt, per la qual cosa caldrà

a) posar els n discos superiors d'A en C, és a dir fer x_n moviments.

b) posar el disc gran d'A en B, és a dir fer un moviment.

c) posar els n discos de C en B, és a dir tornar a fer x_n moviments.

Això ens permet establir la recurrència

$$x_{n+1} = 2x_n + 1, \quad \text{essent} \quad x_1 = 1.$$

D'aquí, si fem iteració de la igualtat, resulta

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 2x_n + 1 = 2(2x_{n-1} + 1) = 2(2(2x_{n-2} + 1) + 1) + 1 = \cdots = \\ &= 2^n x_1 + 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2 + 1 = \sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1. \end{aligned}$$

És a dir que $\quad x_n = 2^n - 1.$ □

SR 4 *Trobeu el nombre de paraules de longitud k que es poden fer emprant l'alfabet* $\{0, 1, 2, 3\}$ *que tinguin un nombre parell de zeros.*

Una resolució on no utilitzem el llenguatge recurrent podria ser la següent:

zeros	*paraules*
0	3^n
2	$\binom{n}{2}3^{n-2}$
4	$\binom{n}{4}3^{n-4}$
$\vdots$	$\vdots$
$2p$	$\binom{n}{2p}3^{n-2p}$

Sigui a_n el nombre de paraules de longitud n amb un nombre parell de zeros. Segons la taula adjunta on considerem

$$2p = \begin{cases} n & \text{, si } n \text{ és parell} \\ n-1, & \text{si } n \text{ és senar} \end{cases}$$

$$a_n = \binom{n}{0}3^n + \binom{n}{2}3^{n-2} + \cdots + \binom{n}{2p}3^{n-2p}.$$

Ara bé aquests sumands són els que ocupen els llocs senars en els desenvolupaments dels binomis $(3+1)^n$ i $(3-1)^n$, d'on surt de forma immediata

$$a_n = \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{2k} 3^{n-2k} = \frac{(3+1)^n + (3-1)^n}{2} = \frac{4^n + 2^n}{2}.$$

Si optem pel camí de trobar una definició recurrent per a la successió a_n, observem que el nombre de paraules a_n de longitud n que tenen un nombre parell de zeros es poden classificar en

- Paraules que resulten d'afegir una de les xifres $1, 2, 3$ a les de longitud $n-1$ que tenien un nombre parell de zeros, d'on surten $3a_{n-1}$ paraules.
- Paraules que resulten d'afegir un zero a les de longitud $n-1$ que tenien un nombre senar de zeros, d'on surten $4^{n-1} - a_{n-1}$ paraules. Això ha resultat de restar el nombre de paraules que tenien un nombre parell de zeros del total de paraules de longitud $n-1$.

D'aquí surt la definició recurrent

$$a_n = 3a_{n-1} + 4^{n-1} - a_{n-1} = 2a_{n-1} + 4^{n-1}, \text{ si } n > 1 \quad \text{essent} \quad a_1 = 3$$

Ara aplicant iteradament aquesta definició

$$\begin{aligned}
a_n &= 2a_{n-1} + 4^{n-1} \;=\; 2(2a_{n-2} + 4^{n-2}) + 4^{n-1} \;= \\
&= 2(2(\cdots(2a_1 + 4)\cdots) + 4^{n-2}) + 4^{n-1} \;= \\
&= 2^{n-1}a_1 + 2^{n-2}\cdot 4 + 2^{n-3}\cdot 4^2 + \cdots + 2\cdot 4^{n-2} + 4^{n-1} \;= \\
&= 2^{n-1}a_1 + 2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2} + \cdots + 2^{2n-2} \;=\; 3\cdot 2^{n-1} + \frac{2^n(2^{n-1}-1)}{2-1} \;= \\
&= \frac{2^n + 4^n}{2}.
\end{aligned}$$

□

SR 5 *Considerem n rectes al pla en posició general (dues a dues no paral·leles, tres a tres no concurrents).*

a) *En quantes regions queda dividit el pla?*

b) *Quantes d'aquestes regions són no fitades?*

Observem que cada vegada que una nova recta troba una recta ja traçada el nombre de regions en què està dividit el pla augmenta en una unitat, i a més un cop interceptada l'última recta traçada anteriorment encara es crea una regió més. Per tant si a_n és el nombre de regions obtingudes amb n rectes

$$a_n = a_{n-1} + (n-1) + 1 = a_{n-1} + n \quad \text{i} \quad a_1 = 2.$$

Quant al segon apartat només cal observar que amb una nova recta es creen dues regions no fitades més, una abans d'interceptar la primera recta i una altra després d'interceptar la última. Les altres interseccions només aconsegueixen augmentar el nombre de regions fitades. Conseqüentment si b_n és el nombre de regions fitades obtingudes amb n rectes

$$b_n = b_{n-1} + 2 \quad \text{i} \quad b_1 = 2.$$

Per al càlcul de les expressions no recurrents tenim per iteració de la recurrència:

$$a_n = a_{n-1} + n = a_{n-2} + (n-1) + n = a_1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$b_n = b_1 + 2(n-1) = 2n$$

□

SR 6 *Trobeu el nombre de maneres diferents de pujar una escala de n graons si en cada pas en pujem un o dos.*

Sigui x_n =nombre de maneres de pujar n graons.

n	x_n
1	1
2	2
3	$1+2$
4	$2+(1+2)$
$\vdots$	$\vdots$

En general x_n es pot descompondre en nombre de maneres de pujar les escales amb la última passa de:

– dos graons, és a dir x_{n-2} maneres.

– un graó, és a dir x_{n-1} maneres.

Per tant la definició recurrent és

$$x_n = x_{n-2} + x_{n-1}, \qquad \text{essent} \quad x_1 = 1,\ x_2 = 2.$$

En resulta una petita variant de la coneguda successió de FIBONACCI que apareix en un problema del *Liber abaci*, —tractat sobre mètodes i problemes algebraics escrit l'any 1202 pel mercader italià LEONARDO DE PISA conegut pel sobrenom Fibonacci—. En aquesta obra es proposa:

> Quantes parelles de conills es produiran en un any, començant amb una parella única, si cada mes qualsevol parella procrea una altra parella, que es reprodueix també a partir del segon mes.

Aquesta successió ha estat molt estudiada, i una de les seves propietats més conegudes és la seva capacitat de generar el nombre d'or. Efectivament, com es desprèn del problema 8d),

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Finalment trobem que la recerca del seu terme general en forma no recurrent no resulta tan immediata com en els casos anteriors. □

2 Recurrències lineals

Notem que les equacions de recurrència dels sis problemes exposats tenen algunes característiques comunes: Són lineals en els termes de la successió i tenen coeficients constants.

Definició 2 *Direm que una successió a_n està definida en forma de recurrència lineal amb coeficients constants, si satisfà l'equació*

$$a_n = \lambda_1 a_{n-1} + \lambda_2 a_{n-2} + \cdots + \lambda_k a_{n-k} + f(n),$$

on λ_i són constants reals.
Si $f(n) = 0$ diem que la recurrència és homogènia, i en cas contrari és no homogènia.

Moltes recurrències no homogènies es transformen fàcilment en homogènies fent combinacions lineals de la seva equació.

SR 7 *Expresseu les recurrències dels problemes* 3, 4, *i* 5, *en forma homogènia.*

Per al problema 3 tenim:

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &= 2x_n + 1 \\ x_{n+2} &= 2x_{n+1} + 1 \end{aligned}\right\} \quad \Longrightarrow \quad x_{n+2} - x_{n+1} = 2(x_{n+1} - x_n) \quad \Longrightarrow \quad x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2}.$$

Actuant de forma semblant tenim per al problema 4:

$$a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2}.$$

I per al problema 5:

$$a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3},$$

$$b_n = 2b_{n-1} - b_{n-2}.$$

□

Quan observem les successions dels problemes que hem resolt veiem que la seva expressió no recurrent ha vingut donada en alguns casos per una combinació lineal de progressions geomètriques. Això és així per a totes les recurrències lineals homogènies d'ordre n, per a les quals es puguin trobar n progressions geomètriques diferents que les satisfaguin. En el següent problema establirem, entre d'altres qüestions, la veritat d'aquesta afirmació per a $n = 2$.

SR 8 *Donada la recurrència* $a_n = \lambda a_{n-1} + \mu a_{n-2}$

a) *En quines condicions per a* λ *i* μ *existeixen dues progressions geomètriques* α_1^n *i* α_2^n *que la satisfan?*

b) *Comproveu que, en les condicions trobades, totes les successions que la satisfan són del tipus*

$$x_n = A\alpha_1^n + B\alpha_2^n, \quad \textit{on} \quad A, B \in \mathbf{R},$$

i α_1 *i* α_2 *són, com hem comprovat, les arrels de l'equació* $x^2 - \lambda x - \mu = 0$*, la qual rep el nom d'equació característica de la recurrència.*

c) *Demostreu que si* $\lambda^2 + 4\mu = 0$ *totes les solucions són del tipus*

$$x_n = A\left(\frac{\lambda}{2}\right)^n + Bn\left(\frac{\lambda}{2}\right)^n,$$

essent $\lambda/2$ *l'única arrel de l'equació característica.*

d) *Apliqueu els resultats anteriors a trobar el terme general en forma no recurrent de les successions d'ordre* 2 *dels problemes* 3, 4, 5 *i* 6.

e) *Generalitzeu el mètode de l'apartat c) per a la successió de tercer ordre del problema* 5.

