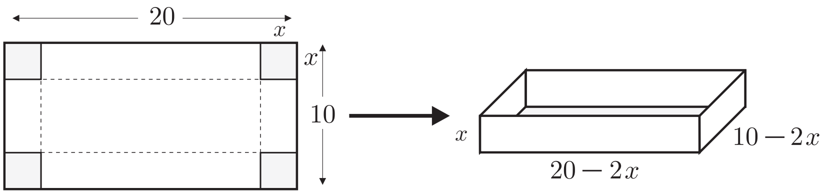
Càlcul diferencial

Una introducció

Ramon Nolla
Departament de Matemàtiques
IES Pons d'Icart

1 Introducció

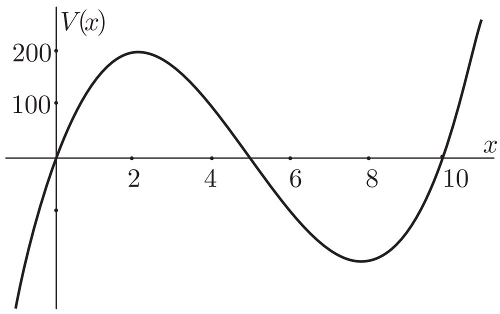
Proposarem un problema el qual primerament resoldrem de manera força aproximada. Observarem que la introducció del concepte de *funció derivada*, complex a primera vista, ens permetrà obtenir una solució exacta gràcies al desenvolupament d'unes tècniques ràpides i senzilles que en podrem deduir.
Suposem que tenim una cartolina rectangular de dimensió qualsevol, per fixar idees 10 cm × 20 cm. Volem construir una caixa, —un paral·lelepípede rectangular—, sense tapa, retallant quatre quadrats de les mateixes dimensions dels seus quatre cantons, de manera que el seu volum sigui el més gran possible.



El volum $V(x)$ per als diferents valors del costat x del quadrat retallat és:

$$V(x) = (10 - 2x)(20 - 2x)x = 4(x^3 - 15x^2 + 50x), \quad \text{on } 0 < x < 5.$$

Si representem gràficament alguns dels valors de la funció s'obté aproximadament la corba adjunta. Observant la taula de valors següent veiem que la *solució aproximada* del problema consisteix en retallar un quadrat de costat $x = 2.113$, de manera que s'obté un volum màxim de 192.4500896 unitats quadrades.

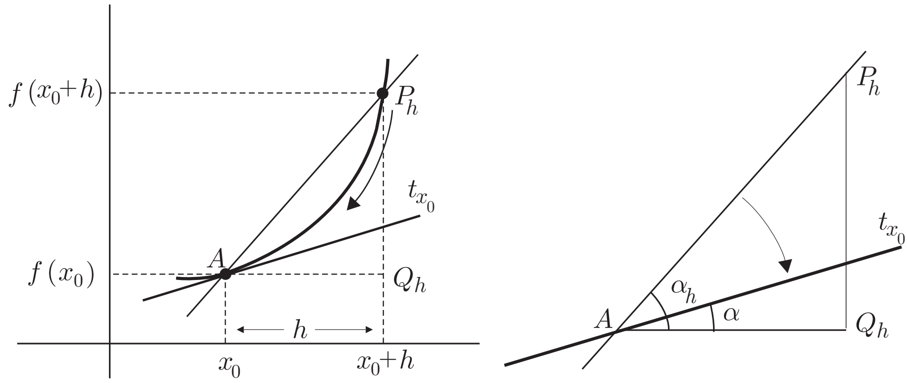


x	$V(x)$	x	$V(x)$	x	$V(x)$
1	144	2.11	192.4497	2.114	192.4500701
2	192	2.12	192.4485	2.1131	192.4500889
3	168	2.111	192.4499	2.1132	192.4500896
2.1	192.444	2.112	192.4500357	2.1133	192.4500896
2.2	192.192	2.113	192.4500875	2.1134	192.4500889

Per prevenir possibles irregularitats del gràfic i per saber el punt exacte en què aquest assoleix l'alçada màxima notem que aquest punt té una característica que el diferencia de "quasi" tots els altres: el pendent o inclinació de la corba és nul, mentre que en els altres punts és positiu quan la funció creix i negatiu quan decreix. Llavors, per a un càlcul exacte de la solució del problema, n'hi haurà prou amb trobar una bona expressió del pendent $m(x)$ en cada punt $(x, V(x))$ de la corba, i resoldre l'equació $m(x) = 0$.

El problema general que se'ns planteja consisteix en, donada una funció $f(x)$, trobar una expressió pel pendent del seu gràfic en un punt $A(x_0, f(x_0))$. La reflexió sobre la idea de pendent o inclinació de la corba en el punt A, porta a a la seva identificació amb el pendent de la recta tangent t_{x_0} en aquest punt. Ara bé, si considerem el punt A i a la seva vora els punts $P_h(x_0 + h, f(x_0 + h))$, observem que *la recta tangent t_{x_0} ocupa la posició límit de les rectes secants AP_h quan P_h s'apropa, sobre la corba, a A, és a dir quan h* tendeix *a* 0. Llavors,

> el pendent de la corba en x_0, és a dir el pendent $m(x_0)$ de la recta tangent en x_0, s'obtindrà com el límit dels pendents de les rectes secants AP_h quan h tendeix a 0.



Sabem que el pendent de AP_h ve donat com la relació o quocient entre els valors (amb signe) dels desplaçaments vertical i horitzontal necessaris per traslladar-nos d'A fina a P_h, és a dir per la tangent trigonomètrica de l'angle $\alpha_h = \widehat{Q_h A P_h}$:

$$\text{pendent } AP_h = \tan \alpha_h = \frac{Q_h P_h}{AQ_h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}\,.$$

O sigui que el valor del pendent de la corba en el punt d'abscissa x_0 és

$$m(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{P_h Q_h}{AQ_h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}\,, \tag{1}$$

en què la notació $\lim\limits_{h \to 0}$ significa que cerquem el valor cap el que tendeixen els valors de la fracció quan el valor de h es fa petit i més i més pròxim a zero.
Aquest límit té interpretacions en d'altres camps no estrictament geomètrics, com la física, — vegeu el problema 6—, l'economia, etc. Per aquest motiu es fa abstracció de la seva interpretació geomètrica i l'expressió (1) es pren com a definició del concepte de *derivada* f' de la funció f, el qual rep el nom i la notació del matemàtic francès Lagrange (1736–1813), a qui no satisfeien les nomenclatures dels seus creadors Newton (1643–1727) i Leibniz (1646–1716). Més endavant, estudiarem les seves propietats les quals proporcionaran unes tècniques que permetran resoldre de manera ràpida i exacta el problema del volum i molts d'altres.[1]

[1] Apuntem dues observacions:

- Recordem que es treballa amb funcions reals de variable real, la qual cosa es representa amb la notació

$$f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \text{en què} \quad A = \text{Dom} f.$$

- Algunes demostracions es troben a l'apèndix final amb la doble finalitat de no enfrontar-se a elles en una primera lectura i que puguin ser pensades com a exercicis. Deixarem teoremes sense demostració rigorosa, i insistirem en una aproximació intuïtiva a la seva validesa i significat. En aquests casos, les demostracions es podrien considerar com a exercicis, o deixar-les per a revisions posteriors de la matèria.

2 Concepte de funció derivable

2.1 Primeres definicions

Definició 2.1 *Una funció f és derivable en un punt x_0, si existeix i és finit el límit:*

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \tag{2}$$

El valor d'aquest límit ve representat per l'expressió $f'(x_0)$, rep el nom de *derivada de f en el punt x_0* i es llegeix "f prima de x_0".
Si no existeix el límit (2), la funció f no és derivable en x_0; en aquest cas si existeix el límit amb la restricció $h>0$ o $h<0$, és a dir si existeix algun dels límits laterals

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \text{o} \quad \lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

es diu que f té *derivada lateral $f'_+(x_0)$ per la dreta*, i/o *derivada lateral $f'_-(x_0)$ per l'esquerra en x_0*.[2]
Observem que una interpretació geomètrica de l'existència de derivada en un punt x_0 és la d'existència de recta tangent única en el punt d'abscissa x_0. La no existència de derivada i l'existència de derivades laterals diferents implica geomètricament l'existència de tangents "laterals" en el punt x_0. Això últim significa que existeixen dues tangents en el punt x_0, una respecte dels punts del gràfic amb $x>x_0$ i l'altra respecte dels punts del gràfic amb $x<x_0$.
Finalment, si observem tots els punts en què existeix derivada, podem considerar la nova funció que resulta d'associar a cada punt x, la derivada de la funció f en aquest punt. Aquesta nova funció donarà molta informació sobre la funció f, i es defineix així:

Definició 2.2 *Anomenem funció derivada de f a la funció*

$$\begin{array}{rccc} f' : & A\subset\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x\in A & \longmapsto & f'(x)\,, \end{array}$$

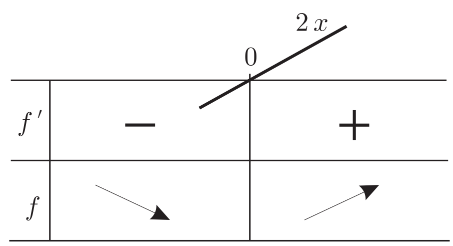
en què A és el domini de derivabilitat de la funció f.

Exemple 2.1 *Derivabilitat de $f(x)=x^2$ en qualsevol punt $x\in\mathbb{R}$. Interpretació de la seva funció derivada respecte de l'estudi de la monotonia.*[3]

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2+2hx}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(h+2x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}(h+2x) = 0+2x = 2x \Longrightarrow \boxed{f'(x)=2x}.$$

Sabem que $f'(x)=2x$. Això vol dir que per a $x>0$ el pendent de la recta tangent és positiu, per a $x<0$ el pendent és negatiu, i per a $x=0$ el pendent és nul. Llavors, és força evident que f creix per a $x>0$, decreix per a $x<0$, i té un valor mínim per a $x=0$.



□

[2] Vegeu l'exemple 2.2.
[3] La qüestió de la monotonia es tracta amb més detall a la secció 10, pàg. 24.

Exemple 2.2 *$f(x) = |x^2 - 4|$ no és derivable en $x = -2$, i existeixen $f'_+(-2)$ i $f'_-(-2)$.*

Observem que

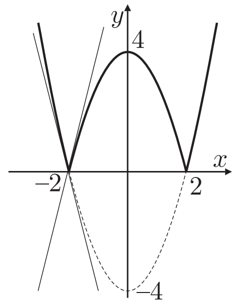
$$\lim_{h\to 0} \frac{|(-2+h)^2 - 4| - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h^2 - 4h|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h||h-4|}{h}\,.$$

Per poder esbrinar l'existència del límit hauríem de poder simplificar els factors $|h|$ i h que donen lloc a la indeterminació 0/0. Per aconseguir-ho hem de fer desaparèixer el valor absolut, la qual cosa aconseguirem si considerem el signe de h. Això ens porta a cercar els límits laterals:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{h|h-4|}{h} = \lim_{x\to 0^+} |h-4| = 4\,, \qquad \lim_{h\to 0^-} \frac{-h|h-4|}{h} = \lim_{x\to 0^-} -|h-4| = -4.$$

Per tant, existeixen $f'_+(-2) = 4$ i $f'_-(-2) = -4$ i, en ser diferents, no existeix $f'(-2)$. De la mateixa manera haguéssim trobat que $f'_+(2) = 4$ i $f'_-(2) = -4$.

En el gràfic adjunt, observem que si dibuixem les rectes de pendent 4 i -4, que passen pel punt de la corba d'abscissa $x = -2$, obtenim les rectes tangents "laterals". També podem observar una característica "visual" d'aquest punt, la corba té un canvi sobtat d'orientació i es forma un angle de costats curvilinis; podem expressar aquesta situació dient que ens trobem davant d'un *punt angulós*.



Finalment, comentem que per representar la funció hem seguit un procés de dues etapes:

– Primerament hem representat la paràbola d'equació $g(x) = x^2 - 4$.

– En segon lloc hem considerat el valor absolut $|g(x)|$. Això porta a deixar el gràfic de $g(x)$ intacte quan es troba pel damunt de l'eix OX perquè $g(x) > 0$; i quan el gràfic es troba per sota d'aquest eix, és a dir $g(x) < 0$, cal prescindir d'ell i traçar el gràfic simètric respecte de l'eix OX.

En un llenguatge més tècnic, si anomenem $g(x) = x^2 - 4$ i $h(x) = |x|$, presentem les dues etapes amb l'esquema següent:

$$x \xrightarrow{g} g(x) = x^2 - 4 \xrightarrow{h} h(g(x)) = |x^2 - 4|\,.$$

En una situació com aquesta direm que hem utilitzat la *composició* $h \circ g$ de les funcions g i h, la qual es presenta amb la notació i definició següents:[4]

$$(h \circ g)(x) = h(g(x)).$$

□

Exemple 2.3 *Desenllaç del problema de la caixa de volum màxim de la introducció.*

Recordem que volem esbrinar quan $V'(x) = 0$, essent $V(x) = 4(x^3 - 15x^2 + 50x)$.

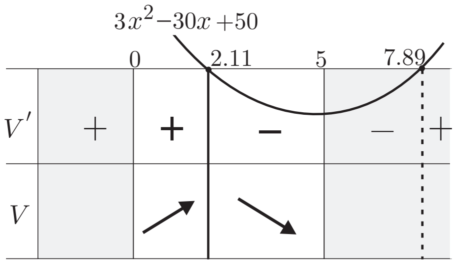
$$\begin{aligned}
V'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{V(x+h) - V(x)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{4[(x+h)^3 - 15(x+h)^2 + 50(x+h)] - 4(x^3 - 15x^2 + 50x)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{4(3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 30hx - 15h^2 + 50h)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} 4(3x^2 + 3xh + h^2 - 30x - 15h + 50) \;=\; 4(3x^2 - 30x + 50)\,.
\end{aligned}$$

[4]En la secció 7 presentarem amb més detall la composició de funcions

Llavors,

$$0 = V'(x) = 4(3x^2 - 30x + 50) \Longrightarrow x = \frac{30 \pm \sqrt{300}}{6} = 5 \pm \frac{5}{3}\sqrt{3} = \begin{array}{l} \nearrow \ 2.1132487 \\ \searrow \ 7.8867513 \end{array}$$

Finalment, si interpretem $V'(x)$ com el pendent del gràfic de $V(x)$, el seu signe ens informa del creixement o decreixement d'aquesta funció, en el domini $]0, 5[$,tal com veiem a l'esquema adjunt. Així, observem que la funció té pendent positiu en $[0, 5 - \frac{5}{3}\sqrt{3}[$ i pendent negatiu en $]5 - \frac{5}{3}\sqrt{3}, 5]$.