Per resoldre el primer apartat només cal imposar que α_1^n i α_2^n compleixin la condició de recurrència i s'obté que existeixen

$$\alpha_1 = \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 4\mu}}{2} \quad \text{i} \quad \alpha_2 = \frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 4\mu}}{2}$$

diferents, sempre que $\lambda^2 + 4\mu > 0$. Quant al segon apartat és immediat comprovar que les x_n allí definides són solucions. Per veure que totes s'escriuen d'aquella manera cal tenir en compte que el conjunt de successions que satisfan la recurrència s'obté considerant totes les possibles parelles de valors inicials a_1 i a_2. Llavors només caldrà veure que existeixen A i B per a cada parella d'aquests valors inicials. Això ho aconseguim imposant

$$\begin{aligned} a_1 &= A\alpha_1 + B\alpha_2 \\ a_2 &= A\alpha_1^2 + B\alpha_2^2 \end{aligned}$$

d'on obtenim

$$A = \frac{\alpha_2 a_1 - a_2}{\alpha_1\alpha_2 - \alpha_1^2} \in \mathbf{R} \quad \text{i} \quad B = \frac{\alpha_1 a_1 - a_2}{\alpha_1\alpha_2 - \alpha_2^2} \in \mathbf{R}.$$

El tercer apartat es resol de manera semblant. Quant al quart apartat, per a les successions d'ordre 2 dels problemes 3, 4, i 5, cal trobar les raons de les progressions geomètriques implicades, resolent les equacions característiques

$$x^2 - 3x + 2 = 0\ ,\ x^2 - 6x + 8 = 0\ ,\ x^2 - 2x + 1 = 0$$

i imposar el valor dels dos primers termes de cada successió, d'on surten les mateixes expressions ja calculades per altres mitjans. Per al problema 6 la bondat del mètode és evident al poder trobar una solució que se'ns resistia. Només cal actuar de la mateixa manera i obtenim

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right].$$

En l'últim apartat, de la recurrència de tercer ordre esmentada s'obté una solució en forma de progressió geomètrica tal que la raó satisfà l'equació característica

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0, \quad \text{és a dir} \quad x = 1.$$

Conjecturem, actuant segons ens suggereix l'extensió del resultat del tercer apartat, que les successions solució han de ser del tipus

$$x_n = A1^n + Bn1^n + Cn^2 1^n = A + Bn + Cn^2,$$

d'on s'obté imposant els valors inicials $a_1 = 2$, $a_2 = 4$ i $a_3 = 7$ el resultat que ja coneixíem

$$x_n = 1 - \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2.$$

□

Donarem, sense demostració, el teorema que valida la conjectura anterior.

Definició 3 *Donada la recurrència lineal homogènia* $a_n = \lambda_1 a_{n-1} + \lambda_2 a_{n-2} + \cdots + \lambda_k a_{n-k}$*, el seu polinomi característic ve definit per*

$$p(x) = x^k - \lambda_1 x^{k-1} - \lambda_2 x^{k-2} - \cdots - \lambda_k.$$

Teorema 1 *La solució general d'una recurrència lineal homogènia d'ordre* k *on el polinomi característic té totes les arrels* α_i *reals i simples ve donada per*

$$a_n = \sum_{i=0}^{k} A_i \alpha_i^n, \quad \text{on} \quad A_i \in \mathbf{R}.$$

Si hi ha arrels reals α *de multiplicitat* $p > 1$*, per a cada una d'elles apareix un sumand del tipus*

$$(B_1 + B_2 n + B_3 n^2 + \cdots + B_p n^{p-1})\alpha^n.$$

SR 9 *En el pla hi ha dos punts pintats de groc i r punts pintats de verd. Només es permet dibuixar segments que tenen per extrems punts de diferents colors.*

a) *Proveu que el nombre mínim de segments que cal dibuixar per tal que tots els punts quedin conectats és $r+1$.*

b) *De quantes maneres es poden dibuixar $r+1$ segments de forma que tots els punts quedin conectats?*

Observem que:
– Si en dibuixo menys de r algun punt verd queda sense conectar amb algun punt groc.
– Si en dibuixo r cada punt verd queda conectat amb un sol punt groc, de manera que no es pot establir conexió entre els punts grocs.
– Per aconseguir la conexió que falta cal dibuixar un segment més de manera que un punt verd quedi conectat amb els dos punts grocs.
Per aconseguir comptar el que ens demanen considerem

$$a_r = \text{nombre de maneres de dibuixar els } r+1 \text{ segments},$$

Considerem que tenim $r-1$ punts verds i dos grocs $g_1,\ g_2$ units de totes les maneres a_{r-1} possibles.

- D'ajuntar el r-èsim verd, primer amb un groc i després amb l'altre, en resulten $2a_{r-1}$ maneres d'unir-los tots.

- D'ajuntar el r-èsim verd amb els dos grocs a la vegada, —la qual cosa significa fer col·leccions de $r-1$ elements escollits entre $g_1,\ g_2$ on importa l'ordre—, en resulten VR_2^{r-1} maneres.

Per tant la recurrència és

$$a_1 = 1 \quad \text{i} \quad a_r = 2a_{r-1} + 2^{r-1}.$$

D'on surt, si actuem convenientment $\quad a_r = r2^{r-1}$. □

SR 10 *Calculeu la suma* $1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2$.

Aquí la recurrència és clarament $\quad a_n = a_{n-1} + n^2$.
Combinant convenientment $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, a_{n-4}$, en resulta

$$a_n = 4a_{n-1} - 6a_{n-2} + 4a_{n-3} - a_{n-4}.$$

D'aquí s'obté

$$a_n = A_1 + A_2 n + A_3 n^2 + A_4 n^3. \tag{3}$$

I com que $a_1 = 1,\ a_2 = 5,\ a_3 = 14,\ a_4 = 30$ es conclou de (3) que

$$a_n = \frac{1}{3}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n^3.$$

□

Per a l'estudi del cas en què les arrels del polinomi característic són complexes proposem el problema 20 en la secció següent.

3 Problemes proposats– I

SR 11 *En la* Historia de la Matemàtica *de* Carl B. Boyer, *Alianza Editorial*, 1986, *se'ns explica que en una tauleta babilònica es troba un escrit que diu que el temps que tardarà una quantitat qualsevol de diners a duplicar-se a un interès del* 20% *anual és de* $3; 47, 13, 20$ *anys, (on els anys estan representats sexagesimalment).*

a) Trobeu una expressió recurrent per al càlcul del capital obtingut en n anys.

b) Justifiqueu el resultat babiloni.

Solució: $c_n = 1.2\,c_{n-1}$*; fent una interpolació lineal.*

SR 12 *En cada cas, escriviu els sis primers termes de la successió que compleix la recurrència donada, formuleu una solució hipotètica i proveu-la per inducció:*

a) $x_1 = 2, \quad x_n = x_{n-1} + 2n.$

b) $u_1 = 3, \quad u_2 = 5, \quad u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2}.$

Solució: $x_n = n^2 + n$*;* $u_n = 2^n + 1$

SR 13 *Donada la successió* $\quad a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n-2}}$*:*

a) Trobeu una expressió del terme general en forma no recurrent.

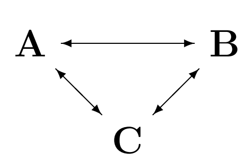
b) Calculeu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

c) Doneu un mètode per calcular l'arrel cúbica aproximada de qualsevol nombre a partir del càlcul d'arrels quadrades i multiplicacions.

Solució: $a_n = a_1^{\frac{1}{3}-\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n} \cdot a_2^{\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$*;* $\sqrt[3]{a_1 a_2^2}$

SR 14 *Resoleu per iteració la recurrència* $a_n = \alpha a_{n-1} + \beta^n$.
Solució: Per al cas $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ *i* $\alpha \neq \beta$ *és* $a_n = a_1\alpha^{n-1} + \dfrac{\beta^2}{\beta - \alpha}\left(\beta^{n-1} - \alpha^{n-1}\right)$

SR 15 *Una partícula es pot moure en viatges d'anada i tornada entre tres punts A, B i C. Entenem per desplaçament el fet d'anar d'un punt a un altre pel camí més curt. Calculeu el nombre de trajectes que surten d'A i arriben a A, en els quals s'efectuen un total de n desplaçaments seguits.*



Solució: $a_n = \frac{1}{3}(2^n + 2(-1)^n)$

SR 16 *Quantes multiplicacions o divisions cal fer, en el pitjor dels casos, per triangular una matriu $n \times n$?*
Solució: $a_n = \dfrac{2n^3 - 3n^2 + n}{3}$

SR 17 *S'estima que la facturació d'una empresa és cada any la mitjana entre la de l'any anterior i la de l'any següent. Si les vendes el* 1990 *són* v_0 *i el* 1991 *són* v_1*, es demanen les vendes de l'any* $1990+n$.
Solució: $v_n = v_0 + (v_1 - v_0)n$

SR 18 *Segons es diu, el rei King Sirham de l'Índia volgué recompensar el seu Gran Visir SissaBen Dahir per inventar el joc dels escacs i li demanà quin premi volia. El Visir contestà: "dona'm un gra de blat pel primer quadrat, dos pel segon, quatre pel tercer, vuit pel quart, etc. fins acabar amb tots els quadrats del tauler". Cas de satisfer la demanda, quants grans de blat li hauria donat el rei al visir?*
Solució: $a_n = 2^n - 1$

SR 19 *Un sistema permet emetre tres senyals diferents, un dels quals dura un segon i, els altres, dos segons cadascun. Trobeu el nombre de seqüències de senyals diferents que es poden emetre en* n *segons suposant que no hi ha cap temps mort entre cada dos senyals.*