Per tant el volum és màxim quan $x = 5 - \frac{5}{3}\sqrt{3} \approx 2.1132487$, que s'ajusta a l'aproximació trobada anteriorment a la introducció.
El problema està finalment resolt. Malgrat que no ha sigut necessari per arribar fins aquí, podem plantejar-nos d'observar analíticament si el gràfic de la funció fora del domini $]0, 5[$ s'ajusta en alguns aspectes al que hem elaborat amb les taules de la pàgina 1. Una de les qüestions que podríem esbrinar és el comportament de $f(x)$ quan x pren valors més i més grans en valor absolut, per damunt de qualsevol nombre que fixem, és a dir el "límit" de $V(x)$ quan x tendeix a "més infinit" $(+\infty)$ o a "menys infinit" $(-\infty)$. Segons el gràfic esmentat hauríem d'obtenir $\lim_{x\to+\infty} V(x) = +\infty$ i $\lim_{x\to-\infty} V(x) = -\infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} V(x) &= \lim_{x\to+\infty} (4x^3 - 60x^2 + 200x) = \infty - \infty \\ \lim_{x\to-\infty} V(x) &= \lim_{x\to-\infty} (4x^3 - 60x^2 + 200x) = -\infty - \infty - \infty = -\infty \end{aligned}$$

El segon límit coincideix amb el resultat esperat, però el primer no queda clar perquè no sabem cap on pot tendir la diferència de dos nombres que "es fan grans". Manipularem l'expressió de $V(x)$ de manera que puguem decidir:

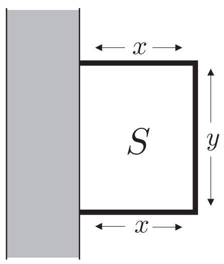
$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} V(x) &= \lim_{x\to+\infty} (4x^3 - 60x^2 + 200x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 \left(4 - \frac{60}{x} + \frac{200}{x^2}\right) = \\ &= +\infty(4 - 0 + 0) = +\infty \cdot 4 = +\infty. \end{aligned}$$

També coincideix amb el que s'observava en el gràfic. □

Exemple 2.4 *Un camp rectangular d'àrea S, situat a la vora d'un riu s'ha de tancar per tres costats. Trobeu la longitud mínima de tanca que es necessita.*

Es tracta de minimitzar la funció $P(x, y) = 2x + y$, en què les variables estan sotmeses a la condició $x \cdot y = S$. És a dir, cal trobar el mínim de la funció

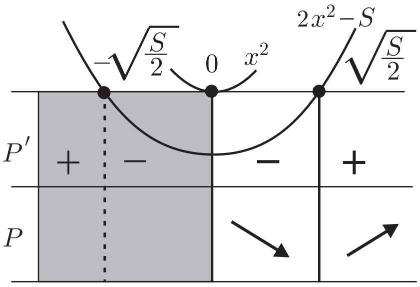
$$P(x) = 2x + \frac{S}{x}, \text{ a l'interval } x > 0.$$



Estudiarem la derivada $P'(x)$.

$$\begin{aligned} P'(x) &= \lim_{h\to0} \frac{P(x+h) - P(x)}{h} = \lim_{h\to0} \frac{2(x+h) + \frac{S}{x+h} - 2x - \frac{S}{x}}{h} = \\ &= \lim_{h\to0} \frac{2h(x+h)x + Sx - Sx - Sh}{h(x+h)x} = \lim_{h\to0} \frac{2x^2 + 2hx - S}{(x+h)x} = \frac{2x^2 - S}{x^2} \end{aligned}$$

El signe de $P'(x)$ informa del creixement o decreixement d'aquesta funció, en el domini $]0, +\infty[$,tal com veiem a l'esquema adjunt. Així, observem que:



$$P'(x) < 0 \Longleftrightarrow x \in \left]0\,,\ \sqrt{\tfrac{S}{2}}\right[.$$

$$P'(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in \left]\sqrt{\tfrac{S}{2}}\,,\ +\infty\right[.$$

Llavors, P és monòtona decreixent en el primer interval i monòtona creixent en el segon. Per tant, hi ha un mínim absolut en $x = \sqrt{\dfrac{S}{2}}$, i el seu valor és $P\left(\sqrt{\dfrac{S}{2}}\right) = 2\sqrt{2S}$. □

2.2 Interpretació geomètrica de la derivada

Recordem que després de l'estudi de la introducció, pàg. 2, podem afirmar que:

> El valor $f'(x_0)$ de la derivada de f en un punt x_0 coincideix amb el pendent de la recta tangent al gràfic de f en el punt $(x_0, f(x_0))$.

Conseqüentment l'equació de la recta tangent al gràfic d'una funció f en el punt d'abscissa $x = x_0$, en el qual la funció és derivable, és

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)\,. \tag{3}$$

Exemple 2.5 *Recta tangent al gràfic de la funció $f(x) = x^2$ en $x = -1$.*

Segons l'exemple 2.2, $f'(-1) = -2$ i, en ser $f(-1) = 1$, l'equació serà

$$y - 1 = -2(x + 1) \quad \text{o bé} \quad y = -2x - 1\,.$$

□

Exemple 2.6 *Recta tangent al gràfic de $f(x) = |x^2 - 4|$ en $x = -2$.*

Segons l'exemple 2.2, no hi ha recta tangent però hi ha rectes tangents laterals. És a dir si considerem la corba només pels punts $x \geq -2$ obtenim la tangent per la dreta $y = 4x + 8$; i si només la considerem pels punts $x \leq -2$ obtenim la tangent per l'esquerra $y = -4x - 8$. □

3 Derivades d'algunes funcions elementals. Àlgebra de derivades

Un cop entrevist l'interès del càlcul de derivades, caldria trobar la manera de fer-lo més àgil. Ho aconseguirem amb la recerca de les derivades de les funcions elementals i l'establiment de l'actuació de la derivada sobre les operacions de l'àlgebra de funcions.

Teorema 3.1

a) $f(x) = K \Longrightarrow f'(x) = 0.$

b) $\left.\begin{array}{c} g(x) = x^n \\ n \in \mathbf{N} \end{array}\right\} \Longrightarrow g'(x) = nx^{n-1}.$

c) $h(x) = \sqrt{x} \Longrightarrow h'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}.$

d) $l(x) = \sqrt[3]{x} \Longrightarrow l'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$

Prova.
a) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{K-K}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 0 = 0.$

b) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^n - x^n}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \cdots + \binom{n}{n}h^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\binom{n}{1}x^{n-1}h + \cdots + \binom{n}{n}h^n}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h\left[\binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \cdots + \binom{n}{n}h^{n-1}\right]}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \cdots + \binom{n}{n}h^{n-1}\right] = \binom{n}{1}x^{n-1} = nx^{n-1}\,.$$

Les demostracions dels apartats c) i d) es deixen com a exercicis i estan a l'apèndix A. És interessant notar que si utilitzem la notació exponencial per a les arrels quadrades i cúbiques es compleix la regla de derivació que satisfeien les potències naturals:

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2}x^{1/2-1} \qquad\qquad l'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3}x^{1/3-1}\,.$$

□

Teorema 3.2 *Si f i g són derivables en un punt x_0, llavors:*

- *$f \pm g$ és derivable en x_0, i $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$*
- *$f \cdot g$ és derivable en x_0, i $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)\,.$*

Si, a més, $g(x_0) \neq 0$, llavors:

- *$\dfrac{f}{g}$ és derivable en x_0, i $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}\,.$*

Les demostracions es troben a l'apèndix A. A partir d'aquests teoremes és quasi immediat establir el resultat següent, el qual ens serà molt útil en el càlcul de derivades.

Teorema 3.3 *Si $k \in \mathbb{R}$ i f és derivable en x_0, llavors la funció $k \cdot f$ és derivable en x_0 i*

$$(k \cdot f)'(x_0) = k \cdot f'(x_0).$$

Prova. $(k \cdot f)'(x_0) = 0 \cdot f(x_0) + k \cdot f'(x_0) = 0 + k \cdot f'(x_0) = k \cdot f'(x_0)$ □

Exemple 3.1 *Les funcions polinòmiques $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, són derivables en qualsevol punt.*

Efectivament, són el resultat de sumar els productes de funcions constants a_p amb funcions potencials x^p. Per tant aplicant els resultats anteriors

$$f'(x) = a_n n x^{n-1} + a_{n-1}(n-1)x^{n-2} + \cdots + a_1.$$

□

Exemple 3.2 *Càlcul de la funció derivada de $f(x) = \dfrac{4x^2-2}{x^2+1}$.*

La derivabilitat del quocient de funcions derivables ens permet escriure:

$$f'(x) = \frac{8x(x^2+1) - 2x(4x^2-2)}{(x^2+1)^2} = \frac{12x}{(x^2+1)^2}\,.$$

□

Exemple 3.3 *Càlcul de la funció derivada de $f(x) = |x^2 - 4|$ i representació de f i f'.*

Si estudiem el signe de $x^2 - 4$ obtenim:

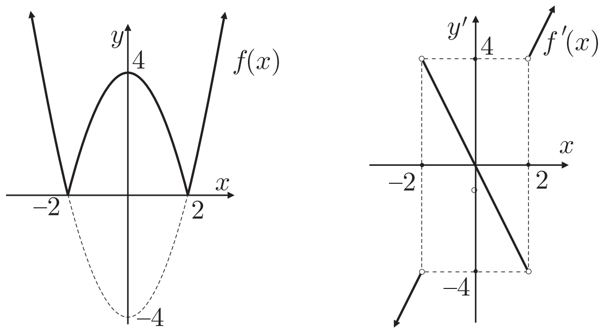
$$\begin{aligned} x^2 - 4 < 0 &\iff x \in]-2, 2[\\ x^2 - 4 = 0 &\iff x = 2 \quad \text{o} \quad x = -2 \\ x^2 - 4 > 0 &\iff x \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[\end{aligned}$$

Llavors, la funció f es pot expressar com

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } x \in]-2, 2[\\ \quad 0 & \text{si } x = 2 \quad \text{o} \quad x = -2 \\ x^2 - 4 & \text{si } x \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[. \end{cases}$$

Per tant, si apliquem les regles proporcionades pel teorema 3.1 i el resultat de l'exemple 2.2, obtenim la funció derivada

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x \in]-2, 2[\\ \ \ 2x & \text{si } x \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[. \end{cases}$$



Fem notar que el gràfic de la funció derivada presenta uns salts que n'impedeixen el traçat *continu*, la qual cosa s'interpreta com un canvi sobtat del pendent del gràfic de la funció f.[5] □

Per acabar aquesta secció trobarem la derivada de la funció $\sin x$.

Teorema 3.4 $f(x) = \sin x \Longrightarrow f'(x) = \cos x$.

Prova. $$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\cos\dfrac{2x+h}{2}\,\sin(h/2)}{h} =$$

$$= \cos x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h/2)}{h/2}\,.$$

Per resoldre aquest últim límit cal tenir en compte la propietat següent que trobareu demostrada a l'apèndix B:

$$\cos(h/2) < \frac{\sin(h/2)}{h/2} < 1\,. \tag{4}$$

Així, si fem tendir la h a 0 observem que, —vegeu el diagrama adjunt—, en tendir $\cos(h/2)$ a 1:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h/2)}{h/2} = 1$$

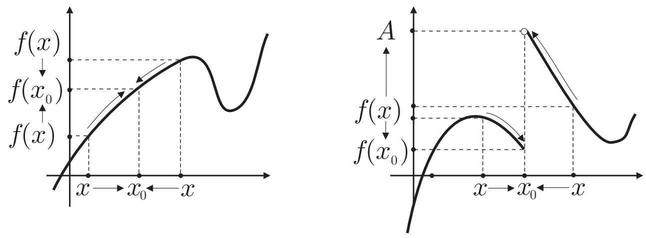
$$\begin{array}{ccccc} \cos(h/2) & < & \dfrac{\sin(h/2)}{h/2} & < & 1 \\ & \searrow_{h\to 0} & \downarrow & \swarrow_{h\to 0} & \\ & & 1 & & \end{array}$$

Per tant, podem concloure que $f'(x) = \cos x \cdot \lim_{h\to 0} \dfrac{\sin(h/2)}{h/2} = \cos x \cdot 1 = \cos x$. □

[5] En la secció 4 tractarem amb més detall el tema de la continuïtat.

4 Funcions contínues i límits.

En l'exemple 3.3 de la pàgina 8 hem trobat una funció amb la propietat que el seu gràfic no era continu en un parell de punts. Així, una primera aproximació al concepte de continuïtat ens el proporciona el gràfic d'una funció que es pot representar d'una sola traçada. La manera d'estudiar la continuïtat en cada punt, és a través del concepte de límit. Efectivament, si observem un punt d'abscissa x_0 d'un gràfic d'una funció f fet d'una sola traçada, verifiquem que quan la variable x tendeix a x_0, la seva imatge tendeix a $f(x_0)$. Això, com es veu a la figura adjunta, no passa quan ens trobem algun tipus de salt en el traçat.



Recordem les ocasions en què, fins ara, ha aparegut el concepte de límit:

- En el càlcul del pendent del gràfic d'una corba en un punt. És a dir, en la introducció del concepte de derivada o de taxa de variació puntual d'una funció.
- En el comportament dels valors d'una funció quan la variable independent x es fa arbitràriament gran, —quan $x \to \infty$—.
- Quan una funció presenta salts finits o infinits en el seu traçat, —quan no és contínua—.

Veiem-ne un altre exemple. En aquest cas ens trobarem amb una funció que no existeix per a $x = 1$, encara que existeix en els punts del seu entorn. Llavors interessarà estudiar el seu comportament en aquest entorn.

Exemple 4.1 *Estudi de la funció* $f(x) = \dfrac{|x^3 - 1|}{x - 1}$.

Observem que no existeix $f(1) = \frac{0}{0}$. En canvi podem estudiar el comportament de $f(x)$ quan x pren valors molt pròxims a 1, en unes altres paraules, "quan x tendeix a 1". Utilitzarem la notació

$$\lim_{x\to 1} f(x), \text{ la qual es llegeix } \textit{límit de f de x quan x tendeix a 1}.$$

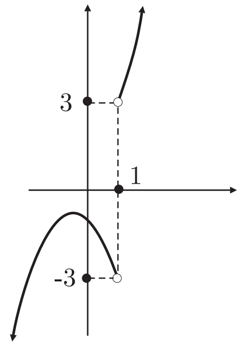
Observem que

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{|(x-1)\overbrace{(x^2+x+1)}^{>0}|}{x-1} = \frac{|(x-1)|(x^2+x+1)}{x-1} = \\ &= \begin{cases} \dfrac{-(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} & ,x<1 \\ \dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} & ,x>1 \end{cases} = \begin{cases} -(x^2+x+1) & ,x<1 \\ x^2+x+1 & ,x>1 \end{cases} \end{aligned}$$

Llavors, si estudiem la "tendència" de $f(x)$ per l'esquerra i dreta de 1, obtenim

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) &= \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (-x^2-x-1) = -1-1-1 = -3. \\ \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) &= \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (x^2+x+1) = 1+1+1 = 3. \end{aligned}$$

Així, tot i no existir $f(1)$, sabem que passa a la vora de 1. Concretament, les imatges s'apropen a -3 i 3, depenent del costat de 1 que es consideri. Amb el gràfic dels dos trossos de paràbola que descriuen la funció es visualitza l'estudi fet. En aquest exemple, també trobem una primera aproximació al concepte de continuïtat. Observem que per traçar aquest gràfic no n'hi ha prou amb una sola traçada. L'estudi del límit ens informa que calen dues traçades. O sigui que el gràfic presenta un punt en que es trenca la continuïtat del traç.



Així una funció serà contínua en un punt x_0 si, quan la variable x tendeix a x_0, la seva imatge tendeix a $f(x_0)$. En la figura inferior, trobem una funció contínua en tots els seus punts i una que no ho és en un punt x_0, en no coincidir el límit amb la imatge.

4.1 Límits de funcions

Formalitzarem el concepte de límit d'una funció i en presentarem algunes propietats. Prèviament, hem de definir el límit d'una successió x_n de nombres reals.

Definició 4.1 *Una successió $x_n \in \mathbb{R}$ tendeix a $A \in \mathbb{R}$, si per a qualsevol entorn de A trobem un nombre infinit de termes de la successió dins de l'entorn i un nombre finit de termes de la successió fora de l'entorn. Això es presenta amb la notació*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A.$$

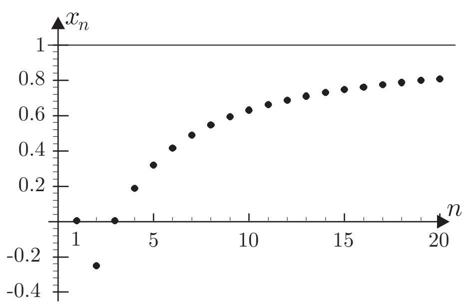
En el cas que per a qualsevol $K \in \mathbb{R}$ trobem infinitat de termes de la successió x_n més grans que K i un nombre finit de termes de la successió més petits que K, diem que la successió té límit igual a més infinit. Es representa,

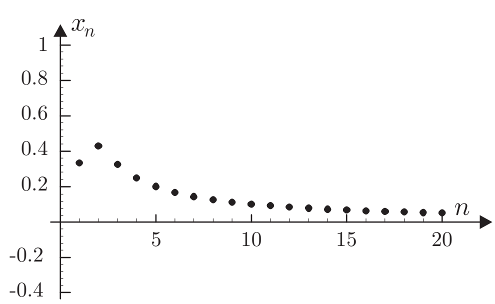
$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty.$$

D'una manera semblant podem definir el límit igual a menys infinit; només cal intercanviar en la definició anterior les paraules "grans" i "petits".

Exemple 4.2 *Càlcul de $\lim_{n\to\infty} x_n$, per a les successions $x_n = \dfrac{n^2-4n+3}{n^2}$ i $x_n = \dfrac{n^3+1}{n^4+5}$.*

Podem representar les successions en un pla amb uns eixos de coordenades, utilitzant l'eix d'abscisses per representar el lloc n que ocupa el terme x_n en la successió, i l'eix d'ordenades per representar el valor x_n, i observar la tendència dels valors x_n quan n creix.



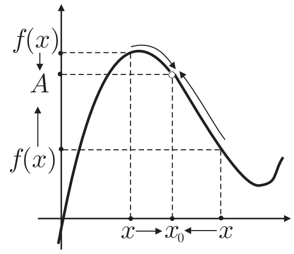


Sembla que, en el primer cas, x_n creix a partir del segon terme, que cada vegada creix més a poc a poc i que tots els seus valors es mantenen per sota del 1 i s'apropen a 1. En el segon cas sembla que la successió x_n tendeix a 0. Fem una comprovació amb l'ajut de l'àlgebra:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-4n+3}{n^2} &= \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{4}{n} + \frac{3}{n^2} = 1-0+0 \\ \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+1}{n^4+5} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^3+1}{n^4}}{\frac{n^4+5}{n^4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^4}}{1+\frac{5}{n^4}} = \frac{0+0}{1+0} = 0. \end{aligned}$$

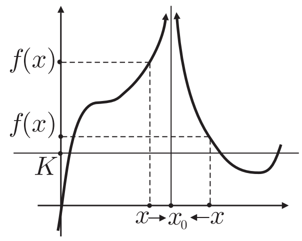
Definició 4.2 *Una funció f té límit $A \in \mathbb{R}$ quan x tendeix a x_0, si per a qualsevol successió de punts x_n que tendeix a x_0 es compleix que la successió de les seves imatges $f(x_n)$ tendeix a A. Això es presenta amb la notació*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A.$$

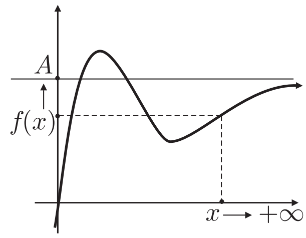


Definició 4.3 *Una funció f té límit $+\infty$ quan x tendeix a x_0, si per a qualsevol successió de punts x_n que tendeix a x_0 i per a qualsevol $K>0$, es compleix que existeix un terme de la successió de imatges $f(x_n)$ a partir del qual, els que el segueixen, són més grans que K. Això es presenta amb la notació*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty.$$



Les definicions de $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, i les de límits de funcions quan x tendeix a $+\infty$ o $-\infty$ s'establirien de manera semblant. A la figura adjunta visualitzem $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$.



De la mateixa manera es definirien els límits laterals, —per la dreta o per l'esquerra—, en un punt x_0, amb la introducció de la restricció que els valors de les successions x_n que tendeixen a x_0 només ho fan per un cantó, el dels valors més petits que x_0 o el dels valors més grans. Aquests límits laterals es presenten amb les notacions:

- Límit per la dreta de $f(x)$ en x_0: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$.
- Límit per l'esquerra de $f(x)$ en x_0: $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$.

Una primera propietat que es pot deduir d'aquestes definicions és que si els límits laterals, en un punt a, coincideixen, llavors existeix $\lim_{x\to a} f(x)$ i coincideix amb els límits laterals.

Exemple 4.3 *Càlcul de $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, si* $\quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x<1 \\ x^2 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{x} = 1$ i $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x^2 = 1 \Longrightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = 1.$ $\square$

4.2 Àlgebra de límits

El teorema següent presenta algunes propietats dels límits, utilitzades en el seu càlcul, les quals no demostrem i es poden percebre intuïtivament donant valors a la variable x.

Teorema 4.1 *Si* $\lim_{x\to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}$ *i* $\lim_{x\to x_0} g(x) = B \in \mathbb{R}$, *llavors:*

a) $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = A+B$.

b) $\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = A\cdot B$.

c) $\lim_{x\to x_0}(f(x)/g(x)) = A/B$, *si* $B \neq 0$.

d) $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = A^B$, *si* $A \neq 0$ *o* $B \neq 0$.

Cal tenir en compte que quan A i/o B no satisfan les hipòtesis donades i apliquem les regles anteriors, s'obtenen expressions formals del tipus

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ \infty-\infty,\ 1^\infty,\ 0^0,\ \infty^0,$$

i el valor del límit, si existeix, és indeterminat. Llavors, cal transformar l'expressió de la funció en una altra d'equivalent per tal d'esbrinar-lo. Representem en les taules següents, les igualtats del teorema 4.1 i d'altres, algunes relacionades amb l'aparició d'indeterminacions. Els casos determinats es poden demostrar a partir de les definicions de límit donades més amunt. Notem d'altra banda que són força intuïtives i que, per tant, no es pretén la seva memorització sinó el seu ús de manera raonada.

Teorema 4.2

$\lim_{x\to a}$ $f(x)$ \ $g(x)$: $+$	$-\infty$	B	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\boxed{\infty-\infty}$
A	$-\infty$	$A+B$	$+\infty$
$+\infty$	$\boxed{\infty-\infty}$	$+\infty$	$+\infty$

$\lim_{x\to a}$ $f(x)$ \ $g(x)$: $\times$	$-\infty$	0	B	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$\boxed{0\cdot\infty}$	$\pm\infty$	$-\infty$
0	$\boxed{0\cdot\infty}$	0	0	$\boxed{0\cdot\infty}$
A	$\pm\infty$	0	$A\cdot B$	$\pm\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$\boxed{0\cdot\infty}$	$\pm\infty$	$+\infty$

$\lim_{x\to a}$ $f(x)$ \ $g(x)$: $\div$	$-\infty$	0	B	$+\infty$
$-\infty$	$\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$
0	0	$\boxed{\frac{0}{0}}$	0	0
A	0	$\pm\infty$	$\frac{A}{B}$	0
$+\infty$	$\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$

$\lim_{x\to a}$ $f(x)$ \ $g(x)$: $f(x)^{g(x)}$	$-\infty$	$B<0$	0	$B>0$	$+\infty$
0^+	$+\infty$	$+\infty$	$\boxed{0^0}$	0	0
$0<A<1$	$+\infty$	A^B	1	A^B	0
1	$\boxed{1^\infty}$	1	1	1	$\boxed{1^\infty}$
$A>1$	0	A^B	1	A^B	$+\infty$
$+\infty$	0	0	$\boxed{\infty^0}$	$+\infty$	$+\infty$

4.3 Algunes estratègies per a la resolució d'indeterminacions

- **Indeterminacions del tipus $\mathbf{\frac{0}{0}}$.**

En el cas de fraccions racionals, només cal trobar els factors que tendeixen a zero i eliminar-los abans de resoldre el límit.

Exemple 4.4 *Càlcul de* $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-3x-4}{x^2+x}$

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2-3x-4}{x^2+x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x-4)}{x(x+1)} = \lim_{x\to -1} \frac{x-4}{x} = \frac{-5}{-1} = 5.$$

□

Quan apareixen expressions irracionals les multiplicarem i dividirem per la seva expressió conjugada.

Exemple 4.5 *Càlcul de* $\lim_{x\to 4} \frac{x-2\sqrt{x}}{x^3-64}$

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 4} \frac{x-2\sqrt{x}}{x^3-64} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 4} \frac{(x-2\sqrt{x})(x+2\sqrt{x})}{(x-4)(x^2+4x+16)(x+2\sqrt{x})} = \\
&= \lim_{x\to 4} \frac{x^2-4x}{(x-4)(x^2+4x+16)(x+2\sqrt{x})} = \lim_{x\to 4} \frac{x(x-4)}{(x-4)(x^2+4x+16)(x+2\sqrt{x})} = \\
&= \lim_{x\to 4} \frac{x}{(x^2+4x+16)(x+2\sqrt{x})} = \frac{4}{48\cdot 8} = \frac{1}{96}.
\end{aligned}$$

□

- **Indeterminacions del tipus $\frac{\infty}{\infty}$.**

En el cas de fraccions racionals podem fer desaparèixer els infinits, dividint el numerador i el denominador per x elevat a la màxima potència que apareix.

Exemple 4.6 *Càlcul de* $\lim_{x\to +\infty} \frac{6x^3+4}{3x^3+x+2}$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{6x^3+4}{3x^3+x+2} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{6+\frac{4}{x^3}}{3+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}} = \frac{6+0}{3+0+0} = 2.$$

□

- **Indeterminacions del tipus $\infty - \infty$.**

Si es tracta de polinomis, podem extreure el factor x elevat a la màxima potència.

Exemple 4.7 *Càlcul de* $\lim_{x\to -\infty} (x^5 - 10x^4 + 7)$

$$\lim_{x\to -\infty} (2x^5 + 10x^4 + 7) = (-\infty + \infty) = \lim_{x\to -\infty} x^5 \left(2 + \frac{10}{x} + \frac{7}{x^5}\right) = -\infty(2+0+0) = -\infty.$$

□

Si apareixen expressions irracionals les multiplicarem i dividirem per la seva expressió conjugada.

Exemple 4.8 *Càlcul de* $\lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2-9x})$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2-9x}) &= (\infty-\infty) = \lim_{x\to+\infty}\frac{(x-\sqrt{x^2-9x})(x+\sqrt{x^2-9x})}{x+\sqrt{x^2-9x}} = \\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x^2+9x)}{x+\sqrt{x^2-9x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{9x}{x+\sqrt{x^2-9x}} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = \\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{9}{1+\sqrt{1-\frac{9}{x}}} = \frac{9}{1+\sqrt{1-0}} = \frac{9}{2}\,.\end{aligned}$$

□

- **Més exemples**

Exemple 4.9 *Càlcul d'alguns límits*

a) $\lim_{x\to-\infty}(3x^5-x^3+4x^2-8)$ *b)* $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x^2}{2x^3+1}$. *c)* $\lim_{x\to4}\frac{x^2-4x}{x^2+x-20}$.

d) $\lim_{x\to9}\frac{x^2-8x-9}{3-\sqrt{x}}$. *e)* $\lim_{x\to1^+}\left(\sqrt{x}-1\right)^{\frac{1}{1-x}}$.

---

a) $$\lim_{x\to-\infty}(3x^5-x^3+4x^2-8) = (-\infty+\infty) = \lim_{x\to-\infty}x^5\left(3-\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^3}-\frac{8}{x^5}\right) = \\ = -\infty\cdot(3-0+0-0) = -\infty\cdot 3 = -\infty\,.$$

b) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x^2}{2x^3+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^3-x^2}{x^3}}{\frac{2x^3+1}{x^3}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{2+\frac{1}{x^3}} = \frac{1-0}{2+0} = \frac{1}{2}\,.$$

c) $$\lim_{x\to4}\frac{x^2-4x}{x^2+x-20} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to4}\frac{x(x-4)}{(x-4)(x+5)} = \lim_{x\to4}\frac{x}{x+5} = \frac{4}{9}\,.$$

d) $$\lim_{x\to9}\frac{x^2-8x-9}{3-\sqrt{x}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to9}\frac{(x-9)(x+1)(3+\sqrt{x})}{(3-\sqrt{x})(3+\sqrt{x})} = \\ = \lim_{x\to9}\frac{(x-9)(x+1)(3+\sqrt{x})}{(9-x)} = \lim_{x\to9}-(x+1)(3+\sqrt{x}) = -10\cdot6 = -60\,.$$

e) $$\lim_{x\to1^+}\left(\sqrt{x}-1\right)^{\frac{1}{1-x}} = \left(0^+\right)^{\left(\frac{1}{0^-}\right)} = \left(0^+\right)^{-\infty} = +\infty\,.$$

□

4.4 Exercicis

a) $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-x+1}{x^3+3x^2-x}$ Solució: 0.

b) $\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2-1}{2x+1}-\frac{2x^2-5}{x+3}$ Solució: 5.

c) $\lim_{x\to3}\frac{x^2+x-12}{2x-6}$ Solució: $\frac{7}{2}$.

d) $\lim_{x\to1}\sqrt{\frac{1}{x-2}}$ Solució: No existeix.

e) $\lim_{x\to-a}\frac{x^3+a^3}{x^2-a^2}$ Solució: $-\frac{3a}{2}$.

f) $\lim_{x\to3^-}\frac{x}{x-3}$ Solució: $-\infty$.

g) $\lim_{x\to4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$ Solució: 4.

h) $\lim_{x\to0^+}\left(\frac{x^2}{x^2+x}\right)^{\frac{x-1}{x^2}}$ Solució: $+\infty$.

5 Continuïtat en un punt. Tipus de discontinuïtats

5.1 Definició i teoremes

Definició 5.1 – *Una funció f és contínua en un punt $x_0 \in \mathbb{R}$ si existeix $f(x_0)$ i es compleix*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)\,.$$

– *Una funció f és contínua en un conjunt A si és contínua en tots els punts del conjunt A.*

Teorema 5.1 – *La suma, el producte i la composició de funcions contínues és una funció contínua. El quocient de funcions contínues és una funció contínua en tots els punts en què la funció denominador és diferent de* 0.
– *Les funcions $f(x) = a$, $f(x) = x$, $f(x) = |x|$, $f(x) = \sin x$, $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $f(x) = \cos x$ són contínues.*

Unes primeres conseqüències d'aquest teorema són:

- Les funcions polinòmiques són contínues.
- Les funcions racionals, és a dir les fraccions de funcions polinòmiques són contínues en tots els punta que no anul·len el denominador.
- La funció $f(x) = \tan x$ és contínua en els punts $x \neq \frac{k\cdot\pi}{2}$, en què $k \in \mathbb{Z}$.
- Si $f(x)$ és contínua, la funció $\psi(x) = |f(x)|$ és contínua.

5.2 Tipus de discontinuïtats

Els casos següents presenten algunes situacions en què no es satisfà la continuïtat en algun punt, en fallar l'existència de límit o de imatge o d'igualtat entre els dos. Llavors, la funció s'anomena *discontínua* en el punt estudiat.

– **Discontinuïtat de salt finit:** Esdevé quan

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = B \in \mathbb{R} \quad \text{i} \quad A \neq B.$$

– **Discontinuïtat evitable:** Esdevé quan

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = K \in \mathbb{R} \quad \text{i la imatge no existeix, o} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0).$$

– **Discontinuïtat asimptòtica:** (També, de salt infinit). Esdevé quan algun dels límits laterals en x_0 és $+\infty$ o $-\infty$. En aquest cas es diu que la corba té una *asímptota* d'equació $x = x_0$

Exemple 5.1 *Estudi de les discontinuïtats de les funcions*

a) $f(x) = \dfrac{|x^2 - x|}{x}$ *b)* $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & si \quad x < 0 \\ x & si \quad x \geq 0 \end{cases}$ *c)* $f(x) = \dfrac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x}$

a) Per tots els resultats anteriors sabem que l'únic punt de discontinuïtat es troba en $x = 0$. Estudiem-ne el tipus:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x^2 - x|}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x||x-1|}{x} = \lim_{x \to 0^-} -|x-1| = -1$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x^2 - x|}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x||x-1|}{x} = \lim_{x \to 0^+} |x-1| = 1.$$

En ser les límits laterals diferents i finits, la discontinuïtat en $x = 1$ és de salt finit.

b) Pels teoremes anteriors, si hi ha discontinuïtat es troba en $x = 0$, perquè és el punt en què la funció canvia de definició:

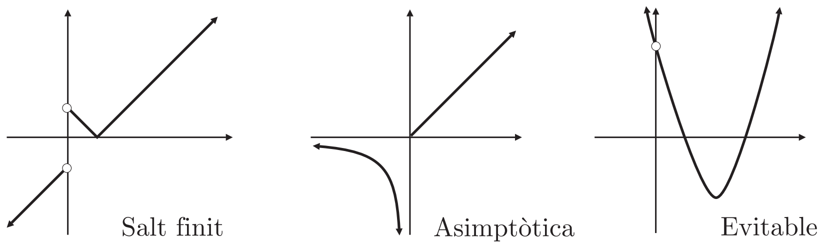
$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^-} f(x) &= \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) &= \lim_{x \to 0^+} x = 0. \end{aligned}$$

En existir un límit lateral igual a $-\infty$, en $x = 0$ hi ha una discontinuïtat asimptòtica.

c) Aquí l'únic punt de discontinuïtat es troba en $x = 0$ perquè $\nexists f(0)$ i

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{x(x^2 - 4x + 3)}{x} = \lim_{x \to 0}(x^2 - 4x + 3) = 3\,.$$

Per tant, tenim una discontinuïtat evitable en el punt $x = 0$.