Solució: $a_n = \frac{1}{3}(2^{n+1} + (-1)^n)$

SR 20 *Resoleu la recurrència* $a_n = 2(a_{n-1} - a_{n-2})$.
Indicació: Les raons de les progressions geomètriques resultants de l'equació característica són complexes. Actueu com en el cas real, encara que us trobeu amb nombres complexos.
Solució: $a_n = 2^{\frac{n}{2}} \left(M \cos \dfrac{n\pi}{4} + N \sin \dfrac{n\pi}{4} \right)$

SR 21 *Calculeu el valor de les sumes*

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) \qquad i \qquad \sum_{k=1}^{n} ka^k \quad a \in \mathbf{R} - \{0,1\}.$$

Solució: $\dfrac{n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n}{4}$ *i* $\dfrac{a}{(a-1)^2} + \left(\dfrac{a}{a-1} n - \dfrac{a}{(a-1)^2} \right) a^n$

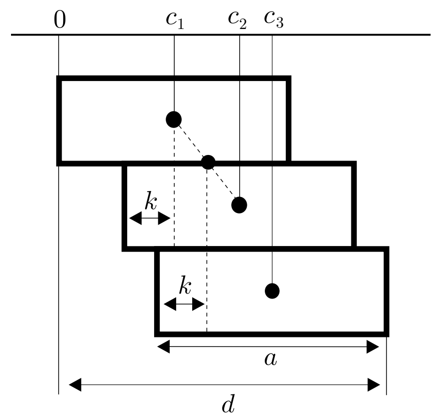
SR 22 *Quantes operacions (sumes, diferències, multiplicacions i divisions) ens calen, com a màxim, per resoldre un sistema* $n \times n$ *d'equacions lineals pel mètode de Gauss? Què serà més avantatjós per un computador utilitzar aquest mètode o el de Cramer?*
Solució: $n^3 + n^2 - n$*; utilitzar el de Gauss, (per Cramer es necessitarien* $n!(n+1) - 1$ *operacions).*

4 Un exemple de recurrència no lineal

Hi ha moltes recurrències que escapen del model anterior, les quals tenen un tractament variat. Un exemple ens el proporciona el següent problema.

SR 23 *Apileu maons, un damunt l'altre, tal com mostrem a la figura adjunta, i esbrineu si podem fer la projecció* d*, (sobre l'horitzontal), de la distància entre l'extrem esquerre del maó superior i l'extrem dret de l'inferior tan gran com vulgueu sense que es desmunti l'estructura.*

El màxim desplaçament a la dreta al que podrem sotmetre un maó respecte dels superiors, serà tal que la vertical del seu extrem esquerre coincideixi amb la vertical del centre de masses dels maons superiors. Això proporcionarà a l'estructura una posició d'equilibri inestable. Per corregir aquesta situació farem coincidir la vertical de l'extrem esquerre de cada maó amb la del centre de masses dels superiors desplaçada una distància k a l'esquerra. Sigui a la longitud de cada maó. Les posicions dels centres de massa dels successius maons, —ordenats des de les posicions superiors a les inferiors—, vindran determinades per



$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{a}{2} \\ c_2 &= c_1 + \frac{a}{2} - k \\ c_3 &= \frac{c_1+c_2}{2} + \frac{a}{2} - k \\ &\vdots \\ c_{n+1} &= \frac{c_1+c_2+\cdots+c_n}{n} + \frac{a}{2} - k\,. \end{aligned}$$

Llavors, $$\left\{ \begin{aligned} n\,c_{n+1} &= c_1+\cdots+c_n + n\,\frac{a}{2} - n\,k \\ (n-1)\,c_n &= c_1+\cdots+c_{n-1} + (n-1)\,\frac{a}{2} - (n-1)\,k\,. \end{aligned} \right.$$

Si les restem obtenim $\quad c_{n+1} = c_n + \dfrac{a/2-k}{n}$,

d'on surt que $\quad c_{n+1} = c_1 + \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{a/2-k}{p} = \frac{a}{2} + \left(\frac{a}{2}-k\right)\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}\,.$

Si agafem el desplaçament dels maons a l'esquerra amb valor constant $k \in \left(0, \dfrac{a}{2}\right)$, l'estructura no caurà i, en ser la sèrie harmònica $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p}$ divergent (v. problema 24), tenim $\lim\limits_{n\to\infty} c_{n+1} = \infty$. Per tant, l'estructura es pot estendre sobre l'horitzontal una distància d tan gran com es vulgui. □

SR 24 *Justifiqueu que la sèrie harmònica és divergent.*
Indicació: Demostreu que $\dfrac{1}{n-1}+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1} > \dfrac{3}{n}$ *(Pietro Mengoli* (1625−1686)*), o també que si agrupeu convenientment els sumands,* $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} > 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2}$ *(Nicolas d'Oresme* (1323−1382)*).*

5 Funcions generadores

Acabem de veure un exemple de tractament de recurrències no lineals. Hi ha un mètode que ens permet resoldre algunes recurrències no lineals i també les lineals. L'anomenarem mètode de les *funcions generadores*. Es tracta d'associar a cada successió $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, una funció que la "generi" del tipus

$$A(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \quad \left(=\lim_{p\to\infty}\sum_{n=0}^{p}a_nx^n\right)$$

i, amb el seu ajut, trobar una expressió no recurrent de la successió.[2]
Introduirem la nova forma d'actuar utilitzant el problema 19. La successió que hi obteníem era $a_n=2a_{n-2}+a_{n-1}$, on convé agafar $a_0=1$. Si multipliquem per x^n podem escriure

$$a_nx^n=2x^2a_{n-2}x^{n-2}+xa_{n-1}x^{n-1}, \text{ on } n\geq 2 \text{ i } x\in\mathbf{R}.$$

I per tant,

$$\sum_{n=2}^{\infty}a_nx^n=2x^2\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n-2}+x\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-1}x^{n-1} \tag{4}$$

per a tots els valors de x tals que existeixi $A(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$.
Llavors de (4) obtenim l'equació

$$A(x)-a_0-a_1x=2x^2A(x)+x\left(A(x)-a_0\right), \text{ on } a_1=1 \text{ i } a_2=3.$$

En ser $-2x^2-x+1=(1-2x)(1+x)$ resulta

$$A(x)=\frac{1}{-2x^2-x+1}=\frac{M}{1-2x}+\frac{N}{1+x}=\frac{2/3}{1-2x}+\frac{1/3}{1+x}$$

Ara bé, com que

$$\frac{1}{1-2x}=1+2x+4x^2+8x^3+\cdots \qquad \text{i} \qquad \frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots,$$

obtenim

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=A(x)=\frac{2}{3}(1+2x+4x^2+8x^3+\cdots)+\frac{1}{3}(1-x+x^2-x^3+\cdots).$$

I finalment, si igualem els coeficients, sortirà el resultat esperat:

$$a_n=\frac{1}{3}\left(2^{n+1}+(-1)^n\right).$$

Es pot argumentar que en el cas lineal aquest procediment és més complex que el de l'equació característica, la qual cosa ens remet a comprovar la seva utilitat en els casos no lineals, o bé lineals amb coeficients no constants. Abans de seguir resumim el mètode:

– Associació, a cada successió a_n, d'una sèrie de potències, també anomenada *funció generadora*, $A(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$. Aquestes sèries es poden sumar i multiplicar formalment, i formen una àlgebra com la dels polinomis, amb la peculiaritat que totes les $A(x)$ amb $a_0\neq 0$ tenen inversa. A més, sempre que puguem trobar una funció expressada en termes elementals que coincideixi amb alguna d'elles en algun interval, n'acceptarem la igualtat, així com la igualtat entre la derivada de la funció i la derivada "formal" de la funció generadora.

[2] En cada problema concret assignarem a a_0 un valor convenient.

– Obtenció d'una equació en $A(x)$ a partir de l'equació de la recurrència.

– Resolució de l'equació en $A(x)$.

– Utilització de l'àlgebra de les sèries de potències i la derivabilitat per trobar els coeficients d'$A(x)$.

Observem-ne la utilitat en el problema següent, on apareix una recurrència lineal amb coeficients no constants, la qual no es pot tractar mitjançant l'equació característica.

SR 25 *Teniu n objectes cada un al seu lloc. Sigui d_n el nombre de maneres de desar els objectes de manera que no n'hi hagi cap al seu lloc. Establiu una recurrència per d_n i demostreu que $d_n = nd_{n-1} + (-1)^n$. Trobeu una expressió no recurrent per a d_n.*

Un cop comptades les maneres de desar $n-1$ objectes, el nombre de maneres de desar-ne n es poden descompondre en:

– Nombre de maneres d'intercanviar l'enèsim objecte per un altre qualsevol r, és a dir $(n-1)d_{n-2}$.

– Nombre de maneres que l'objecte enèsim ocupi el lloc r però aquest no ocupi el lloc del n, és a dir $(n-1)d_{n-1}$.