□

5.3 Exercicis

Estudieu la continuïtat de les funcions

a) $f(x) = \dfrac{x - 1}{\sqrt[3]{x - 1}}$. Solució: Discontinuïtat evitable en $x = 1$.

b) $f(x) = \dfrac{x + 1}{2x^2 + 2x}$. Solució: Discontinuïtat evitable en $x = -1$ i asimptòtica en $x = 0$.

c) $f(x) = \dfrac{|x - 3|}{x^2 - 5x + 6}$. Solució: Discontinuïtat de salt finit en $x = 3$ i asimptòtica en $x = 2$.

6 Relació entre derivabilitat i continuïtat

Sembla del tot evident que una funció contínua no té perquè ser derivable, una mostra la tenim en la funció de l'exemple 2.2 en els punts $x = 2$ i $x = -2$. En canvi, com ara veurem, una condició necessària per a la derivabilitat és la continuïtat.

Teorema 6.1 *Si f és derivable en x_0, llavors f és contínua en x_0.*

Prova. Volem demostrar que $\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$, o expressat d'una altra manera que $\lim_{h \to 0}[f(x_0 + h) - f(x_0)] = 0$. Efectivament,

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0}[f(x_0 + h) - f(x_0)] &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot h \;= \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot \lim_{h \to 0} h \;=\; f'(x_0) \cdot 0 = 0\,. \end{aligned}$$

□

Exemple 6.1 *Derivabilitat de* $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$.

En ser $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} -1 = -1 \end{cases}$

aquesta funció no és contínua en $x = 0$ i per tant no serà derivable en $x = 0$.
En els punts $x < 0$ és $f(x) = -1$, i per a $x > 0$ és $f(x) = 1$; per tant, f és derivable per a tot $x \neq 0$ i $f'(x) = 0$. $\square$

7 Composició de funcions. Regla de la cadena

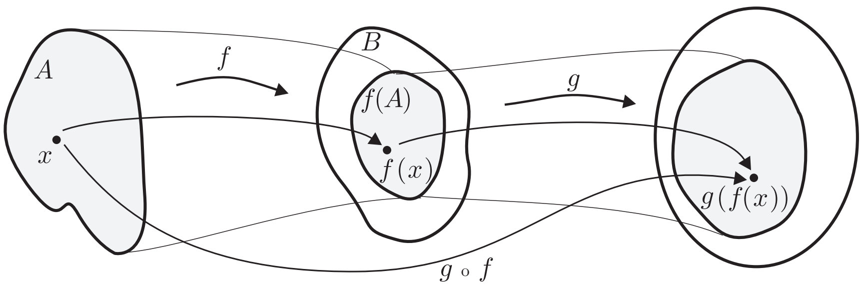
Encara ens falta trobar les derivades d'algunes funcions elementals; per exemple la de $y = \cos x$, les de les funcions inverses de les ja trobades com $y = \arcsin x$ o $y = \sqrt[n]{x}$. També ens interessaria poder trobar les derivades d'altres funcions que s'expressen com a composició de funcions elementals, com $y = \sqrt{4 - x^2}$. Més concretament, l'estudi de la derivada de la composició de funcions serà útil per resoldre tot el que hem dit, així es desprèn de la igualtat $\cos x = \sin(\pi/2 - x)$ i el fet que la composició d'una funció amb la seva inversa dóna la funció identitat.

7.1 Composició de funcions

Donades dues funcions $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ i $g : B \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ amb $f(A) \subset B$, es defineix la funció:

$$\begin{array}{rccl} g \circ f \ : & A \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x \in A & \longmapsto & (g \circ f)(x) = g(f(x)) \end{array}$$

la qual rep el nom de *composició de* f *i* g.



Exemple 7.1 *Recerca de les funcions que componen* $\psi(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ *i* $\varphi(x) = (x^2 + x)^5$*, i del seu domini —o camp d'existència—.*

Podem afirmar que

$$\psi = g \circ f, \quad \text{en què} \quad f(x) = x^2 - 4 \quad \text{i} \quad g(x) = \sqrt{x},$$

perquè $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 4) = \sqrt{x^2 - 4}$.
El domini A de la composició ve determinat per $f(A) \subset \operatorname{Dom} g =]0, +\infty[$. Això equival a $x^2 - 4 > 0$ i, per tant, el domini buscat és $]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$.
Quant a φ podem afirmar que

$$\varphi = g \circ f \quad \text{en què} \quad f(x) = x^2 + x \quad \text{i} \quad g(x) = x^5,$$

perquè $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + x) = (x^2 + x)^5$.

El domini A de la composició ve determinat per $f(A) \subset \operatorname{Dom} g = \mathbb{R}$. Això equival a $x^2 + x \in \mathbb{R}$ i, per tant, el domini buscat és $\mathbb{R}$. □

Seguidament establirem la proposició que permetrà derivar la composició de funcions, i donarem a l'apèndix A una demostració restringida de la seva validesa. En ser la derivada una mesura de la variació dels valors d'una funció respecte dels valors de la variable i si observem que, en la composició, la variació de la segona funció s'ha de considerar respecte del que ha variat la primera, sembla encertat pensar que la derivada de la composició vindrà donada per un producte de derivades. El teorema següent ho exposa de manera precisa.

Teorema 7.1 (Regla de la cadena)

$$\left.\begin{array}{ll} f & \textit{derivable en } x_0 \\ g & \textit{derivable en } f(x_0) \end{array}\right\} \Longrightarrow g \circ f \quad \textit{derivable en } x_0 \ \textit{i} \ \boxed{(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)}.$$

Aquesta última igualtat rep el nom de regla de la cadena.

Passem a estudiar les derivades de les funcions $\cos x$ i $\tan x$.

Teorema 7.2 $f(x) = \cos x \Longrightarrow f'(x) = -\sin x$.
$l(x) = \tan x \Longrightarrow l'(x) = 1 + \tan^2 x$.

Prova. En ser $f(x) = \cos x = \sin(\pi/2 - x)$ llavors,

$$f = g_2 \circ g_1 \quad \text{en què} \quad g_1(x) = \frac{\pi}{2} - x \quad \text{i} \quad g_2(x) = \sin x.$$

Aquestes dues funcions són derivables en $\mathbb{R}$. Segons el teorema 7.1, f serà derivable en $\mathbb{R}$ i podrem aplicar la regla de la cadena per trobar el valor de $f'(x)$.[6] La derivada de la funció $l(x)$, l'obtindrem a partir de la derivada d'un quocient. Efectivament,

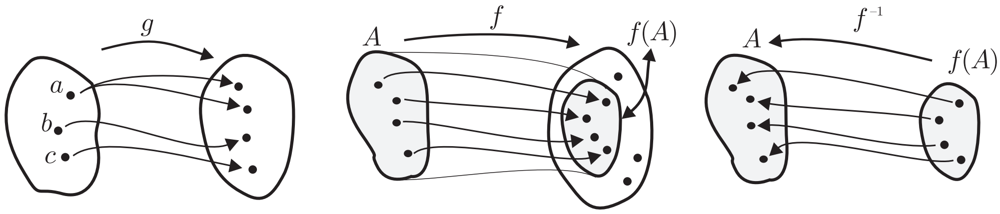
$$f'(x) = g_2'(g_1(x)) \cdot g_1'(x) = \cos(\pi/2 - x) \cdot (-1) = \sin x \cdot (-1) = -\sin x.$$
$$l'(x) = \frac{\cos x \cos x - (-\sin x)\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

□

8 Funcions inverses

Recordem que les funcions són correspondències entre conjunts de nombres reals. Més concretament, una funció f relaciona cada nombre x d'un cert conjunt, amb un sol nombre $f(x)$ el qual rep el nom d'*imatge* de x. El conjunt d'elements x que tenen una mateixa imatge y, rep el nom d'*antiimatge* de y i es presenta amb la notació $f^{-1}(y)$. El conjunt de punts que tenen imatge s'anomena *domini* de la funció i es presenta mitjançant $\operatorname{Dom} f$. El conjunt de totes les imatges rep el nom de *recorregut* de la funció, i si $A = \operatorname{Dom} f$ es presenta mitjançant $f(A)$. Pretenem esbrinar aquelles funcions que admeten una funció *inversa*, és a dir que admeten una funció h que a cada element del recorregut de f li fa correspondre la seva antiimatge per f.[7] Això només serà possible per a aquelles funcions tals que cada element del recorregut tingui una sola antiimatge, les quals reben el nom de funcions *injectives*. En cas d'existir la funció inversa h es presenta amb la notació f^{-1}.

[6] Per a una altra manera, més complexa, de trobar la derivada de f vegeu el problema 4.11.
[7] Si abusem del llenguatge podríem dir que la inversa de f "desfà" allò que la f "fa".



g no es funció perquè a té dues imatges

f és funció injectiva amb recorregut $f(A)$

f^{-1} és la funció inversa de f

8.1 Estudi de les inverses de la funció $f(x) = x^2$

Sigui la funció $\qquad \begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x \in \mathbb{R} & \longmapsto & f(x) = x^2 \end{array}$

El recorregut d'aquesta funció és el conjunt dels nombres reals positius, inclòs el zero. Donat un nombre z del recorregut el conjunt de les seves antiimatges és $\{-\sqrt{z}, +\sqrt{z}\}$. Llavors, si definim una correspondència tal que a cada element del recorregut li faci correspondre la seva antiimatge, veiem que a cada element x del recorregut li corresponen dos elements, $+\sqrt{x}$ i $-\sqrt{x}$, és a dir que la correspondència inversa no és funció. Per poder definir una funció inversa de la funció $f(x) = x^2$, cal reduir el seu domini de manera que f sigui injectiva, així cada element del recorregut tindrà una sola antiimatge. Això es pot aconseguir de dues maneres:

- Amb la restricció del domini de f a $\mathbb{R}^+$. En resulta

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x \in \mathbb{R}^+ & \longmapsto & f(x) = x^2 \end{array} \quad \text{té funció inversa} \quad \begin{array}{cccc} f^{-1}: & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x \in \mathbb{R}^+ & \longmapsto & f^{-1}(x) = +\sqrt{x} \end{array}$$

Si fem la composició de les dues funcions veiem que la seva aplicació consecutiva transforma cada element en si mateix:

$$x \geq 0 \xrightarrow{f} x^2 \xrightarrow{f^{-1}} \sqrt{x^2} = |x| = x.$$

És a dir, $(f^{-1} \circ f)(x) = x$. Efectivament,

$$x \geq 0 \xrightarrow{f^{-1} \circ f} (f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^2) = \sqrt{x^2} = |x| = x.$$

- Amb la restricció del domini de f a $\mathbb{R}^-$. En resulta

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^- & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x \in \mathbb{R}^- & \longmapsto & f(x) = x^2 \end{array} \quad \text{té funció inversa} \quad \begin{array}{cccc} f^{-1}: & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x \in \mathbb{R}^+ & \longmapsto & f^{-1}(x) = -\sqrt{x} \end{array}$$

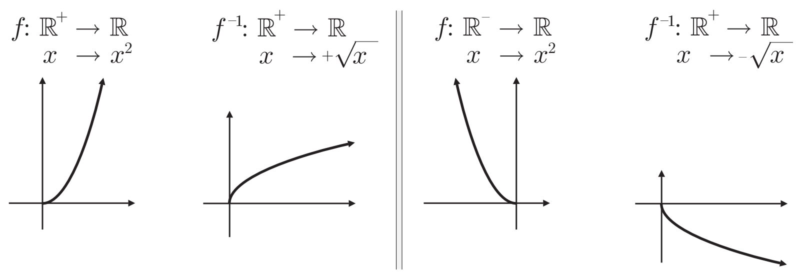
Si fem, com abans, la composició de les dues funcions:

$$x \leq 0 \xrightarrow{f} x^2 \xrightarrow{f^{-1}} -\sqrt{x^2} = -|x| = -(-x) = x.$$

És a dir, $(f^{-1} \circ f)(x) = x$. Efectivament,

$$x \geq 0 \xrightarrow{f^{-1} \circ f} (f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^2) = -\sqrt{x^2} = -|x| = -(-x) = x.$$

En el gràfic següent podem visualitzar les funcions estudiades:



8.2 Definició i representació gràfica

A partir de l'exposició feta podem formalitzar la definició de funció inversa de dues maneres:

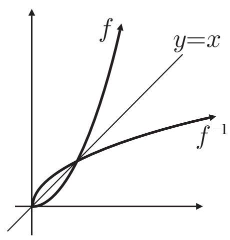
Definició 8.1
Donada la funció $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *injectiva, definim la funció inversa de* f *com*

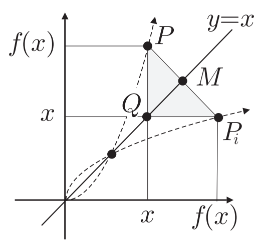
$$\begin{array}{rccl} f^{-1}: & f(A) \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x \in f(A) & \longmapsto & f^{-1}(x) = \textit{antiimatge de } x. \end{array}$$

o, de forma equivalent, com

$$f^{-1} : f(A) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \textit{tal que} \quad (f^{-1} \circ f)(x) = x \quad \textit{i} \quad (f \circ f^{-1})(x) = x.$$

Si estem atents a la primera definició, observem que els gràfics d'una funció i la seva inversa són simètrics un de l'altre respecte de la recta bisectriu del primer i tercer quadrants $y = x$. Efectivament, sigui un nombre real x i la seva imatge $f(x)$. Llavors, $P(x, f(x))$ és un punt del gràfic de f, i $P_i(f(x), x)$ és un punt del gràfic de f^{-1}. A més, si considerem els punts $Q(x, x)$ i M punt mitjà de P i P_i, es compleix que els triangles PQM i P_iQM són iguals.

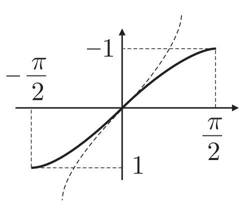




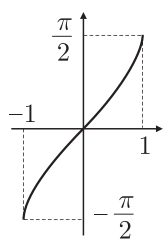
Consegüentment, les distàncies de P i P_i a la bisectriu $y = x$ són iguals, la qual cosa implica la simetria dels dos gràfics respecte de la recta $y = x$. Una manera diferent de visualitzar el gràfic de la inversa d'una funció f és girar el full de paper, sobre el que està dibuixat el gràfic de f, un angle de 90° en sentit antihorari; la transparència que es veu pel darrere del full és el gràfic de f^{-1}.

8.3 Funcions inverses de les funcions trigonomètriques

• **Funció** $\sin x$**:** Per poder definir la seva funció inversa cal restringir-ne el domini per tal de transformar-la en injectiva. Això es pot fer de maneres diverses, i s'ha convingut en adoptar la restricció $\operatorname{Dom} f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. La inversa que en resulta rep el nom de funció *arc sinus* i es presenta amb la notació $\boxed{f^{-1}(x) = \arcsin x}$. En les calculadores s'utilitza la notació $\boxed{\sin^{-1}}$. En ser Recorregut $(f) = [-1, 1]$, s'obté $\operatorname{Dom} f^{-1} = [-1, 1]$.

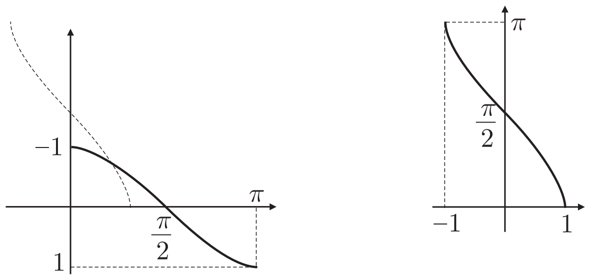


$f(x)$=sin x



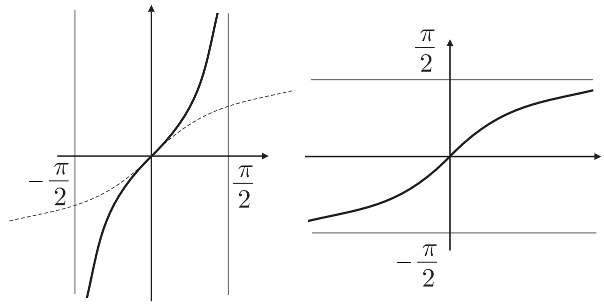
$f^{-1}(x)$=arcsin x

• **Funció** $\cos x$**:** Igual que en el cas anterior, cal restringir el seu domini. En aquest cas s'ha convingut en adoptar la restricció $\mathrm{Dom}\, f = [0, \pi]$. La inversa que en resulta rep el nom de funció *arc cosinus* i es presenta amb la notació $\boxed{f^{-1}(x) = \arccos x}$. En les calculadores s'utilitza la notació $\boxed{\cos^{-1}}$. En ser Recorregut $(f) = [-1, 1]$, s'obté $\mathrm{Dom}\, f^{-1} = [-1, 1]$.