O sigui que $d_n = (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2})$. Llavors,

$$\begin{aligned} d_n - nd_{n-1} &= (-1)^1(d_{n-1} - (n-1)d_{n-2}) = (-1)^2(d_{n-2} - (n-2)d_{n-3}) = \\ &= \cdots = (-1)^{n-2}(d_2 - 2d_1) = (-1)^{n-2}\cdot 1 = (-1)^n. \end{aligned}$$

O sigui que $d_n = nd_{n-1} + (-1)^n$. Ara, aplicant el mètode de les funcions generadores

$$d_n x^n = x\, n\, d_{n-1}x^{n-1} + (-1)^n x^n.$$

El coeficient n de la part dreta de la igualtat anterior és molest. Una manera de eliminar-lo consisteix en dividir per $n!$:

$$\frac{d_n}{n!}x^n = x\frac{d_{n-1}}{(n-1)!}x^{n-1} + (-1)^n\frac{x^n}{n!}.$$

Si considerem la funció generadora $D(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d_n}{n!}x^n$, tenim

$$D(x) - 1 = x\,D(x) + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}.$$

Llavors,

$$\begin{aligned} D(x) &= \frac{1}{1-x}\left(1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) = \\ &= (1 + x + x^2 + +x^3 + \cdots)\left(1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) = \\ &= 1 + \left(1 - \frac{1}{1!}\right)x + \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\right)x^2 + \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right)x^3 + \cdots \end{aligned}$$

Així, igualant coeficients, obtenim

$$d_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right).$$

□

6 Problemes proposats – II

SR 26 *Resoleu la recurrència del problema* 4 *utilitzant el mètode de les funcions generadores.*

SR 27 *Una secretària té n cartes personalitzades i n sobres personalitzats per guardar-les. Si les posa, a l'atzar, una en cada sobre, quina és la probabilitat que cap carta arribi al seu destinatari?*
Solució: $1 - \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} - \dfrac{1}{3!} + \cdots + \dfrac{(-1)^n}{n!}$.

SR 28 *Utilitzeu l'algoritme d'extracció d'arrels quadrades per trobar els primers termes del desenvolupament de $\sqrt{1-x}$ en sèrie de potències . Conjectureu-ne el terme general, generalitzant la definició del nombre combinatori $\binom{n}{k}$ al cas $n \in \mathbf{Q}$.*
Solució: $1 - \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} - \dfrac{x^3}{16} - \cdots$

SR 29 **[vegeu Anderson – 4.3.2]** *Si agafem n objectes en línia, n'unim dos d'adjacents mitjançant un parèntesi i considerem els units com un sol objecte, resulten $n-1$ objectes. Si continuem aquest procés fins a obtenir un sol objecte demostreu que el nombre de maneres a_n de dur a terme aquest procés és*

$$a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}$$

Seguidament deduïu que la funció generadora $A(x)$ satisfà

$$(A(x))^2 - A(x) + x = 0$$

i acabeu demostrant que

$$a_n = \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}$$

SR 30 *Dibuixeu n ovals en un pla de manera que cadascun d'ells talli els altres exactament en dos punts i que tres no coincideixin. Trobeu el nombre de regions en què divideixen el pla.*
Solució: $n^2 - n + 2$

SR 31 *De quantes maneres es pot enrajolar un passadís rectangular de mides $2 \times n$ si es disposa de rajoles de mides 2×1 i 2×2 i no es poden trencar rajoles?*
Solució: $(2/3)\,2^n + (1/3)\,(-1)^n$

SR 32 *Tot resolent cert problema, es diu que una persona és al nivell n quan li falten n etapes per arribar a la solució. A cada nivell té 5 alternatives, dues que el porten al nivell $n-1$ i tres que són millors, en el sentit de que el porten directament al nivell $n-2$. Sigui a_n el nombre de maneres d'arribar a la solució des del nivell n. Trobeu a_n sabent que $a_1 = 2$.*
Solució: $a_n = \dfrac{1}{4}(3^{n+1} + (-1)^n)$

SR 33 *Considereu les paraules de longitud n amb símbols de l'alfabet $\{0, 1, 2\}$.*

a) *Quantes paraules tenen els dígits cadascun igual o superior a l'anterior?*

b) *Quantes paraules són cap-i-cua?*

Solució: $\dbinom{n+2}{2}$; $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3})^n + \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}(-\sqrt{3})^n$

SR 34 *Considerem les successions ternàries de longitud n.*

a) *Quantes n'hi ha que continguin dos símbols consecutius iguals?*

b) *A quantes d'elles no hi ha ni dos uns consecutius ni dos dosos consecutius?*

Solució: $3^n - 3\cdot 2^{n-1}$; $\dfrac{1}{2}\left((1+\sqrt{2})^{n+1}+(1-\sqrt{2})^{n+1}\right)$

7 Recurrències en successions dobles

Si volem comptar el nombre $c_{n,k}$ de col·leccions no ordenades de k elements diferents escollits entre n elements, és immediat trobar una recurrència descomponent $c_{n,k}$ en dues parts:

– nombre de conjunts que no tenen l'element n, és a dir nombre de conjunts de k elements que es poden construir amb $n-1$ elements.

– nombre de conjunts que tenen l'element n, és a dir nombre de conjunts de $k-1$ elements que es poden construir amb $n-1$ elements.

Per tant $\qquad c_{n,k} = c_{n-1,k} + c_{n-1,k-1}$.
Això ens mostra que, en les successions dobles, les recurrències es poden definir de manera semblant a com ho fèiem en la definició 1.

Definició 4 *Una successió $a_{n,k}$ es diu definida en forma recurrent si satisfà una equació del tipus*

$$a_{n,k} = f(n,k,a_{n-1,k},a_{n,k-1},\dots,a_{n-p,k-q}). \tag{5}$$

Tots coneixem el terme general $\binom{n}{k}$ en forma no recurrent de la successió $c_{n,k}$ definida més amunt per a les condicions inicials $c_{n,0}=1$ i $c_{n,n}=1$, les quals la determinen com es desprèn de la construcció del triangle de Tartaglia mitjançant la definició recurrent. Hi ha recurrències que s'hi assemblen, fet que podem aprofitar per trobar expressions no recurrents del seu terme general. Un exemple senzill el tenim a continuació.

SR 35 *Considereu la recurrència amb dos índexs*

$$a_{0,0}=1 \qquad a_{n,k} = \begin{cases} 0 & ,\ k<0 \quad o \quad k>n \\ \frac{1}{2}(a_{n-1,k-1}+a_{n-1,k}) & ,\ 0\le k\le n \end{cases}$$

Calculeu uns quants $a_{n,k}$, conjectureu una fórmula i proveu-la per inducció.

Per a $0\le k\le n$ tenim

$$\begin{array}{lcccccccc}
a_{0,0} & — & & & & 1 & & & \\
a_{1,j} & — & & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & \\
a_{2,j} & — & & \frac{1}{4} & & \frac{2}{4} & & \frac{1}{4} & \\
a_{3,j} & — & \frac{1}{8} & & \frac{3}{8} & & \frac{3}{8} & & \frac{1}{8}
\end{array}$$

Si observem l'exemple que ens ha servit d'introducció podem conjecturar

$$a_{p,k} = \frac{1}{2^p}\binom{p}{k}.$$

– Per a $\boxed{n=0}$ és cert perquè $a_{0,0} = 1 = \dfrac{1}{2^0}\dbinom{0}{0}$.

– Ho suposem cert per a $\boxed{n=p}$, és a dir

$$a_{p,k}=\frac{1}{2^p}\binom{p}{k},\quad \forall k\in\{0,1,\cdots,p\}.$$

– Caldrà provar-ho per a $\boxed{n=p+1}$:

- $a_{p+1,0}=\frac{1}{2}(a_{p,-1}+a_{p,0})=\frac{1}{2}a_{p,0}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^p}\binom{p}{0}=\frac{1}{2^{p+1}}\binom{p+1}{0}.$
- Si es compleix per $a_{p+1,j}$ llavors

$$\begin{aligned}
a_{p+1,j+1} &= \frac{1}{2}(a_{p,j}+a_{p,j+1})=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2^p}\binom{p}{j}+\begin{cases}\frac{1}{2^p}\binom{p}{j+1} & ,\ p\geq j\\ 0 & ,\ p=j\end{cases}\right]=\\
&= \begin{cases}\frac{1}{2^{p+1}}\left(\binom{p}{j}+\binom{p}{j+1}\right) & ,\ p\geq j\\ \frac{1}{2^{p+1}}\binom{p}{j} & ,\ p=j\end{cases} = \frac{1}{2^{p+1}}\binom{p+1}{j+1}
\end{aligned}$$

□

SR 36 *En una bossa hi ha n boles numerades des d'1 fins a n. Si traiem k boles d'aquesta bossa, totes a la vegada, demostreu que la probabilitat de que no surti cap parella de nombres consecutius és*

$$\frac{\binom{n-k+1}{k}}{\binom{n}{k}}$$

Sigui $a_{n,k}$ el nombre de col·leccions de k boles que no tenen cap parella de nombres consecutius on $n>k$. Aquestes es poden descompondre en dos grups:

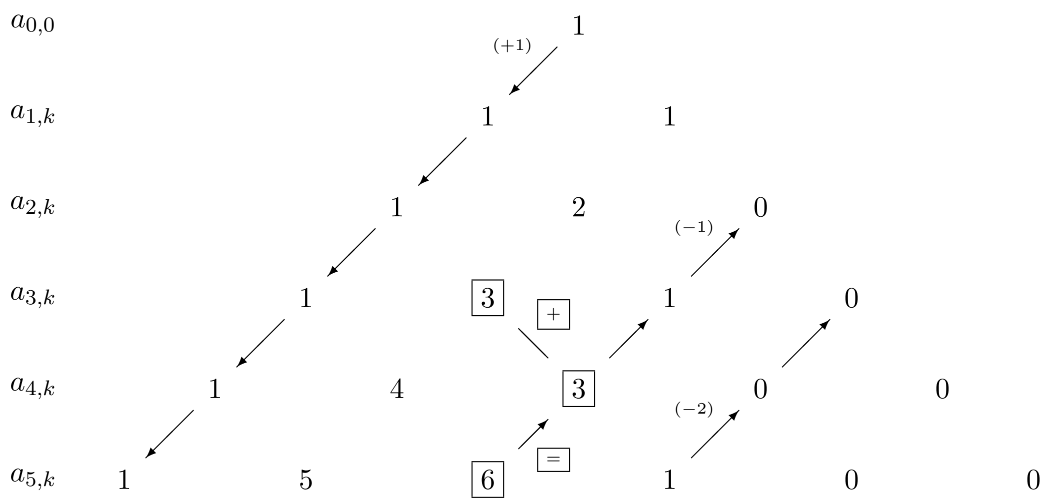
- Nombre de col·leccions de k boles on no hi hagi el nombre n, és a dir $a_{n-1,k}$.
- Nombre de col·leccions de k boles on hi hagi el nombre n, és a dir $a_{n-2,k-1}$.