$f(x)$=cos x $f^{-1}(x)$=arccos x

• **Funció** $\tan x$**:** En aquest cas la restricció és al domini $\mathrm{Dom}\, f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. La inversa que en resulta rep el nom de funció *arc tangent* i es presenta amb la notació $\boxed{f^{-1}(x) = \arctan x}$. En les calculadores s'utilitza la notació $\boxed{\tan^{-1}}$. En ser Recorregut $(f) =]-\infty, +\infty[$, s'obté $\mathrm{Dom}\, f^{-1} =]-\infty, +\infty[$.



$f(x)$=tan x $f^{-1}(x)$=arctan x

9 Derivabilitat de la funció inversa

Farem una aproximació gràfica a l'estudi de la continuïtat i derivabilitat de les funcions inverses de les funcions contínues o derivables. En primer lloc, del fet que el gràfic d'una funció f i el de la seva inversa f^{-1} són simètrics respecte de la recta $y = x$, podem establir el teorema de continuïtat següent, el qual no demostrarem.

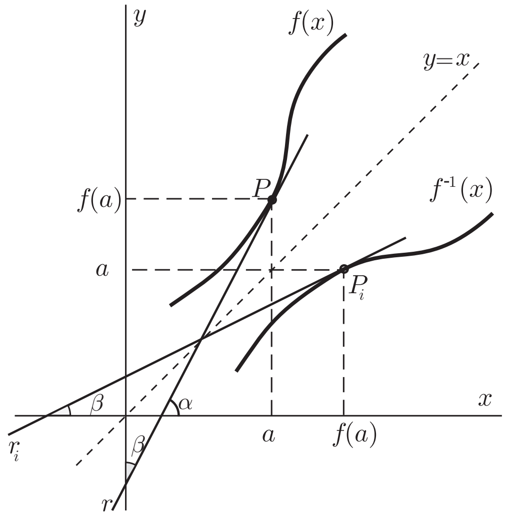
Teorema 9.1 *f contínua i injectiva en $A \Longrightarrow$ existeix f^{-1} contínua en $f(A)$.*

Quant al tractament de la derivabilitat en un punt a, observarem el gràfic adjunt i farem un estudi geomètric previ de les rectes tangents r i r_i al gràfic de f en $x = a$ i al gràfic de f^{-1} en $x = f(a)$.

Aquestes rectes són tangents en els punts $P(a, f(a))$ i $P_i(f(a), a)$ respectivament, i són simètriques respecte $y = x$. Llavors, en ser $\alpha + \beta = 90°$, tenim:

$$\begin{cases} f'(a) = \text{pendent}(r) = \tan\alpha \\ (f^{-1})'(f(a)) = \text{pendent}(r_i) = \tan(90° - \alpha)\,. \end{cases}$$

O sigui que
$(f^{-1})'(f(a)) = \tan(90° - \alpha) = \dfrac{1}{\tan\alpha} = \dfrac{1}{f'(a)}$,
amb l'única condició que $f'(a) \neq 0$. Això, des del punt de vista geomètric, s'entén bé perquè si $f'(a) = 0$ la recta tangent r_i seria paral·lela a l'eix OY i, llavors, en no tenir el seu pendent valor real —té pendent ∞—, no existiria $(f^{-1})'(f(a))$.



Si escrivim $f(a) = b$ obtenim l'expressió per la derivada de la inversa

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}\,.$$

Amb això podem entendre el teorema de derivabilitat següent.

Teorema 9.2 (Teorema de la funció inversa) *Sigui $J \subset \mathrm{Dom} f$ un interval i $a \in J$ tal que $f(a) = b$. Si f és contínua i injectiva en J, i derivable en el punt a on $f'(a) \neq 0$, llavors existeix la inversa f^{-1} de f definida en $f(J)$, i és derivable en b, essent*

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}\,. \tag{5}$$

No demostrem la derivabilitat de f^{-1} en $f(a) = b$ però, un cop acceptada a partir dels arguments gràfics de més amunt, podem deduir la derivada (5) utilitzant la regla de la cadena. Efectivament, en ser $\forall x,\ (f^{-1} \circ f)(x) = x$ llavors,

$$(f^{-1} \circ f)'(a) = 1 \Longrightarrow (f^{-1})'(f(a)) \cdot f'(a) = 1 \Longrightarrow (f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}\,.$$

9.1 El teorema de la inversa aplicat a la derivació de funcions elementals

Cercarem la derivada de la funció potencial amb exponent racional i les derivades de les inverses de les funcions trigonomètriques.

Teorema 9.3

a) $f(x) = x^{\frac{p}{q}}$, *en què* $p \in \mathbb{Z}$ *i* $q \in \mathbb{Z} - \{0\} \Longrightarrow f'(x) = \frac{p}{q}\, x^{\frac{p}{q}-1}$.[8]

b) $g(x) = \arcsin x \Longrightarrow g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

c) $g(x) = \arccos x \Longrightarrow g'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

d) $g(x) = \arctan x \Longrightarrow g'(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$.

[8] Més endavant, després de la introducció de la funció logaritme, veurem que la funció derivada de $f(x) = x^k$, en què $k \in \mathbb{R}$, és $f'(x) = kx^{k-1}$. Aquest resultat el suposarem cert a partir d'aquest moment.

Prova.

a) Seguirem els passos següents, en què no incloem 0 entre els naturals:

$$\begin{cases} \textbf{(1)} \text{ Càlcul de la derivada de } a(x) = x^{1/q},\ q \in \mathbb{N}. \\ \textbf{(2)} \text{ Càlcul de la derivada de } b(x) = x^{p/q},\ p \in \mathbb{N} \text{ i } q \in \mathbb{N}. \\ \textbf{(3)} \text{ Càlcul de la derivada de } c(x) = x^{p/q},\ p \in \mathbb{Z} \text{ i } q \in \mathbb{Z} - \{0\}. \end{cases}$$

(1) $a(x) = x^{1/q}$ és la funció inversa de $r(x) = x^q$.[9] Observem que$r(x) = x^q$ derivable per a tor $x \in \mathbb{R}$ i $r'(x) = qx^{q-1} \neq 0$, per a tot $x \neq 0$. Llavors, pel teorema de la inversa, $a(x) = x^{1/q}$ serà derivable per a tot $x \neq 0$, i s'obté

$$a'(x) = \frac{1}{r'(a(x))} = \frac{1}{q \cdot a(x)^{q-1}} = \frac{1}{q \cdot x^{\frac{q-1}{q}}}.$$

(2) $b(x) = x^{p/q}$ és composició de les funcions $s_1(x) = x^{1/q}$ i $s_2(x) = x^p$.

$$x \xrightarrow{s_1} x^{1/q} \xrightarrow{s_2} \left(x^{1/q}\right)^p = x^{p/q}.$$

Totes dues funcions són derivables en els seus dominis, excepte s_1 que no ho és en el punt $x = 0$. Per tant, si apliquem la regla de la cadena en els punts $x \neq 0$ del domini s'obté

$$b'(x) = (s_2 \circ s_1)'(x) = s_2'(s_1(x)) \cdot s_1'(x) = p \cdot \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^{p-1} \cdot \frac{1}{q \cdot x^{\frac{q-1}{q}}} = \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p}{q}-1}.$$

(3) El cas $p/q > 0$ ha estat estudiat en l'apartat anterior, perquè es pot considerar $p \in \mathbb{N}$ i $q \in \mathbb{N}$.

El cas $p/q < 0$ es pot estudiar considerant $c(x) = \left(x^{-1}\right)^{\frac{-p}{q}}$, en què $-p > 0$ i $q > 0$. Si apliquem la regla de la cadena a la derivació de la funció $c(x)$, obtenim

$$c'(x) = \frac{-p}{q} \cdot \left(x^{-1}\right)^{\frac{-p}{q}-1} \cdot \left(-x^{-2}\right) = \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p}{q}-1}.$$

b) $g(x) = \arcsin x$ és inversa de $f(x) = \sin x$ i, pel teorema de la inversa, és derivable en $]-1, 1[$ i es compleix

$$g'(x) = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

c) $g(x) = \arccos x$ és inversa de $f(x) = \cos x$ i, pel teorema de la inversa, és derivable en $]-1, 1[$ i es compleix

$$g'(x) = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{-\sin(\arccos x)} = \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)}} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

d) $g(x) = \arctan x$ és inversa de $f(x) = \tan x$ i, pel teorema de la inversa, és derivable en $\mathbb{R}$ i es compleix

$$g'(x) = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

$\square$

[9] Per definir la inversa s'ha escollit el domini convenient de $a(x)$, per tal que sigui injectiva. Concretament, $\operatorname{Dom} a = \mathbb{R}^+$ per a q parell, i $\operatorname{Dom} a = \mathbb{R}$ per a q senar.

10 Monotonia i extrems d'una funció

En la introducció i en els exemples 2.2 i 2.3 hem observat la relació entre el concepte de derivada i els conceptes de creixement, decreixement i valors màxims i mínims d'una funció. Ens trobem a punt per establir de manera més precisa els conceptes de monotonia i extrems d'una funció, i per presentar, sense demostració, uns criteris força intuïtius per estudiar-los.

Definició 10.1 *Anomenem entorn de centre x_0 i radi δ a l'interval $E_\delta(x_0) =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. Normalment ens referirem a aquests intervals amb els termes "entorn de x_0". Si excloem el punt x_0 d'aquest entorn, l'anomenarem entorn reduït de x_0.*

Definició 10.2 (Monotonia)

- *La funció f, definida en $A \subset \mathbb{R}$, és estrictament creixent (resp. decreixent) en $x_0 \in A$, si existeix un entorn reduït de x_0 tal que per a tots els punts $x \in A$, a l'esquerra de x_0 i que pertanyin a l'entorn, es compleix $f(x) < f(x_0)$ (resp. $f(x) > f(x_0)$), i per a tots els punts x a la dreta de x_0 i que pertanyin a l'entorn, es compleix $f(x) > f(x_0)$ (resp. $f(x) < f(x_0)$).*
- *La funció f és estrictament creixent (resp. decreixent) en $A \subset \mathbb{R}$, si per a qualsevol parella d'elements $x, y \in A$, $x < y$, es compleix $f(x) < f(y)$ (resp. $f(x) > f(y)$).*

Teorema 10.1 *La funció f és estrictament creixent (resp. decreixent) en $]a, b[$ si i només si f és estrictament creixent (resp. decreixent) $\forall x \in]a, b[$.*

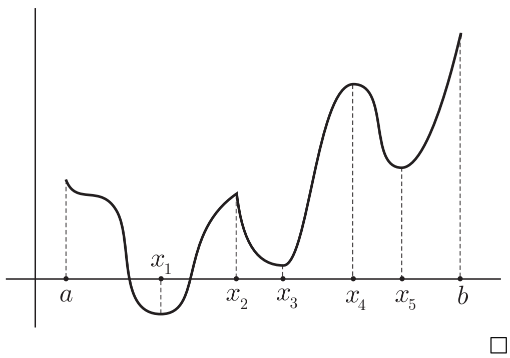
Definició 10.3 (Extrems)

- *La funció f, definida en $A \subset \mathbb{R}$, té un màxim (resp. mínim) local en $x_0 \in A$, si existeix un entorn de x_0 tal que per a qualsevol $x \in A$ que pertanyi a l'entorn es compleix $f(x) \leq f(x_0)$ (resp. $f(x) \geq f(x_0)$).*
- *La funció f, definida en $A \subset \mathbb{R}$, té un màxim (resp. mínim) absolut en $x_0 \in A$ si per a qualsevol $x \in A$ es compleix $f(x) \leq f(x_0)$ (resp. $f(x) \geq f(x_0)$).*

Els màxims i mínims d'una funció reben indistintament el nom d'*extrems* de la funció. Segons les definicions anteriors, qualsevol extrem absolut és extrem local, mentre que hi ha extrems locals que no són absoluts. Hi ha problemes, com el que hem plantejat a la introducció, en què s'ha de determinar algun dels extrems absoluts d'una funció. S'actua trobant els extrems locals i comparant els valors de les seves imatges.

Exemple 10.1 *Il·lustració gràfica de les definicions.*

- Els punts a, x_2, x_4, b són màxims locals.
- Els punts x_1, x_3, x_5 són mínims locals.
- El punt x_1 és mínim absolut en $[a, b]$.
- El punt b és màxim absolut en $[a, b]$.
- La funció és estrictament decreixent en $]a, x_1[$, $]x_2, x_3[$, i $]x_4, x_5[$.
- La funció és estrictament creixent en $]x_1, x_2[$, $]x_3, x_4[$, i $]x_5, b[$.



□

Els criteris següents, utilitzats en els exemples 2.2 i 2.3, permetran fer una interpretació de la derivada de f, la qual ens donarà informació per a l'elaboració del gràfic de la funció f.

Teorema 10.2 *Suposem que f és derivable en x_0, llavors:*

a) *$f'(x_0) > 0$ (resp. $f'(x_0) < 0$) $\Longrightarrow$ f és estrictament creixent (resp. decreixent) en x_0.*

b) *f té un extrem local en $x_0 \Longrightarrow f'(x_0) = 0$.*

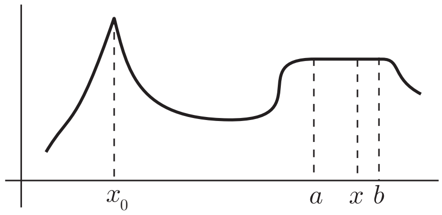
c) *Si $f'(x_0) = 0$ i existeix un entorn de x_0 tal que per a tots els punts x a l'esquerra de x_0 i que pertanyen a l'entorn es compleix $f'(x) < 0$ (resp. $f'(x) > 0$), i per a tots els punts x a la dreta de x_0 i que pertanyen a l'entorn es compleix $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$), llavors f té un mínim (resp. màxim) local en x_0.*

Observacions al teorema

• Una funció pot ser estrictament creixent, —a partir d'ara direm creixent—, en un punt x_0 i no existir $f'(x_0)$, o bé ser $f'(x_0) = 0$. Així, la funció $f(x) = 2x - 1 + |x - 1|$ és creixent en $x = 1$ i en canvi no existeix $f'(1)$. La funció $f(x) = x^3$ és creixent en $x = 0$ i $f'(0) = 0$.

• Una funció pot tenir derivada zero en un punt, i no tenir extrem local en aquest punt. Només cal fixar-nos en la segona funció de l'observació anterior.

• Una funció pot tenir extrem local en x_0 i no ser-hi derivable i, si és derivable en un entorn seu, f' pot no canviar de signe. En el gràfic adjunt, hi ha un màxim en x_0 i f no és derivable en aquest punt. A més, qualsevol $x \in]a, b[$ és un màxim local, i la derivada en el seu entorn val 0 i, per tant, no canvia de signe.



Extrems absoluts

Esbrinarem els punts candidats a ser extrems absoluts d'una funció f, en un conjunt A, en els casos més habituals. Un teorema força important i que tindrem present és el següent.

Teorema 10.3 *f contínua en $A = [a, b] \Longrightarrow f$ té extrems absoluts en A.*

En aquestes condicions els extrems absoluts es trobaran en algun dels tipus de punts següents:

a) Punts extrems de l'interval: $x = a, x = b$.

b) Punts $x \in]a, b[$ tals que $f'(x) = 0$.

c) Punts $x \in]a, b[$ tals que $f'(x)$ no existeix.

Per saber quins d'entre ells són extrems només caldrà calcular i comparar les seves imatges. La figura de l'exemple 10.1 il·lustra molt bé el que hem dit. Hi ha d'altres casos en què f és contínua sobre un interval A no tancat i, per tant, no és segura l'existència d'extrems. Llavors:

– Estudiarem tots els punts dels tipus (b) i (c).

– Calcularem:

i) Quan $A =]a, b[$, $\lim_{x \to a^+} f(x)$ i $\lim_{x \to b^-} f(x)$.

ii) Quan $A =]a, b]$, $\lim_{x \to a^+} f(x)$ i $f(b)$. Es fa de manera semblant per al cas $A = [a, b[$.