Així tenim que la successió es pot representar:[3]

$$a_{n,k}=a_{n-1,k}+a_{n-2,k-1};\ a_{n,0}=1,\ \forall n\geq 0;\ a_{1,1}=1;\ a_{n,n}=0,\ \forall n>1.$$

La recurrència anterior dóna a la successió una estructura semblant a la del *triangle de Tartaglia* i fàcilment transformable en ella.

[3] Les condicions inicials es poden escriure alternativament com $a_{2n-1,n}=1\ \forall n\geq 1;\ a_{n,0}=1\ \forall n\geq 0$.



$$
\begin{array}{lccccccccccc}
b_{1,k} & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
b_{2,k} & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
b_{3,k} & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
b_{4,k} & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
b_{5,k} & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

Efectivament, s'observa que si $a_{n,k}$ es trasllada $1-k$ llocs (vegeu les fletxes del esquema adjunt), la qual cosa significa fer una transformació del subíndex n en $n+(1-k)$, obtenim l'estructura del triangle de Tartaglia. Així els termes de la successió $a_{n,k}$ passen a ser termes de la successió $b_{n,k}$ tal que

$$a_{n,k} = b_{n-k+1,k} \quad \text{és a dir} \quad b_{n,k} = a_{n+k-1,k},$$

d'on tenim

$$
\begin{aligned}
&b_{n,k} = a_{n+k-1,k} = a_{n+k-2,k} + a_{n+k-3,k-1} = b_{n-1,k} + b_{n-1,k-1},\\
&b_{n,0} = a_{n-1,0} = 1 \quad \text{i} \quad b_{n,n} = a_{2n-1} = 1.
\end{aligned}
$$

Això implica que $b_{n,k} = \binom{n}{k}$, i per tant $a_{n,k} = b_{n-k+1,k} = \binom{n-k+1}{k}$, la qual cosa implica la probabilitat donada en l'enunciat. □

8 Problemes proposats – III

SR 37 *De quantes maneres es poden pintar k pilotes de golf si disposem de n colors, cadascuna d'elles ha de ser pintada d'algun color i podem deixar colors per utilitzar.*
Indicació: Si $a_{n,k}$ és el nombre de maneres de pintar-les, justifiqueu que

$$a_{n,k} = a_{n-1,k} + a_{n,k-1}.$$

Observeu l'arquitectura de la recurrència i transformeu els termes de la successió $a_{n,k}$ en els d'una successió $b_{n,k}$ amb l'estructura del triangle de Tartaglia.
Solució: Si fem $a_{n,k} = b_{n+k-1,k}$ surt $a_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}$.

SR 38 *La recurrència del problema 37, $a_{n,k} = a_{n-1,k} + a_{n,k-1}$, també es pot tractar amb el mètode de les funcions generadores.*

a) Associeu a cada successió $(a_{n,k})_{k\in\mathbf{N}}$ la funció

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}x^k \ ,$$

establiu una equació en $A_n(x)$ i deduïu-ne $A_n(x) = \dfrac{1}{(1-x)^n}$.

b) Si partim de $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$, demostreu per derivació formal successiva que $\forall n \in \mathbf{N}$ i $n > 1$

$$(1-x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k}(-x)^k,$$

on $\binom{-n}{k}$ s'obté generalitzant per $n \in \mathbf{Z}^-$ la definició de $\binom{n}{k}$ on $n \in \mathbf{N}$.

c) Apliqueu els resultats anteriors a demostrar que $a_{n,k} = \dbinom{n+k-1}{k}$.

SR 39 *Trobeu el nombre de solucions z_i enteres no negatives de*

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n = k.$$

Indicació: Només cal trobar per un cantó el nombre de solucions tals que $z_n = 0$, i després les que tenen $z_n > 0$, és a dir considerar les solucions enteres no negatives de

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n = k, \quad \text{on} \quad y_i = z_i, \ \forall i \le n-1 \quad \text{i} \quad y_n = z_n - 1.$$

Solució: $\dbinom{n+k-1}{k}$

SR 40 *Una altra manera de tractar el problema 39 és observant el producte*

$$\overbrace{(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)\cdots(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)}^{n}. \qquad (6)$$

a) Raoneu que el coeficient de x^k és el nombre de solucions enteres no negatives de

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n = k.$$

b) Utilitzeu (6) i l'apartat a) per resoldre el problema 37.

SR 41 *Troba les solucions enteres positives i no nul·les de $z_1 + z_2 + \cdots + z_n = k$, $(k \ge n)$.*
Solució: $\dbinom{k-1}{n-1}$

SR 42 *Voleu pintar els costats d'un polígon de n vèrtexs de forma que costats contigus tinguin colors diferents. Disposeu d'una caixa de k colors. De quantes maneres ho podeu fer?*
Indicació: Numereu els costats consecutivament, $1, 2, \ldots, n$ i considereu separadament les coloracions en què 1 i 3 es pinten del mateix color i les que no.
Solució: $(k-1)(-1)^n + (k-1)^n$

SR 43 *Sigui $\lambda(n,k)$, on $n>1$, el nombre de k-subconjunts de $\{1,2,3,\dots,n\}$ que no contenen dos enters consecutius. Segons el problema 36, sabem que*

$$\lambda(n,k)=\binom{n-k+1}{k}.$$

Calculeu el nombre $\mu(n,k)$ de maneres d'escollir k persones d'entre n assegudes en una taula rodona sense agafar-ne dues de veïnes.
Solució: $\mu(n,k)=\lambda(n-1,k)+\lambda(n-3,k-1)=\dfrac{n}{n-k}\dbinom{n-k}{k}$

SR 44 *Sigui t_n el nombre de formes de dividir en triangles un polígon regular de n costats mitjançant diagonals que no es tallin. Comproveu que $t_3=1, t_4=2, t_5=5$ i establiu una recurrència per a t_n.*
Solució: $t_{n-1}=t_2t_n+t_3t_{n-1}+\cdots+t_{n-1}t_3+t_nt_2,$ amb $t_0=t_1=0$ *i* $t_2=1$

SR 45 **[Una recurrència especial. Les fraccions contínues]** *Es tracta amb una successió que no es defineix recurrentment tal com ho entenem fins aquí, sinó que la recurrència s'expressa partint d'una successió donada prèviament.*

a) *Trobeu $q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_n\in\mathbf{Z}^+$ tals que*

$$\frac{233}{177}=q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_3+\cfrac{\ddots}{+\cfrac{1}{q_{n-1}+\cfrac{1}{q_n}}}}}$$

La segona part rep el nom de desenvolupament en fracció contínua de $233/177$.

b) *Aquesta fracció genera la successió de fraccions*

$$\frac{P_k}{Q_k}=q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{\ddots}{+\cfrac{1}{q_{k-1}+\cfrac{1}{q_k}}}}$$

que es representa amb la notació $[q_1,q_2,\dots,q_k]$ per a $1\le k\le n$.
Comproveu que per a la fracció contínua de l'apartat a), es compleixen les recurrències:

$$P_k=P_{k-1}q_k+P_{k-2}\quad i\quad Q_k=Q_{k-1}q_k+Q_{k-2}.$$

c) *Comproveu per a la mateixa fracció que* $\dfrac{P_k}{Q_k}-\dfrac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}=\dfrac{(-1)^k}{Q_kQ_{k-1}}.$

d) *Apliqueu la igualtat de l'apartat c), per al cas $k=n$, a la resolució de l'equació que resulta del problema següent:*
Un comprador ha pagat una factura de 15161 PTA amb monedes que al canvi valen 233 PTA i 177 PTA. Quantes n'ha utilitzat de cada classe?
Solució: 40 *monedes de* 233 *PTA i* 33 *monedes de* 177 *PTA.*

e) Demostreu les igualtats dels apartats b) i c) per a qualsevol fracció contínua finita.

SR 46 *Disposem de dos rellotges de sorra, un només pot mesurar intervals d'*$1m$ $57s$*, i l'altre d'*$1m.$ $10s$*. Hem de cuinar un plat per dinar, ja preparat, que necessita estar exactament* $10m.$ *al foc. Tenim molta gana i a la una del migdia ens posem a la feina començant a manipular els rellotges per tal de poder establir exactament aquest temps. Quina serà com a mínim l'hora a la qual ens posarem a dinar?*
Solució: A les $13h.$ $49m.$

Bibliografia

Anderson, I. [1993] *Introducción a la combinatoria.* Vicens Vives.

Biggs, N.L. [1994] *Matemática discreta.* Vicens Vives.

Grimaldi, R.P. [1989] *Matemáticas discreta y combinatoria.* Addison-Wesley Iberoamericana.

Markushévich, A.I. [1974] *Sucesiones recurrentes.* MIR.

Trignan, J. [1994] *Fractions continues.* Editions du Choix.