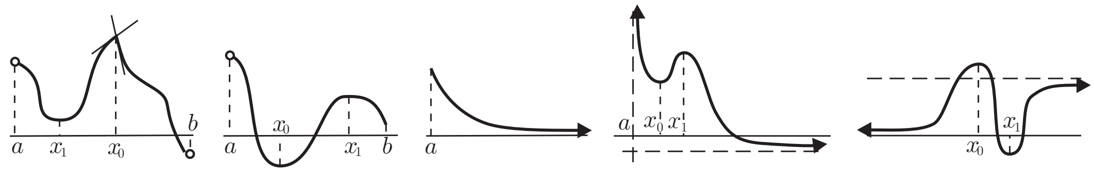
iii) Quan $A = [a, +\infty[$, $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ i $f(a)$. Es fa de manera semblant per al cas $A =]-\infty, b]$.

iv) Quan $A =]a, +\infty[$, $\lim_{x \to a^+} f(x)$ i $\lim_{x \to +\infty} f(x)$. Es fa de manera semblant per al cas $A =]-\infty, b[$.

v) Quan $A =]-\infty, +\infty[$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ i $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

– Compararem els resultats del càlcul anterior i treure conclusions.

Exemple 10.2 *Il·lustració gràfica particular dels cinc casos citats.*



(i) (ii) (iii) (iv) (v)

i) Cal trobar $f(x_0)$, $f(x_1)$, $\lim_{x\to a^+} f(x)$ i $\lim_{x\to b^-} f(x)$. En resulta un màxim absolut en x_0 i no hi ha mínim absolut.

ii) Cal trobar $f(x_0)$, $f(x_1)$, i $\lim_{x\to a^+} f(x)$. En resulta un mínim absolut en x_0 i no hi ha màxim absolut.

iii) Cal trobar $f(a)$ i $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. En resulta un màxim absolut en $x = a$ i no hi ha mínim absolut.

iv) Cal trobar $f(x_0)$, $f(x_1)$, $\lim_{x\to a^+} f(x)$ i $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. No hi ha extrems absoluts.

v) Cal trobar $f(x_0)$, $f(x_1)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ i $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. En resulta un màxim absolut en x_0 i un mínim absolut en x_1.

11 Funció derivada segona. Concavitat i punts d'inflexió

La funció derivada f' d'una funció f, pot tornar a ser derivable. En el cas de que així sigui la nova funció $(f')'$ rep el nom de *derivada segona* de la funció f, i es representa pel símbol f''. Aquesta funció ens dóna informació sobre la variació de la monotonia de f, més concretament sobre la concavitat de la funció f.

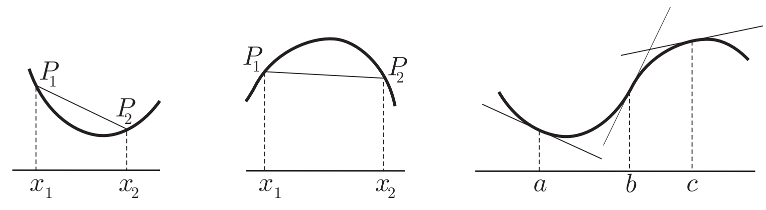
Definició 11.1 *Direm que f és còncava amunt (resp. avall) en $]a,b[$ si $\forall x_1, x_2 \in]a,b[$, el segment que uneix els punts $P_1(x_1, f(x_1))$ i $P_2(x_2, f(x_2))$ queda "per sobre" (resp. "per sota") del gràfic de f. Si suposem f derivable, direm que f és còncava amunt (resp. avall) en x_0 si existeix un entorn de x_0 tal que el gràfic de la recta tangent al gràfic de f en x_0 "queda per sota" (resp. "queda sobre") del gràfic de f.*

Teorema 11.1 *Si f és derivable en]a,b[, llavors:*

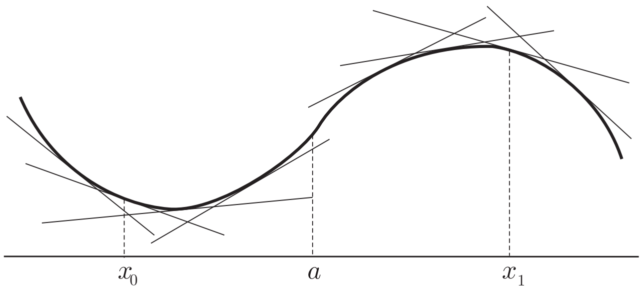
$$f \text{ còncava amunt (resp. avall) en }]a,b[\iff f \text{ còncava amunt (resp. avall) } \forall x \in]a,b[.$$

Hi ha alguns punts en els quals la recta tangent no té cap dels comportaments esmentats, sinó que travessen el gràfic.

Definició 11.2 *Sigui f derivable en x_0. Direm que f té un punt d'inflexió en x_0 si la recta tangent al gràfic de f en x_0 "travessa" el gràfic.*



En el gràfic adjunt visualitzem en la primera figura una funció còncava amunt en un interval, en la segona una funció còncava avall en un interval, i en la tercera el punt a en què la funció és còncava amunt, el punt c en què la funció és còncava avall, i el punt d'inflexió b.
Finalment, suposarem que la funció té segona derivada contínua. En aquestes condicions es poden establir uns criteris que permeten, mitjançant la intervenció de les segones derivades, trobar els intervals de concavitat i els punts d'inflexió d'una funció. Concretament, si observem en el gràfic adjunt com evolucionen les rectes tangents al voltant del punt x_0, els seus pendents creixen, és a dir la derivada f' creix en x_0. D'aquesta evolució en resulta un gràfic còncau amunt en x_0. O sigui que si $f''(x_0) = (f')'(x_0) > 0$, f' és creixent i això implica que la funció f és còncava amunt. De la mateixa manera, si $f''(x_1) = (f')'(x_1) < 0$, f' és decreixent i això implica que la funció f és còncava avall.



Per acabar en un entorn del punt a és $f''(x) > 0$ per a $x < a$, i $f''(x) < 0$ per a $x > a$. És a dir que, en ser f'' contínua serà $f''(a) = 0$ i d'aquest fet en resulta un punt d'inflexió. Aquestes afirmacions, que no demostrem rigorosament, s'estableixen en el teorema següent.

Teorema 11.2 *Suposem que f té derivada segona en els punts d'un conjunt $A \subset \mathbb{R}$.*

a) $f''(x_0) > 0$ *(resp.* $f''(x_0) < 0$*)* $\Longrightarrow f$ *és còncava amunt (resp. avall) en* x_0.

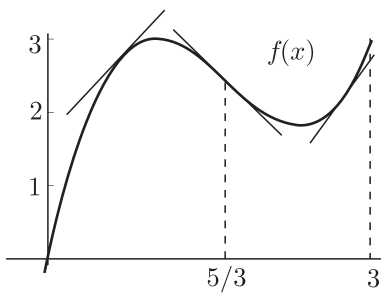
b) $f''(x) > 0$ *(resp.* $f''(x) < 0$*),* $\forall x \in]a, b[\Longrightarrow f$ *és còncava amunt (resp. avall) en* $]a, b[$.

c) Si f'' *té, en un entorn de* x_0*, diferent signe en els dos costats de* x_0 *i* $f''(x_0) = 0$*, llavors* x_0 *és punt d'inflexió de* f.

Exemple 11.1 *Concavitat de la funció* $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x$.

Observem que $f'(x) = 3x^2 - 10x + 7$, i que $f''(x) = 6x - 10$. Per tant:

- $[f''(x) > 0 \Longleftrightarrow x > 5/3] \Longrightarrow f$ còncava amunt en $]5/3, +\infty[$.
- $[f''(x) < 0 \Longleftrightarrow x < 5/3] \Longrightarrow f$ còncava avall en $]-\infty, 5/3[$.
- $f''(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 5/3$. Junt amb al canvi de signe de la segona derivada això implica que $x = 5/3$ és un punt d'inflexió.



□

12 Representació gràfica de funcions

La investigació del domini, dels talls amb els eixos i la interpretació de les derivades f' i f'', proporciona informació de cara a la representació gràfica d'una funció f. La completarem amb l'estudi d'existència d'asímptotes i simetries.

12.1 Asímptotes

En una primera aproximació direm que una funció té una asímptota, si té tendència a comportar-se igual que una recta quan alguna de les variables x o y tendeix cap a $+\infty$ o $-\infty$. Aquesta recta rebrà el nom d'asímptota. També es diu que una asímptota és una tangent al gràfic de la funció en el punt de l'infinit. A partir d'aquestes idees i observant el gràfic de l'exemple 12.2 establim les definicions rigoroses de les asímptotes verticals i horitzontals.

Definició 12.1 *$x = a$ és asímptota vertical si* $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ *o* $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$.
$y = k$ és asímptota horitzontal si $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = k$ *o* $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = k$.

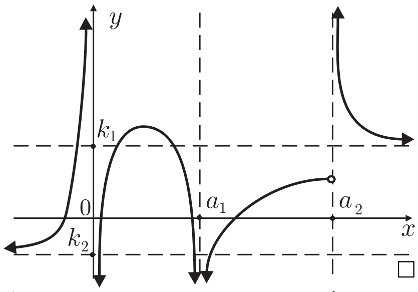
Exemple 12.1 *Asímptotes de les funcions* $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{(x-2)^2}$ *i* $g(x) = 2^{-1/x}$.

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \left(\dfrac{-7}{0^+}\right) = -\infty$ i $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 1 \Longrightarrow x = 2$ i $y = 1$ són asímptotes.

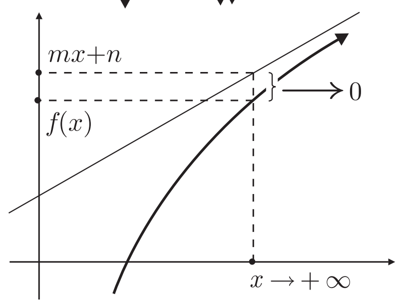
$\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \left(2^{-1/0^-}\right) = 2^{+\infty} = +\infty$ i $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = 2^0 = 1 \Longrightarrow x = 0$ i $y = 1$ són asímptotes.

Exemple 12.2 *Il·lustració gràfica d'asímptotes verticals i horitzontals.*

$\lim\limits_{x\to a_2^+} f(x) = +\infty \Longrightarrow x = a_2$ és asímptota vertical.
$\lim\limits_{x\to a_1} f(x) = -\infty \Longrightarrow x = a_1$ és asímptota vertical.
$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \Longrightarrow x = 0$ és asímptota vertical.
$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = k_1 \Longrightarrow y = k_1$ és asímptota horitzontal.
$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = k_2 \Longrightarrow y = k_2$ és asímptota horitzontal. $\square$



Quant a les asímptotes oblíqües, tindran una equació del tipus $y = mx + n$, $m \neq 0$. En un llenguatge poc formal, la funció $f(x)$ i l'asímptota "han de ser una mateixa cosa" en l'infinit. Això es pot expressar escrivint en el cas $+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - mx - n) = 0$, d'on deduïm:



$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x) - mx - n}{x} = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x} - m - \frac{n}{x}\right) = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x} - m\right) = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = m.$$

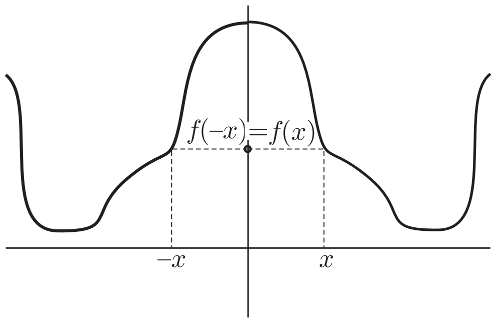
I d'altra banda $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - mx) = n$. Això ens du a establir la definició següent.

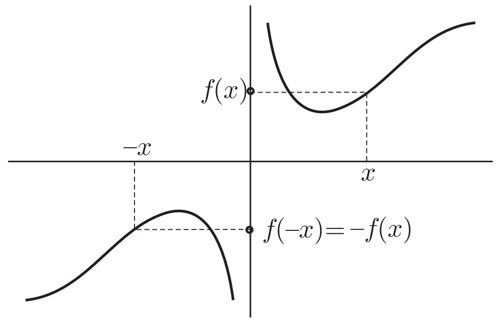
Definició 12.2 *$y = mx + n$ és asímptota oblíqua si*

$$\left\{\begin{array}{l} m = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}, \quad n = \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - mx) \\ \textit{o bé} \\ m = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}, \quad n = \lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - mx). \end{array}\right.$$

12.2 Simetries

Estudiarem les simetries respecte de l'eix d'ordenades i de l'origen de coordenades. Després d'observar els gràfics en què s'il·lustren aquestes simetries establim les definicions següents.





Definició 12.3 – *f és simètrica respecte l'eix OY si* $f(x) = f(-x)$, $\forall x \in \operatorname{Dom} f$. *També es diu que la funció és parell.*

– *f és simètrica respecte l'origen de coordenades si* $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in \operatorname{Dom} f$. *També es diu que la funció és senar.*

Exemple 12.3 $f(x) = x^2 - 4$, $f(x) = \dfrac{x^2}{x^4 - 9}$, $f(x) = \cos x$, *són funcions parells.* $f(x) = \tan x$, $f(x) = x^3$, $f(x) = 1/x$, $f(x) = \sin x$, *són funcions senars.*

Efectivament,

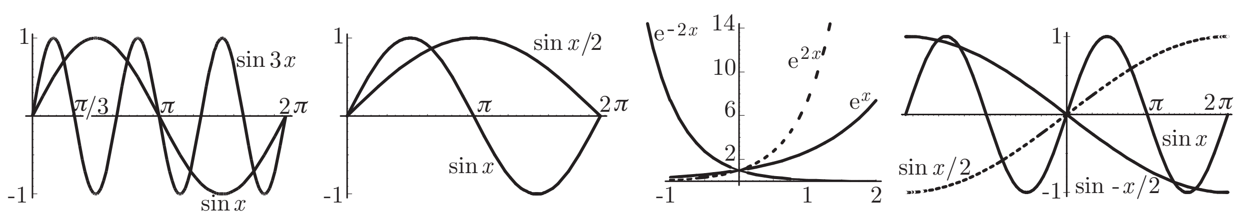
$(-x)^2 - 4 = x^2 - 4, \quad \dfrac{(-x)^2}{(-x)^4 - 9} = \dfrac{x^2}{x^4 - 9}, \quad \cos(-x) = \cos x.$

$\tan(-x) = -\tan x, \quad (-x)^3 = -x^3, \quad 1/(-x) = -1/x, \quad \sin(-x) = -\sin x.$ □

12.3 Transformacions afins o lineals sobre les variables d'una funció real de variable real. Interpretació gràfica.

Es tracta de veure com afecta al gràfic d'una funció una transformació afí o lineal d'alguna de les seves variables. Els gràfics d'aquest apartat fan referència a cadascuna de les transformacions. És fàcil d'observar a quina d'elles correspon.

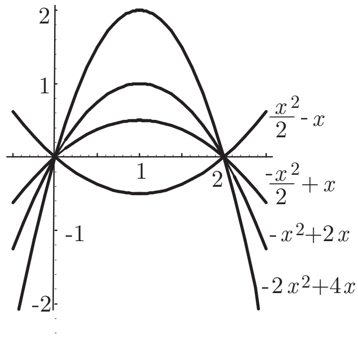
- **Cas 1** Donada una funció $f(x)$, el gràfic de $\boxed{\varphi(x) = f(kx)}$ s'obté sometent els punts del pla a una transformació en què els punts de l'eix OY resten fixos, i cada punt $(x, f(x))$ del gràfic de f es transforma en el punt $(x/k, f(x))$ del gràfic de φ. Segons els diferents valors de k, aquestes transformacions es poden descriure així:



k > 1 (0 < k < 1) : *Contracció (Dilatació)* de raó k i direcció paral·lela a l'eix OX, en la qual l'eix OY és de punts fixos. En els dos gràfics de l'esquerra, $f(x) = \sin x$.

k < −1 (−1 < k < 0) : *Contracció (Dilatació)* de raó k, seguida d'una *simetria* respecte l'eix OY, i direcció paral·lela a l'eix OX, en la qual l'eix OY és de punts fixos. En els dos gràfics de la dreta, $f(x) = e^x$ i $f(x) = \sin x$.

$\mathbf{k = -1}$: *Simetria* respecte l'eix OY, ja estudiada anteriorment.