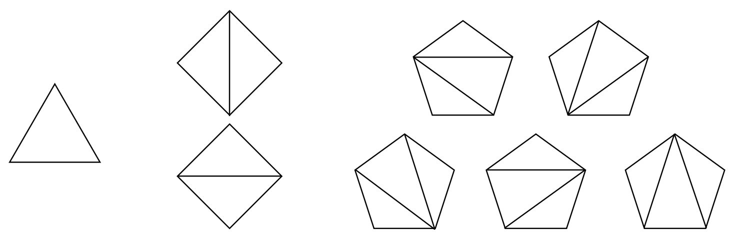
9 Apèndix

A Problema en què s'introdueixen els nombres de Catalan.

[Novembre 99]

Enunciat. Sigui un polígon convex de $n+2$ costats. Es tracta de calcular el nombre de maneres de partir-lo en n triangles mitjançant el traçat de $n-1$ diagonals que no es tallin en l'interior del polígon. Es considera que les particions iguals però orientades de manera diferent, són diferents.

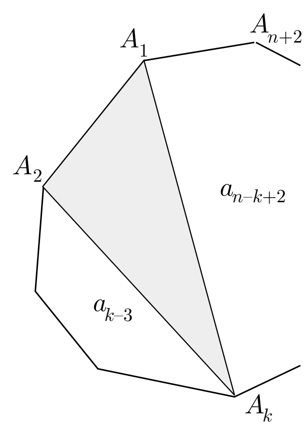
Sigui a_n el nombre de maneres de partir el polígon de $n+2$ costats. Llavors és immediat que $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 5,\ a_4 = 14,\ \ldots$



Donat el polígon $A_1A_2\ldots A_{n+2}$, Triem un costat, per exemple el A_1A_2. Aquest costat formarà part d'algun triangle en cadascuna de totes les possibles particions del polígon. Per tant fent el recompte de les particions que contenen respectivament els triangles $A_1A_2A_k$ per a $3 \le k \le n+2$, les obtindrem totes.

Si, en la taula adjunta, N.P. representa el nombre de particions que inclouen el triangle $A_1A_2A_k$, i definim $a_0 = 1$. Llavors:

Triangle	N.P.
$A_1A_2A_3$	a_0a_{n-1}
$A_1A_2A_4$	a_1a_{n-2}
$A_1A_2A_5$	a_2a_{n-3}
$\cdots$	$\cdots\ \cdots$
$A_1A_2A_k$	$a_{k-3}a_{n-k+2}$
$\cdots$	$\cdots\ \cdots$
$A_1A_2A_{2n+1}$	$a_{n-2}a_1$
$A_1A_2A_{2n+2}$	$a_{n-1}a_0$



Per tant, $\quad a_n = a_0a_{n-1} + a_1a_{n-2} + a_2a_{n-3} + \cdots + a_{n-3}a_2 + a_{n-2}a_1 + a_{n-1}a_0.$

Multiplicant per x^n i sumant per a $n \ge 1$:

$$\begin{aligned} a_nx^n &= x(a_0a_{n-1}x^{n-1} + a_1xa_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_{n-2}x^{n-2}a_1x + a_{n-1}x^{n-1}a_0). \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_nx^n &= x\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{p=0}^{n-1} a_pa_{n-p-1}\right)x^{n-1} = x\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n\right)^2. \end{aligned}$$

Si anomenem $A(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, obtenim

$$A(x)-a_0 = x\,(A(x))^2 \Longrightarrow x\,(A(x))^2 - A(x)+1=0 \Longrightarrow A(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} =$$

$$= \frac{1-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{1/2}{n}(4x)^n}{2x} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2}\binom{1/2}{n}4^n x^{n-1} \Longrightarrow$$

$$A(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2}\binom{1/2}{n+1}4^{n+1}x^n\,.$$

Finalment podem obtenir l'expressió de a_n,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(-1)^n}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n\right)}{(n+1)!}\cdot 4^{n+1} = \\ &= \frac{(-1)^n}{2}\cdot\frac{4^{n+1}}{2^{n+1}}\cdot\frac{(-1)(-3)\cdots(1-2n)}{(n+1)!} = \\ &= \frac{(-1)^n}{2}\cdot 2^{n+1}\cdot(-1)^n\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(2n-1)\cdot(2n)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)\cdot(n+1)!} = \\ &= \frac{(-1)^n}{2}\cdot 2^{n+1}\cdot\frac{(2n)!}{2^n n!(n+1)!} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} \Longrightarrow \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Els termes d'aquesta successió s'anomenen *nombres de Catalan* (1814-1894), qui els va utilitzar per fer el recompte del nombre de maneres de col·locar parèntesis en una seqüència de n símbols.

B Demostració per inducció

Aquest tipus de demostració es basa en el *principi d'inducció*. Aquest principi estableix la veritat d'una propietat p, $\forall n \in \mathbb{N}$. Permet establir el terme general d'algunes successions, de forma alternativa al tractament recurrent.

> Sigui $p(n)$ = " n compleix la propietat p ". Concretament, el principi d'inducció estableix que afirmar la veritat de $p(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, equival a afirmar les dues proposicions següents:
>
> a) $p(1)$ és certa,
>
> b) $\forall k \in \mathbb{N},\ p(k)$ és certa $\Longrightarrow p(k+1)$ és certa.

Exemple 1 *Demostració per inducció de la igualtat* $1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

a) Per a $n = 1$ és certa perquè $1 = \dfrac{1\cdot(1+1)}{2}$.
b) Si la suposem certa per a $n = k \in \mathbb{N}$, llavors també és certa per a $n = k+1$ perquè,

$$1+2+\cdots+k+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 = \left(\frac{k}{2}+1\right)(k+1) = \frac{(k+2)(k+1)}{2}\,. \qquad \square$$

Exemple 2 *Càlcul de la suma* $s_n = 1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \cdots + n\cdot n!$

Observem les primeres sumes:

$$\left.\begin{array}{lcl} s_1 = 1\cdot 1! & = & 1 = 2! - 1 \\ s_2 = 1\cdot 1! + 2\cdot 2! & = & 5 = 3! - 1 \\ s_3 = 1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! & = & 23 = 4! - 1 \\ s_4 = 1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + 4\cdot 4! & = & 119 = 5! - 1 \end{array}\right\} \overset{\text{(Conjectura)}}{\Longrightarrow} s_n = (n+1)! - 1\,.$$

a) Per a $n = 1$ és certa perquè $s_1 = 1\cdot 1! = 1 = (1+1)! - 1$.
b) Si la suposem certa per a $n = k \in \mathbb{N}$, llavors també és certa per a $n = k+1$ perquè,

$$\begin{aligned} s_{k+1} &= s_k + (k+1)\cdot(k+1)! = (k+1)! - 1 + (k+1)\cdot(k+1)! = \\ &= (k+1)![1+(k+1)] - 1 = (k+1)!(k+2) - 1 = (k+2)! - 1. \end{aligned} \qquad \square$$

Exemple 3 *Els primers termes de la successió* $a_n = 5^n + 2\cdot 3^{n-1} + 1$ *són* $a_1 = 8$, $a_2 = 32$ *i* $a_3 = 144$. *Observem que tots són múltiples de* 8. *Demostrarem que* $\forall n \in \mathbb{N}$, a_n *és múltiple de* 8.

a) Per a $n = 1$ és certa perquè així ho hem vist en l'enunciat.
b) Si és cert per a $n = k \in \mathbb{N}$, llavors també és cert per a $n = k+1$ perquè,

$$a_{n+1} = 5^{n+1} + 2\cdot 3^n + 1 = 5\cdot 5^n + 6\cdot 3^{n-1} + 1 = (5^n + 2\cdot 3^{n-1} + 1) + (4\cdot 5^n + 4\cdot 3^{n-1}).$$

En ser el primer sumand múltiple de 8, només cal demostrar que $4\cdot 5^n + 4\cdot 3^{n-1}$ és múltiple de 8. Això equival a demostrar que $5^n + 3^{n-1}$ és múltiple de 2, la qual cosa és immediata perquè la suma de dos nombres senars és un nombre parell. $\square$

Exemple 4 *Existència del límit de* $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

Sabem que en les successions a_n de nombres reals el creixement i l'existència de cota superior de a_n implica l'existència de límit de a_n.

• a_n **és creixent:** Veurem que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$.

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n} = \left[\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\right]^n \cdot \frac{n+2}{n+1} = \left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]^n \cdot \frac{n+2}{n+1} \geq \\ &\overset{(*)}{\geq} \left[1-\frac{n}{(n+1)^2}\right]^n \cdot \frac{n+2}{n+1} = \frac{n^3+3n^2+3n+2}{(n+1)^3} = \frac{(n+1)^3+1}{(n+1)^3} > 1\end{aligned}$$

$(*)$ Això és cert, en ser $(1-x)^n \geq 1-nx$, $\forall x \leq 1$, i considerar $x = \frac{1}{(n+1)^2}$. Aquesta desigualtat la demostrem per inducció:
a) Per a $n=1$ és certa perquè $(1-x)^1 = 1-x = 1-1\cdot x$.
b) Si la suposem certa per a $n=k \in \mathbb{N}$, llavors també és certa per a $n=k+1$. Perquè, en ser $x \leq 1$, tenim $1-x \geq 0$ i per tant,

$$\begin{aligned}(1-x)^{k+1} &= (1-x)^k(1-x) \geq (1-kx)(1-x) = 1-kx-x+kx^2 = \\ &= 1-(k+1)x+kx^2 \geq 1-(k+1)x\end{aligned}$$

• a_n **és acotada superiorment:** Veurem que $a_n < 3$.

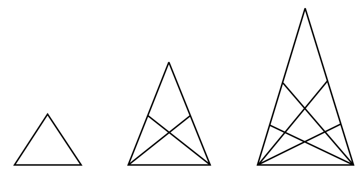
$$\begin{aligned}a_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{n-1}{2!n}+\frac{(n-1)(n-2)}{3!n^2}+\cdots+\frac{(n-1)!}{n!n^{n-1}} = \\ &= 2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) < \\ &< 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!} < 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} \overset{(*)}{<} 2+1 = 3\end{aligned}$$

$(*)$ Això és cert perquè

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}\right) \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow S = \frac{1}{2}\left(1+S-\frac{1}{2^{n-1}}\right) \Longrightarrow S = 1-\frac{1}{2^{n-1}} < 1\end{aligned}$$

• **Conclusió:** Existeix el $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ i és un nombre real. Es pot demostrar que és irracional. Les seves primeres xifres són 2.718281828459 i rep el nom de número e. □

C Problemes proposats. [Novembre 2001]



C 1. Compteu el nombre de triangles de cadascuna de les figures adjuntes. Trobeu i justifiqueu una expressió pel nombre de triangles que resultarien, si en lloc de traçar 0, 1 o 2 rectes, des de cada vèrtex inferior, en tracéssiu n.
Solució: $a_0 = 1,\ a_1 = 8,\ a_2 = 27,\ \ldots, a_n = (n+1)^3$

C 2. Calculeu:

a) Una expressió no recurrent per a $a_0 = 1,\ a_n = a_{n-1} + \binom{p+n}{p}$, en què $p \in \mathbb{N}$ i $n \geq 1$.

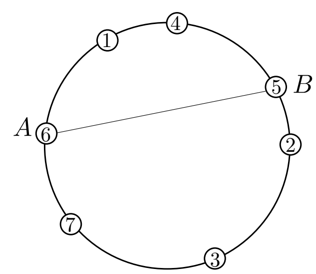
b) $s_n = s_{n-1} + \dfrac{1}{n(n+1)}$ i $s_1 = \dfrac{1}{2}$.

c) $\left(1 - \dfrac{1}{2^2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{3^2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$.

d) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{2^2} + \dfrac{3}{2^3} + \cdots + \dfrac{n}{2^n}$.

e) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + (n-1) \cdot n$.

Solució: a) $a_n = \binom{p+n+1}{p+1}$. b) $s_n = \frac{n}{n+1}$. c) $a_n = \frac{n+1}{2n}$. d) $2 - \frac{n+2}{2^n}$. e) $2\binom{n+1}{3}$.



C 3. [XXIV Olimpíada Matemàtica Espanyola, 1987–1988] Considereu $n > 3$ punts sobre una circumferència, numerats des de 1 fins a n, posats en un ordre qualsevol. Quantes parelles de punts A i B no adjacents existeixen, tals que els punts continguts en algun dels dos arcs que determinen, tinguin els seus nombres associats, més petits que els nombres associats a A i B.
Solució: $a_n = n - 3$

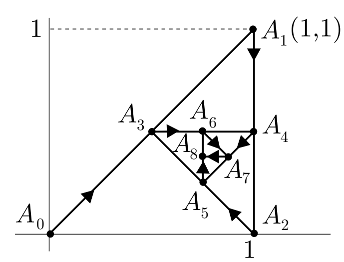
C 4. [IX Olimpíada Matemàtica Catalana, 1971–1972]

Demostreu la desigualtat $n! < \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$, $\forall n > 1$, $n \in \mathbb{N}$.

C 5. Donada la recurrència $a_n = \lambda a_{n-1} + \mu a_{n-2}$, $\mu \neq 0$, demostreu que si $\lambda^2 + 4\mu < 0$, i les solucions de l'equació característica són $\alpha_1 = R_\theta$, $\alpha_2 = R_{-\theta}$, llavors totes les solucions es poden presentar com

$$x_n = R^n \left(M\cos(n\theta) + N\sin(n\theta)\right).$$

C 6. [Adaptació d'un problema de la XII Olimpíada Matemàtica Catalana, 1974–1975]
Observeu la trajectòria $A_0A_1A_2A_3\ldots A_n\ldots$, en què els angles $\widehat{A_{k-1}A_kA_{k+1}} = 45°$. Trobeu les coordenades del punt límit de la successió de punts A_n, quan $n \longrightarrow \infty$.
Solució: $\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right)$



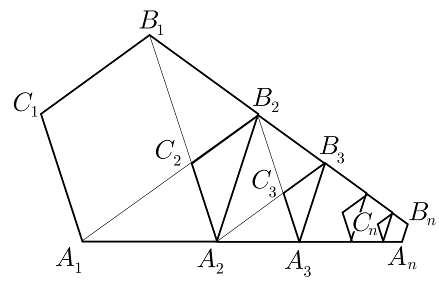
C 7. Considereu un polígon convex de n costats tal que tres diagonals no es tallen mai en un mateix punt interior. Calculeu:

a) El nombre d'interseccions, interiors al polígon, determinades per les diagonals.

b) El nombre de regions en que queda dividit el polígon.

Solució: a) $\binom{n}{4}$ b) $\binom{n-1}{2}+\binom{n-1}{3}+\binom{n-1}{4}$

C 8. Siguin el pentàgon regular $A_1A_2B_2B_1C_1$ de costat unitat, i el punt C_2 d'intersecció de les diagonals A_1B_2 i A_2B_1.



a) Calculeu el valor numèric de la raó B_1A_2/B_1B_2.

b) Si prolonguem B_1B_2 fins B_3 i A_1A_2 fins A_3, tals que $A_2A_3 = B_2B_3 = B_2C_2$, demostreu que el pentàgon $A_2A_3B_2B_3C_2$ és regular.

c) Si repetim la construcció un nombre indefinit de vegades, calculeu el valor de $\lim_{n\to\infty} A_1A_n$.

Solució: a) $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ c) $1+\Phi$

C 9. [BRUNAT, J.M.: *Combinatòria i teoria de grafs*. UPC, Barcelona, 1997]

Siguin les *expressions legals sense parèntesis* formades pels dígits 0,1,2,. . . ,9 i les tres operacions binàries $+, *, /$. Suposem que es respecta la jerarquia de les operacions i les que tenen la mateixa jerarquia s'efectuen d'esquerra a dreta. Quin és el nombre d'expressions aritmètiques legals que tenen n símbols?

Solució: $\frac{5}{\sqrt{36}}\left[(5+\sqrt{36})^n-(5-\sqrt{36})^n)\right]$

C 10. [Grimaldi, R.P.: *Matemáticas discreta y combinatòria*. Addison-Wesley, México D.F., 1989] Resoleu el següent determinant:

$$\begin{vmatrix} a & a & 0 & 0 & \cdots & & \cdots & & & \\ a & a & a & 0 & \cdots & & \cdots & & & \\ 0 & a & a & a & \cdots & & \cdots & & & \\ & \vdots & & & \ddots & & \vdots & & & \\ & \cdots & & & \cdots & a & a & a & 0 \\ & \cdots & & & \cdots & 0 & a & a & a \\ & \cdots & & & \cdots & 0 & 0 & a & a \end{vmatrix}$$

Solució: $a^n[\cos(n\pi/3)+(1/\sqrt{3})\sin(n\pi/3)]$

C 11. En un aparcament de n places, totes iguals, hi poden aparcar motocicletes i cotxes. Les primeres necessiten una plaça i els cotxes dues places. Quantes possibles maneres d'aparcar hi ha? (No es fan distincions dins de cadascun dels dos tipus de vehicles i es fa distinció entre les configuracions cotxe–moto i moto–cotxe.)

Solució: $\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$

C 12. [XVII Olimpíada Matemàtica Espanyola, 1980–81]

Calculeu la suma dels n sumands

$$7+77+777+\cdots+777\ldots77.$$

Solució: $\frac{7}{81}\left(10^{n+1}-9n-10\right)$.

C 13. [XXXV Olimpíada Matemàtica Espanyola, 1998–99]

Proveu que existeix una successió d'enters positius $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, tal que $a_1^2 + a_2^2 + \cdots a_n^2$ és un quadrat perfecte per a tot enter positiu n.
Solució: $a_1 = p,\ a_2 = \frac{p^2-1}{2},\ p$ senar, $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{2}\,a_{n-1}^2,\ n > 2$.
Exemple concret: $3, 4, 12, 84, 3612, \ldots$

C 14. [XVI Olimpíada Matemàtica Catalana, 1979–1980)]

Es considera la successió recurrent

$$a_{n+1} = a_n^2 - 2 \quad \text{amb} \quad a_1 = 14.$$

Demostreu per inducció que per a tot $n \geq 1$, el nombre

$$\sqrt{3(a_n^2 - 4)},$$

és un enter divisible per 4. Com a aplicació, demostreu que existeixen infinits triangles tals que els costats mesuren enters consecutius i l'àrea és també un nombre enter.

Indicació: L'àrea S d'un triangle de costats a, b i c, i perímetre $2p$ es pot calcular a partir de la *fórmula d'Heron*:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

C 15. ["El problema del mes de novem/99". www.xtec.es/recursos/mates/aqui/index.htm]

Suposem que tenim una corda elàstica fixada per un extrem a una paret i que la podem dilatar a voluntat per l'extrem contrari. Sobre la corda s'hi desplaça una eruga que inicialment es troba a l'extrem de la corda fixat a la paret. La velocitat de l'eruga és de 1 cm/s. A més, inicialment, la corda mesura 1 km. i la dilatem de manera discreta 1 km cada segon. (Cal suposar que cada cop que estirem, la corda "arrossega" l'eruga, és a dir, si abans de la dilatació l'eruga estava ocupant la posició 1/3 de corda, després d'haver-la estirat també estarà en la posició 1/3 la corda.)

a) Arriba l'eruga a l'altre extrem de la corda en un temps finit?
b) En cas de ser així, quant trigarà? [Difícil! Cercar informació sobre la constant d'Euler.]