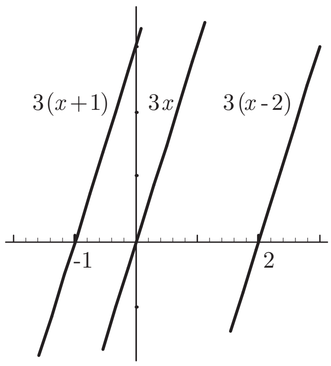
• **Cas 2** Donada una funció $f(x)$, el gràfic de $\boxed{\varphi(x) = k\, f(x)}$ s'obté sometent els punts del pla a una transformació en què els punts de l'eix OX resten fixos, i cada punt $(x, f(x))$ del gràfic de f es transforma en el punt $(x, k\, f(x))$ del gràfic de φ. Segons els diferents valors de k, aquestes transformacions es poden descriure així:

$\mathbf{k > 1}$ $(\mathbf{0 < k < 1})$: *Dilatació (Contracció)* de raó k i direcció paral·lela a l'eix OY, en la qual l'eix OX és de punts fixos.

$\mathbf{k < -1}$ $(\mathbf{-1 < k < 0})$: *Dilatació (Contracció)* de raó k, seguida d'una *simetria* respecte l'eix OX, i direcció paral·lela a l'eix OY, en la qual l'eix OX és de punts fixos.

$\mathbf{k = -1}$: *Simetria* respecte l'eix OX.

En el gràfic, $f(x) = -x^2/2 + x$.

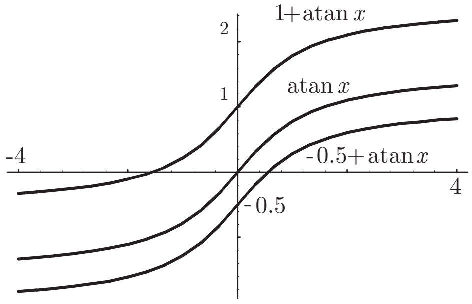


• **Cas 3** Donada una funció $f(x)$, el gràfic de $\boxed{\varphi(x) = f(x + k)}$ s'obté sometent els punts del pla a una transformació en què cada punt $(x, f(x))$ del gràfic de f es transforma en el punt $(x - k, f(x))$ del gràfic de φ. Segons els diferents valors de k, aquestes transformacions es poden descriure així:

$\mathbf{k > 0}$: *Translació* de direcció OX^-, de k unitats.

$\mathbf{k < 0}$: *Translació* de direcció OX^+, de $-k$ unitats.

En el gràfic, $f(x) = 3x$.

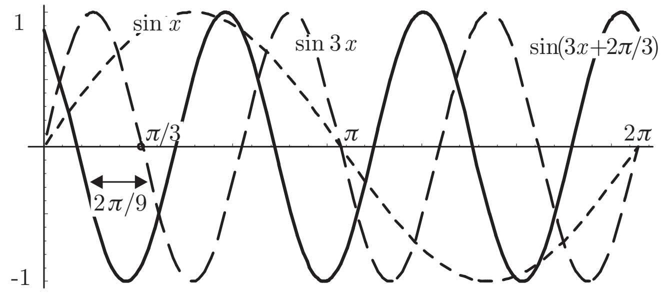


• **Cas 4** Donada una funció $f(x)$, el gràfic de $\boxed{\varphi(x) = k + f(x)}$ s'obté sometent els punts del pla a una transformació en què cada punt $(x, f(x))$ del gràfic de f es transforma en el punt $(x, k + f(x))$ del gràfic de φ. Segons els diferents valors de k, aquestes transformacions es poden descriure així:

$\mathbf{k > 0}$: *Translació* de direcció OY^+, de k unitats.

$\mathbf{k < 0}$: *Translació* de direcció OY^-, de $-k$ unitats.

En el gràfic, $f(x) = \arctan x$.



• **Cas 5** Donada una funció $f(x)$, el gràfic de $\boxed{\varphi(x) = f(ax + b)}$ el podem obtenir observant que es pot descompondre en dues transformacions de les ja estudiades. Efectivament,

$$\text{si considerem } \psi(x) = f(ax), \text{ llavors } \varphi(x) = f(a(x + b/a)) = \psi(x + b/a).$$

O sigui que primer construïm ψ mitjançant una dilatació o contracció (amb simetria o sense), i després sotmetem ψ a una translació de $|b/a|$ unitats paral·lela a OX (a la dreta o esquerra segons el signe de b/a). En el gràfic, $f(x) = \sin x$.

13 Exercicis i problemes

1. Trobeu les funcions derivades de :

1) $f(x) = x^2 \sqrt[3]{x^2} \longrightarrow f'(x) = \dfrac{8}{3}\sqrt[3]{x^5}$

2) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2-5x+5} \longrightarrow f'(x) = \dfrac{-2x^2-6x+25}{(x^2-5x+5)^2}$

3) $f(x) = \tan x - \cot x \longrightarrow f'(x) = \dfrac{4}{\sin^2(2x)}$

4) $f(x) = \dfrac{1}{2}((1+x^2)\arctan x - x) \longrightarrow f'(x) = x \cdot \arctan x$

5) $f(x) = (x^2-2x+2)e^x \longrightarrow f'(x) = x^2 e^x$

6) $f(x) = x^3 \ln x - \dfrac{x^3}{3} \longrightarrow f'(x) = 3x^2 \ln x$

7) $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} \longrightarrow f'(x) = \dfrac{-2}{(\sin x - \cos x)^2}$

8) $f(x) = \dfrac{x^5}{e^x} \longrightarrow f'(x) = \dfrac{5x^4 - x^5}{e^x}$

9) $f(x) = \sqrt{1-x^2} \longrightarrow f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

10) $f(x) = \csc^2 x + \sec^2 x \longrightarrow f'(x) = \dfrac{-16\cos(2x)}{\sin^3(2x)}$

11) $f(x) = \dfrac{1}{3\cos^3 x} - \dfrac{1}{\cos x} \longrightarrow f'(x) = \dfrac{\sin^3 x}{\cos^4 x}$

12) $f(x) = \dfrac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x} \longrightarrow f'(x) = -2\dfrac{\cos x}{\sin^3 x}$

13) $f(x) = \arcsin 2x \longrightarrow f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$

14) $f(x) = \arctan \dfrac{1}{x} \longrightarrow f'(x) = \dfrac{-1}{1+x^2}$

15) $f(x) = 5e^{-x^2} \longrightarrow f'(x) = -10xe^{-x^2}$

16) $f(x) = \dfrac{e^{-2x}+e^x}{e^{-x}} \longrightarrow f'(x) = 2e^{2x} - e^{-x}$

17) $f(x) = \arcsin \dfrac{x}{x-1} \longrightarrow f'(x) = \dfrac{-1}{|x-1|\sqrt{1-2x}}$

18) $f(x) = \cos(\arctan \sqrt{x^2-1}) \longrightarrow f'(x) = \dfrac{-1}{x|x|}$

19) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} \longrightarrow f'(x) = \dfrac{x-1}{2\sqrt{x^3}}$

20) $f(x) = \dfrac{1}{5^{x^2}} \longrightarrow f'(x) = -2\ln 5 \; x\, 5^{-x^2}$

21) $f(x)=\ln(1-x^2) \longrightarrow f'(x)=\dfrac{2x}{x^2-1}$

22) $f(x)=\ln^2 x-\ln(\ln x) \longrightarrow f'(x)=\dfrac{2\ln x}{x}-\dfrac{1}{x\ln x}$

23) $f(x)=(a+x)\sqrt{a-x} \longrightarrow f'(x)=\dfrac{a-3x}{2\sqrt{a-x}}$

24) $f(x)=\sqrt[3]{x+\sqrt{x}} \longrightarrow f'(x)=\dfrac{1+2\sqrt{x}}{6\sqrt{x}\sqrt[3]{(x+\sqrt{x})^2}}$

25) $f(x)=\dfrac{4}{3}\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+2}} \longrightarrow f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}$

26) $f(x)=\dfrac{3}{4}\ln\dfrac{x^2+1}{x^2-1}+\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x-1}{x+1}+\dfrac{1}{2}\arctan x \longrightarrow f'(x)=\dfrac{x^2-3x}{x^4-1}$

27) $f(x)=\ln\dfrac{1+\sqrt{\sin x}}{1-\sqrt{\sin x}}+2\arctan(\sqrt{\sin x}) \longrightarrow f'(x)=\dfrac{2}{\cos x\sqrt{\sin x}}$

28) $f(x)=\arctan\left(\ln\dfrac{1}{x}\right) \longrightarrow f'(x)=\dfrac{-1}{x(1+\ln^2 x)}$

29) $f(x)=e^{-x}(3\sin 3x-\cos 3x) \longrightarrow f'(x)=10e^{-x}\cos 3x$

30) $f(x)=\dfrac{1}{\ln^2 x} \longrightarrow f'(x)=\dfrac{-2}{x\ln^3 x}$

31) $f(x)=\ln\dfrac{\sqrt{x^2+9}+x}{\sqrt{x^2+9}-x} \longrightarrow f'(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x^2+9}}$

32) $f(x)=x^{\sin x} \longrightarrow f'(x)=x^{\sin x-1}((\cos x\ln x)x+\sin x)$

33) $f(x)=x^{\ln x} \longrightarrow f'(x)=2x^{\ln x-1}\ln x$

34) $f(x)=\ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right) \longrightarrow f'(x)=\dfrac{1}{x^2}(1-\ln x)$

35) $f(x)=(\sin x)^{\cos x} \longrightarrow f'(x)=(\sin x)^{\cos x}\left(-\sin x\ln(\sin x)+\dfrac{\cos^2 x}{\sin x}\right)$

2. Troba els dominis de les funcions de l'exercici 1: 1.9, 1.17, 1.22, 1.25 i 1.31.

Solució: $[-1,1]$, $]-\infty,1/2]$, $]1,+\infty[$, $]-\infty,-2[\cup[1,+\infty[$, $\mathbb{R}$.

3. Calculeu les antiimatges següents, referents a les funcions de l'exercici 1:

1.10 $f^{-1}(4)$ – 1.16 $f^{-1}(2)$ – 1.17 $f^{-1}(\pi/4)$ – 1.19 $f^{-1}(3)$ – 1.20 $f^{-1}\left(\frac{\pi}{3}\right)$ – 1.28 $f^{-1}\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Solució: $(2n+1)\frac{\pi}{8}$, 0 i $\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$, $-1-\sqrt{2}$, $\frac{7\pm3\sqrt{5}}{2}$, 0.6562595, $e^{-\sqrt{3}}$.

4. Exercicis diversos.

1) Sigui la funció $f(x)=|x^2-4x|+3x$ definida en l'interval $[-4,4]$.
   (a) Utilitzeu la definició de derivada per veure que no és derivable en $x=2$ i $x=-2$.
   (b) Busqueu les rectes tangents paral·leles a la bisectriu del segon quadrant.
   (c) Busqueu els màxims i mínims locals i absoluts.

   Solució: Tangents laterals $\longrightarrow$ $x+y-8=0$ i $x+y+8=0$.
   Màx. abs.:$(4,24)$. Mín. abs.:$(-2,-6)$. Màx. loc.:$(-4,0),(3/2,61/4)$. Mín. loc.:$(2,6)$

2) Una recta tangent a $y=x^3-9x$ talla l'eix d'ordenades quan $y=-2$. Trobeu el punt de tangència i si aquesta recta té algun altre punt de tall amb la corba.
   Solució: $(1,-8)$, $(-2,10)$.

3) Estudieu la continuïtat, derivabilitat, i feu la representació gràfica de la funció:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \geq 3 \\ \dfrac{6x}{x-1} & , x < 3 \end{cases} .$$

Solució: Contínua en $\mathbb{R} - \{1\}$, discontinuïtat asimptòtica en $x = -1$. Derivable en $\mathbb{R} - \{1, 3\}$.

4) Per a quins valors de p i q és derivable la funció

$$f(x) = \begin{cases} px^2 & , x \leq 1 \\ qx + 1 - q & , x > 1. \end{cases}$$

Existeix $f''(1)$ pels valors trobats? És contínua $f'(x)$, en x=1?
Solució: $p = 1$ i $q = 2$. No. Sí.

5) Donada $f(x) = \dfrac{2 + |x|}{x - 2}$, representeu-la gràficament i raoneu si existeix $f'(0)$.
Solució: No existeix $f'(0)$.

6) Donada $f(x) = \sqrt{\ln(e^{2x} - 3e^x)}$, trobeu el seu domini i l'equació de la seva recta tangent quan $x = \ln 4$.
Solució: $\left[\ln \frac{3+\sqrt{13}}{2}, +\infty\right]$, $5x - 2\sqrt{\ln 4}y - 3\ln 4 = 0$.

7) Estudieu el domini, la derivabilitat, i la monotonia de la funció

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2 - 1}{2x + 5}\right) .$$

Esbrineu, també, els punts en els quals la recta tangent al seu gràfic és paral·lela a la recta $10x + 3y = 0$.
Solució: $\text{Dom}f =]-5/2, -1[\cup]1, +\infty[$. $\text{Dom}f' = \text{Dom}f$. $f'(x) = \frac{2x^2+10x+2}{(x^2-1)(2x+5)}$. Decreixent a $]-5/2, -1[$, creixent a $]1, +\infty[$. $(-2, f(-2))$ i $(-1.52, f(-1.52))$.

8) Donada la funció $g(x) = 1 - 2\sqrt{x - 3}$, representeu-la gràficament a partir del gràfic de $f(x) = \sqrt{x}$. Trobeu $g'(x)$ i $g^{-1}(x)$ amb els seus dominis respectius i representeu $g^{-1}(x)$ gràficament. Calculeu amb l'ajut del teorema de la inversa $(g^{-1})'(x)$, i digueu en quins punts existeix.
Solució: $g'(x) = -1/\sqrt{x-3}$, $g^{-1}(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{13}{4}$, $(g^{-1})'(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$, $\text{Dom}g' =]3, +\infty[$, $\text{Dom}g^{-1} =]-\infty, 1]$, $\text{Dom}(g^{-1})' =]-\infty, 1[$.

9) Trobeu la recta tangent al gràfic de $f(x) = \dfrac{e^{-2x} + e^x}{e^{-x}}$, paral·lela a la recta $x - y = 0$.
Solució: $x - y + 2 = 0$.

10) Trobeu la funció derivada de $f(x) = \sin x$ utilitzant la definició de derivada i la igualtat trigonomètrica $\sin(x + h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h$.

11) Raoneu que es pot calcular la derivada de $f(x) = \cos x$ en els punts $x \neq \pi/2 + k\pi$, si tenim en compte que $f(x) = \pm\sqrt{1 - \sin^2 x}$, amb l'ajut de la regla de la cadena. Feu-ne el càlcul. Utilitzeu la definició de derivada per demostrar que la funció $f(x) = \cos x$ és derivable en els punts $x = \pi/2 + k\pi$, i que $f'(\pi/2 + k\pi) = -\sin(\pi/2 + k\pi)$.

12) Trobeu l'asímptota horitzontal i estudieu la continuïtat i la concavitat de la funció $f(x) = \arctan \dfrac{x}{x - 1}$.
Solució: $y = \pi/4$, salt finit a $x = 1$, $\bigcap$ en $]-\infty, 1/2[$ i $\bigcup$ en $[1/2, +\infty[-\{1\}$.

5. Problemes d'optimització.

1) Un mirall rectangular de dimensions 60×100 es trenca per un cantó. El més petit dels dos trossos resultants té forma de triangle rectangle.

   (a) Trobeu el mirall rectangular d'àrea màxima que es pot construir amb el tros més gran —aprofitant els costats no trencats—, si les mesures dels catets del triangle són:

      i) 12 i 16 (respectivament sobre els costats de 60 i 100).

      ii) 12 i 20 (ídem).

   (b) Si un catet del triangle trencat mesura 12 (el corresponent al costat de 60), per quins valors de l'altre catet el mirall ha de ser construït amb dos talls?

   Solució: Mirall de mesures 60×84. Mirall de mesures 54×90. Quan l'altre catet té longitud major que $100/26$ i menor que 25.

2) En el problema de la introducció en el qual es vol trobar una caixa de volum màxim, imaginem que la cartolina de partida té dimensions $a \times b$, on $0 < a < b$. Justifiqueu que la solució del problema es troba en $x_m = \dfrac{a+b-\sqrt{a^2+b^2-ab}}{6}$, comprovant a la vegada que $0 < x_m < \dfrac{a}{2}$.

3) De totes les paràboles de la família $\{y = x^2 + ax - 2a,\ a \in [-6, 0]\}$, trobeu la que té l'ordenada del vèrtex més gran i la que té l'ordenada del vèrtex més petita.

   Solució: $y = x^2 - 4x + 8,\ y = x^2$

4) Un mòbil M_1 surt d'un punt A en direcció un punt B, a 90 KM/h. Un altre mòbil M_2 surt al mateix temps del punt mitjà O, d'A i B en una direcció que forma un angle de $60°$ amb AB, a 80 KM/h. La distància entre A i B és de 100 KM. El moviment s'atura quan M_1 arriba a B. Calculeu en quin moment la distància entre els dos serà màxima i en quin moment mínima.

   Solució: 1.111 hores, 0.342 hores.

5) Troba els extrems absoluts de la funció $f(x) = 3 - \sqrt[3]{x^2 - 2x + 1}$ en l'interval $[0, 3]$.

   Solució: màxim: $x = 1$, mínim: $x = 0$.

6) En una sala de cinema rectangular, des de quin punt dels costats de la sala es veu la pantalla sota un angle de visió màxima?

   Solució: Des d'un punt situat a distància, —des de la intersecció S de la paret de la pantalla amb el lateral de la sala—, igual a la mitjana geomètrica de la distància de S a un costat de la pantalla i la distància de S a l'altre costat de la pantalla.

7) Els beneficis de dues empreses A i B, en milions de pessetes, acumulats des de principi d'any fins el moment t, en mesos, venen donats per les funcions $A(t) = 5t^2 - 32t + 48$ i $B(t) = 2t^2 + 200$. Quin dia de l'any la diferència de beneficis és màxima?

   Solució: El dia 10 de juny.

8) De tots els rectangles inscrits en un trapezi isòsceles, de costats paral·lels amb longituds 10 i 12, i alçada 10, trobeu el de perímetre màxim i el d'àrea màxima. (Un dels costats del rectangle descansa sobre el costat de longitud 12).

   Solució: El de costats 10×10.

9) Troba el rectangle de perímetre màxim que es pot inscriure entre la paràbola d'equació $y = 1 - 2x^2$ i la recta $y = 0$, de manera que un dels seus costats estigui sobre $y = 0$. I si considerem la paràbola $y = 1 - x^2$?

   Solució: Perímetre=3. No existeix.

10) Les cel·les de les abelles tenen forma de prisma recte de base un hexàgon regular. La base oposada no és un hexàgon perpendicular a l'eix de simetria del prisma, sinó que està formada per tres rombes iguals, i igualment inclinats respecte del pla perpendicular a l'eix del prisma. S'observa fàcilment que considerant rombes amb diferents inclinacions, —sempre que tinguin una parella de vèrtexs oposats fixes sobre les arestes del prisma—, no es modifica el volum de la cel·la. S'ha mesurat aquesta inclinació i s'ha comprovat que minimitza la superfície de la cel·la. Calculeu els angles dels rombes. Indicació: Expresseu la superfície total de la cel·la en funció de l'angle d'inclinació de les cares ròmbiques.
Solució: $70°31'43"$, $109°28'16"$

11) (Extret de Vèrtex-3, Ed. Vicens-Vives). En un país sense inflació, els cotxes nous valen un milió de diners. Estadísticament se sap que, durant el primer any, els recanvis i reparacions costen 50000 diners i que cada any successiu costen 20000 diners més que l'any anterior. D'altra banda un cotxe d'un any es pot revendre per 600000 diners, i cada any que passa el preu de revenda baixa 50000 diners. En aquestes condicions, una persona que només compri cotxes nous, cada quants anys ha de canviar el cotxe perquè li surti el més econòmic possible?
Solució: 6 anys.

12) De tots els cilindres amb tapes de volum V trobeu el que té superfície total màxima.
Solució: El de radi $\sqrt[3]{V/2\pi}$.

6. Un teorema i algunes aplicacions.

1) Si dibuixeu qualsevol gràfic d'una funció contínua en un interval tancat $[a, b]$ i derivable en $]a, b[$, observeu que sempre sembla existir algun punt $(\alpha, f(\alpha))$ tal que la recta tangent a la corba per aquest punt és paral·lela al segment d'extrems $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$. Aquesta afirmació constitueix l'anomenat *teorema del valor mitjà del càlcul diferencial*. Es demana que l'expresseu en forma analítica, utilitzant el concepte de derivada.

2) Raoneu que si una funció f és contínua en $[a, b]$ i derivable en $]a, b[$ tal que $f'(x) = 0,\ \forall x \in]a, b[$, llavors f és constant en $[a, b]$. **Indicació:** Suposeu que existeixen dos punts $x_1, x_2 \in]a, b[$ tals que $f(x_1) \neq f(x_2)$ i deduïu-ne una contradicció utilitzant el teorema del valor mitjà.

3) Si $f(x) = 4x - 3$ trobeu una funció $P(x)$ tal que $P'(x) = f(x)$ i que el seu gràfic passi pel punt $(3, 0)$. **Indicació:** Justifiqueu i utilitzeu que si $P'(x) = Q'(x),\ \forall x \in]a, b[$, llavors $P(x) - Q(x) = K \in \mathbb{R},\ \forall x \in]a, b[$.

4) La posició d'un mòbil en un instant de temps t, ve donada per una funció $s(t)$.
   (a) Definiu la velocitat mitjana v_{0h} entre dues posicions $s_0 = s(t_0)$ i $s_{0h} = s(t_0 + h)$.
   (b) Si considerem la velocitat instantània $v(t_0)$, en l'instant t_0, com la velocitat mitjana entre dos moments t_0 i $t_0 + h$ "infinitament pròxims", raoneu que $v(t_0) = s'(t_0)$.
   (c) Raoneu que l'acceleració instantània $a(t_0) = s''(t_0)$.
   (d) Demostreu, com a conseqüència, que un mòbil amb acceleració constant $a(t) = K \in \mathbb{R}$, té la seva posició determinada per $s(t) = \dfrac{K}{2}\, t^2 + v(0)\, t + s(0)$.

5) La posició d'un mòbil ve determinada per $s(t) = 100t^2 - t^3,\ t \geq 0$, en què $s(t)$ ve donat en cm i el temps t en segons.
   (a) En quin moment el mòbil inverteix la direcció del seu moviment?
   (b) En quin moment el mòbil arriba al punt de partida?
   (c) Quines són la velocitat i l'acceleració quan ha recorregut 1536 cm?
   (d) Quan deixa d'accelerar i comença a frenar?

(e) Un altre mòbil surt en sentit contrari pel mateix camí, amb una velocitat inicial de valor absolut 2880 cm/seg, i una acceleració $a(t) \cdot t$, on $a(t)$ és l'acceleració del primer mòbil. Quan es trobaran?

Solució: 66.67 seg.; 100 seg.; 712 cm/seg i 176 cm/seg^2; 33.33 seg.; 12 seg. i 64.15 seg.

6) Sotmetem un capital C_0 a un interès continu del $r/100$ anual, és a dir que la capitalització no es fa al final de cada cert interval de temps, sinó que es fa a cada moment. Comproveu que el capital $C(t)$ obtingut en cada instant t compleix:

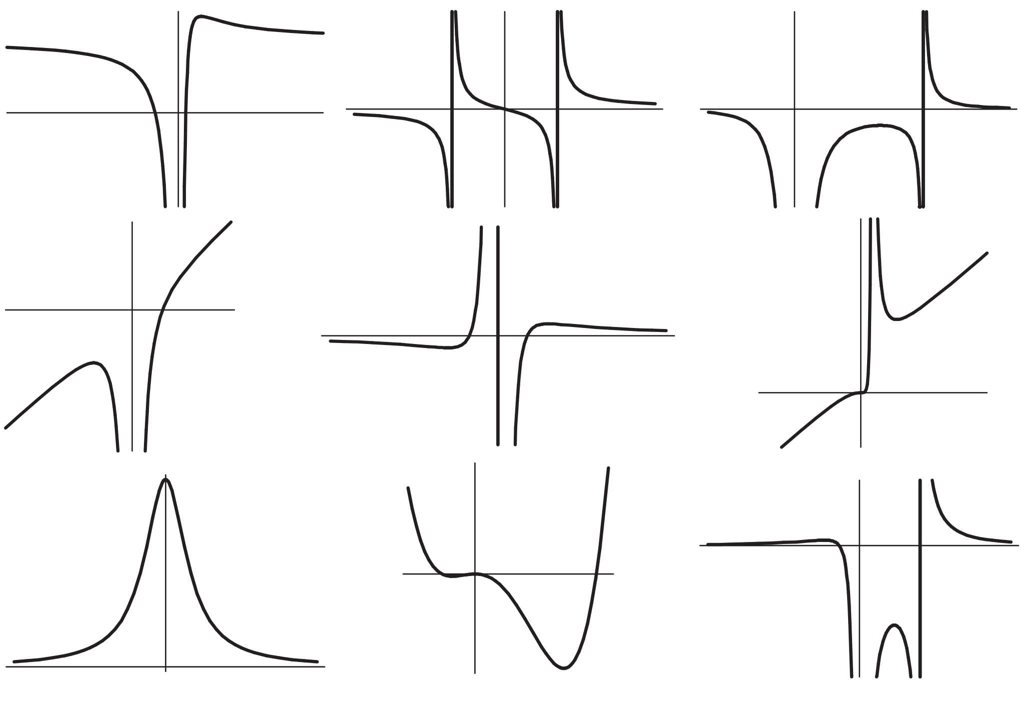
$$\lim_{h\to 0} \frac{C(t+h)-C(t)}{h} = \frac{r}{100}\, C(t). \tag{6}$$

A continuació a partir de (6) trobeu $C(t)$. *Solució*: $C(t) = C_0\, e^{\frac{r}{100}t}$
Indicació: Primerament suposeu que es capitalitza al final de cada interval de temps de durada h, trobeu el valor de $C(t+h)-C(t)$ i feu un pas al límit.

7. Trobeu les asímptotes, interpreteu la primera i segona derivades de les funcions següents, i representeu-les gràficament utilitzant la informació obtinguda:

1) $f(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2$
2) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-6}$
3) $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$
4) $f(x) = \dfrac{3}{1+4x^2}$
5) $f(x) = \dfrac{x^2-3}{x^3}$
6) $f(x) = \dfrac{x^3-4}{x^2}$
7) $f(x) = \dfrac{1}{x^3-3x^2}$
8) $f(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{x^2}$
9) $f(x) = \dfrac{9x+12}{x^3-4x^2}$

Solució: Els gràfics, —en ordre diferent—, de les funcions proposades són,



14 APÈNDIX

A Algunes demostracions

Teorema 3.1

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})h}=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}\right)\left(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{\left(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}=$$
$$=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

□

Teorema 3.2

$$\lim_{h\to 0}\frac{(f\pm g)(x_0+h)-(f\pm g)(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)\pm g(x_0+h)]-[f(x_0)\pm g(x_0)]}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{[f(x_0+h)-f(x_0)]\pm[g(x_0+h)-g(x_0)]}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\pm\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}=f'(x_0)\pm g'(x_0)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(f\cdot g)(x_0+h)-(f\cdot g)(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)\cdot g(x_0+h)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)\cdot g(x_0+h)-f(x_0)\cdot g(x_0+h)+f(x_0)\cdot g(x_0+h)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}g(x_0+h)+\lim_{h\to 0}f(x_0)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}=$$
$$=f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0)$$

Observem, a l'últim pas de la demostració, que $\lim\limits_{h\to 0}g(x_0+h)=g(x_0)$, perquè g és derivable en x_0 i, per tant, contínua en x_0.

La prova de la derivabilitat del quocient la farem tenint en compte que el quocient es pot escriure en forma de producte al qual aplicarem el resultat anterior:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x_0)=\frac{f(x_0)}{g(x_0)}=f(x_0)\cdot\frac{1}{g(x_0)}=\left(f\cdot\frac{1}{g}\right)(x_0)\,.$$

Primerament ens caldrà estudiar la derivabilitat de $\left(\frac{1}{g}\right)(x)=\frac{1}{g(x)}$, en què sabem que la funció g és derivable en x_0 i, per tant, contínua en x_0:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{1}{g}\right)(x_0+h)-\left(\frac{1}{g}\right)(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{g(x_0+h)}-\frac{1}{g(x_0)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0)-g(x_0+h)}{g(x_0+h)\cdot g(x_0)\cdot h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{-1}{g(x_0+h)\cdot g(x_0)}=g'(x_0)\cdot\frac{-1}{g(x_0)^2}=\frac{-g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}\,.$$

Ara, en ser, f i $1/g$ derivables en x_0, tenim que $f/g = f \cdot (1/g)$ és derivable en x_0 i el valor de la seva derivada és:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0) \cdot \frac{1}{g(x_0)} + f(x_0) \cdot \frac{-g'(x_0)}{[g(x_0)]^2} =$$
$$= \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$

□

Teorema 7.1

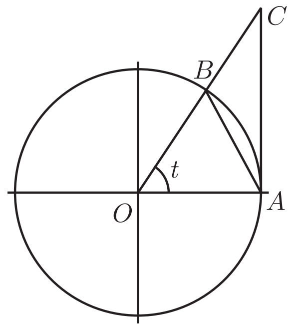
Mostrem una prova restringida al cas en què existeix un entorn d'a en el qual $f(a) \neq f(a+h)$, per als $a+h$ d'aquest entorn. Així podrem considerar el factor $k = f(a+h) - f(a) \neq 0$ per introduir-lo en el moment adequat. La demostració general té una mica més de complexitat i no la fem.

$$\lim_{h\to 0} \frac{(g\circ f)(a+h) - (g\circ f)(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(f(a+h)) - g(f(a))}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(f(a)+k) - g(f(a))}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{[g(f(a)+k) - g(f(a))]\cdot k}{k \cdot h} \underset{(*)}{=} \lim_{h\to 0} \frac{g(f(a)+k) - g(f(a))}{k} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} =$$
$$= g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

$(*)$ En ser f contínua en a, quan $h \to 0$ es compleix $k = f(a+h) - f(a) \to 0$. □

B Una desigualtat trigonomètrica

Per demostrar la desigualtat (4) treballarem amb $h > 0$ i farem $h/2 = t$ per tal de simplificar el desenvolupament, (el cas $h < 0$ es treballaria de manera semblant). Compararem en la circumferència trigonomètrica adjunta les àrees dels triangles $T_1 = OAB$, $T_2 = OAC$ i del sector circular $S = OAB$. Observem que àrea$(T_1) <$ àrea$(S) <$ àrea(T_2) implica



$$\frac{\sin t}{2} < \frac{t}{2} < \frac{\tan t}{2} = \frac{\sin t}{2\cos t}.$$

D'on surt immediatament que $\boxed{\cos t < \frac{\sin t}{t} < 1}$.

Índex

1 Introducció **1**

2 Concepte de funció derivable **3**
2.1 Primeres definicions . . . 3
2.2 Interpretació geomètrica de la derivada . . . 6

3 Derivades d'algunes funcions elementals. Àlgebra de derivades **6**

4 Funcions contínues i límits. **9**
4.1 Límits de funcions . . . 10
4.2 Àlgebra de límits . . . 12
4.3 Algunes estratègies per a la resolució d'indeterminacions . . . 13
4.4 Exercicis . . . 14

5 Continuïtat en un punt. Tipus de discontinuïtats **15**
5.1 Definició i teoremes . . . 15
5.2 Tipus de discontinuïtats . . . 15
5.3 Exercicis . . . 16

6 Relació entre derivabilitat i continuïtat **16**

7 Composició de funcions. Regla de la cadena **17**
7.1 Composició de funcions . . . 17

8 Funcions inverses **18**
8.1 Estudi de les inverses de la funció $f(x) = x^2$ . . . 19
8.2 Definició i representació gràfica . . . 20
8.3 Funcions inverses de les funcions trigonomètriques . . . 20

9 Derivabilitat de la funció inversa **21**
9.1 El teorema de la inversa aplicat a la derivació de funcions elementals . . . 22

10 Monotonia i extrems d'una funció **24**

11 Funció derivada segona. Concavitat i punts d'inflexió **26**

12 Representació gràfica de funcions **27**
12.1 Asímptotes . . . 28
12.2 Simetries . . . 29
12.3 Transformacions afins o lineals sobre les variables d'una funció real de variable real. Interpretació gràfica. . . . 29

13 Exercicis i problemes **31**

14 APÈNDIX **37**

A Algunes demostracions **37**

B Una desigualtat trigonomètrica **38**