Solució: $1.576 \cdot 10^{43429}$ s $= 5.067 \cdot 10^{43421}$ anys

C 16. ["El problema del mes d'abril/99". www.xtec.es/recursos/mates/aqui/index.htm]

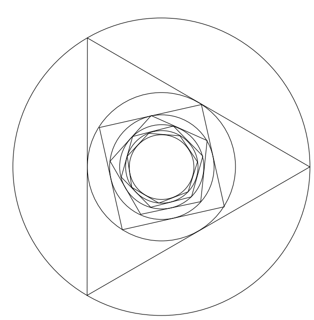
En una circumferència c_1 de radi r_1 hi inscrivim un triangle equilàter P_1. Tracem la circumferència c_2 inscrita a P_1 i sigui r_2 el seu radi. Ara dibuixem un quadrat P_2 inscrit a c_2 i hi tracem la circumferència inscrita c_3, la qual té radi r_3. En un pentàgon regular P_3 inscrit a c_3 hi dibuixem la circumferència inscrita c_4 de radi r_4, ... A la circumferència c_n li inscrivim un polígon regular P_n de $n+2$ costats i hi dibuixem la circumferència inscrita c_{n+1} de radi r_{n+1}, etc.

Trobeu el límit r de la successió

$$r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n, \ldots$$

i esbrineu si es compleix:

$$r = \frac{r_1}{12}$$



Solució: $r_n = r_{n-1} \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$. Per a la segona part consulteu la web de l'enunciat.

C 17. En el càlcul de la derivada enèsima de $f(x) = \tan x$ obtenim un polinomi de variable $\tan x$ del tipus

$$f^{(n)}(x) = \sum_{p=1}^{n+1} a_{n,p} \tan^p x.$$

Trobeu una expressió recurrent per als coeficients $a_{n,p}$.
Solució: Els coeficients $a_{n,p}$ per als primers valors de la n són:

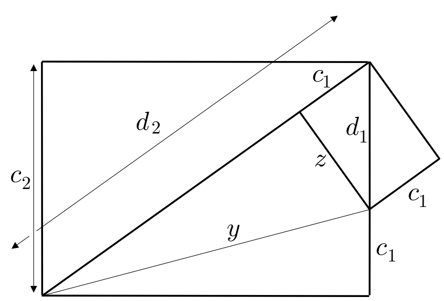
n \ p	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
0		0	1						
1		1	0	1					
2		0	2	0	2				
3		2	0	8	0	6			
4		0	16	0	40	0	24		
5		16	0	136	0	240	0	120	
6		0	272	0	1232	0	1680	0	720

en què totes les cel·les buides tenen el valor 0. Llavors,

$$a_{n,p} = (p+1)\, a_{n-1,p+1} \;+\; (p-1)\, a_{n-1,p-1}$$

en què $a_{n,-1} = 0,\; a_{0,p} = 0\ \forall p \neq 1,\;$ i $a_{0,1} = 1$.

C 18. Tenim els rectangles, de la figura adjunta, en què $c_1 = 1$, $\left(\frac{d_1}{c_1}\right)^2 = A \in \mathbb{N}$ i $A \geq 2$.



a) Expresseu c_2 i d_2 en funció de d_1 i c_1.

b) A partir del segon rectangle construïu-ne un tercer amb les mateixes condicions, —costat $d_2 + c_2$ i diagonal resultant de la prolongació de $c_1 + d_1$—. Repetiu el procés iteradament i definiu c_n i d_n de forma recurrent.

c) Aproximem el valor de d_1 fent $d_1 = 1$, —no us preocupeu de la bondat de l'aproximació—. Demostreu per inducció que $d_n^2 - Ac_n^2 = (1-A)^n$.

d) Justifiqueu que si $x_n = \frac{d_n}{c_n}$, llavors x_n^2 convergeix a A i, per tant, x_n convergeix a $\sqrt{A}$.

e) Justifiqueu que $x_n = \frac{A + x_{n-1}}{1 + x_{n-1}}$, i utilitzeu-la per aproximar $\sqrt{21}$. Construïu un gràfic en què es visualitzi el procés de convergència amb l'ajut de la funció $f(x) = \frac{21+x}{1+x}$.

f) Optimitzeu i visualitzeu la velocitat de l'aproximació anterior observant que

$$\sqrt{A} = \sqrt{a^2 + b} = a\sqrt{1 + \frac{b}{a^2}} \quad \text{en què} \quad A \in \mathbb{Z} \text{ i } a^2 < A < (a+1)^2.$$

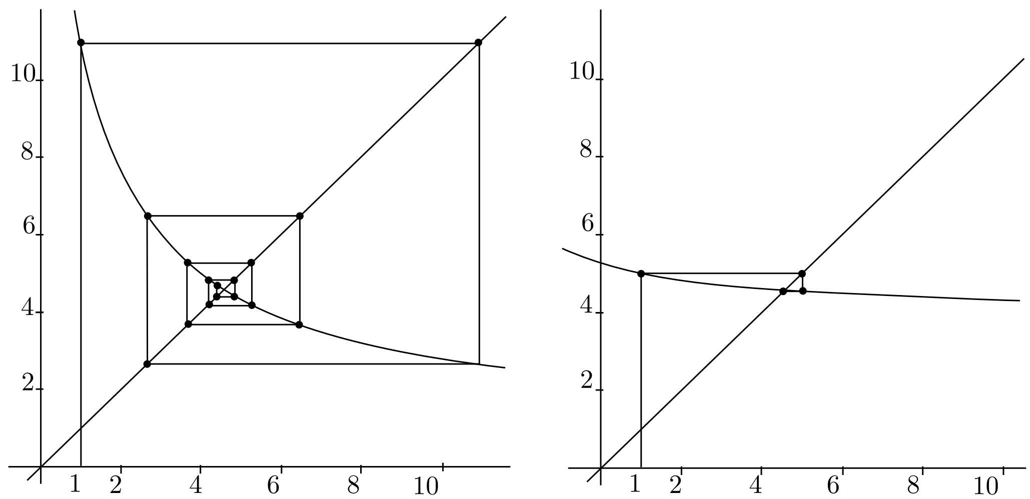
Indicació: Definiu (c_n, d_n) com abans, a partir de $A_1 = 1 + \frac{b}{a^2}$, i considereu $x_n = a\frac{d_n}{c_n}$. Amb això podreu obtenir la successió recurrent,

$$x_n = \frac{A + ax_{n-1}}{a + x_{n-1}} \quad \text{en què} \quad A \in \mathbb{Z} \text{ i } a^2 < A < (a+1)^2.$$

Solució: a) $c_2 = c_1 + d_1,\ d_2 = Ac_1 + d_1$ b) $c_{n+1} = c_n + d_n,\ d_{n+1} = Ac_n + d_n$
e) A partir de $x_1 = 1$ i $x_n = \frac{21+x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$ obtenim les aproximacions

1, 11, 2.66666, 6.45454, 3.68292, 5.27083, 4.18936, 4.85403, 4.41644, 4.69245.

Amb l'ajut de la funció $f(x) = \frac{21+x}{1+x}$, els visualitzem en el gràfic de sota a l'esquerra.



e) A partir de $x_1 = 1$ i $x_n = \frac{21+4x_{n-1}}{4+x_{n-1}}$ obtenim les aproximacions

1, 5, 4.55555, 4.58441, 4.58245, 4.58258, 4.5825751, 4.5825757, 4.582575692, 4.582575695.

Amb l'ajut de la funció $f(x) = \frac{21+4x}{4+x}$, els visualitzem en el gràfic superior de la dreta.

C 19. Siguin $A \in \mathbb{N}$, un sistema de referència ortonormal $(O; OX, OY)$ i les circumferències $\mathcal{C}_n$ tals que:

– Són tangents a l'eix OX en el punt $T(\sqrt{A}, 0)$.
– $\mathcal{C}_0 \cap \text{eix}\{OY\} = \{P_0(0, p_0), Q(0, q_0)\}$, amb $p_0 > q_0 > 0$.
– $\mathcal{C}_n \cap \text{eix}\{OY\} = \{P_n(0, p_n), Q(0, q_n)\}$, amb $p_n = \dfrac{p_{n-1} + q_{n-1}}{2}$.

a) Trobeu una expressió recurrent per a q_n.

b) Demostreu que $0 < p_n - q_n < \dfrac{p_0 - q_0}{2^n}$, $\forall n \geq 1$.

c) Demostreu que $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \lim\limits_{n\to\infty} q_n = \sqrt{A}$.

d) Trobeu una expressió recurrent per a p_n que no depengui de q_n, i una per a q_n que no depengui de p_n. Utilitzeu aquestes expressions per obtenir dues funcions $p(x)$ i $q(x)$, que permetin visualitzar el procés de convergència de p_n i q_n cap a $\sqrt{A}$.

Solució: a) $q_n = \frac{2p_{n-1}q_{n-1}}{p_{n-1}+q_{n-1}}$ d) $p_n = \frac{p_{n-1}^2+A}{2p_{n-1}},\ q_n = \frac{2Aq_{n-1}}{q_{n-1}^2+A},\ f(x) = \frac{x^2+A}{2x},\ g(x) = \frac{2Ax}{x^2+A}$

Índex