Càlcul integral

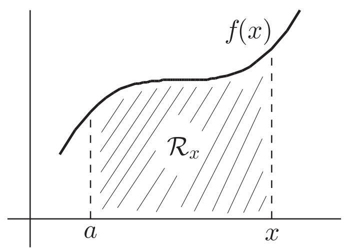
Ramon Nolla
Departament de Matemàtiques
IES Pons d'Icart

1 Introducció. El problema de l'àrea

El problema del càlcul de l'àrea d'una regió plana és un problema d'una complexitat considerable. Un exemple clàssic el tenim en els intents infructuosos, des de l'antiguitat grega, de quadrar un cercle amb l'ús del regle i del compàs. Això significa construir, amb aquestes eines, un quadrat que tingui la mateixa superfície que un cercle donat, la qual cosa és una manera de mesurar la superfície del cercle. Fins l'any 1882 no es va aconseguir demostrar que aquesta empresa era impossible; ho aconseguí Lindemann en l'article «Ueber die Zahl Pi», *Mathematische Annalen* 20, 213–225.[1] Quines eren doncs les eines adequades per tractar aquesta qüestió? Els grecs ho van aconseguir amb un mètode força sofisticat, rigorós i complex anomenat *mètode d'exhaustió*, sembla ser que ideat per Éudox de Cnidos (s. IV a.C.), amb el que Arquimedes (s. III a.C.) va aconseguir d'establir un volum considerable de resultats sorprenents i amb el que s'evitava l'ús de l'infinit al qual tenien veritable horror. En el segle XVII Newton i Leibnitz, amb l'ajut del seu càlcul diferencial i integral, van encetar un nou camí que és el que aquí seguirem.

Ens centrarem en el càlcul d'àrees de recintes limitats per corbes contínues, més concretament àrees de recintes del tipus

$$\mathcal{R}_x = \{(t, y) \;/\; a \le t \le x \;,\; 0 \le y \le f(x)\}, \qquad (1)$$

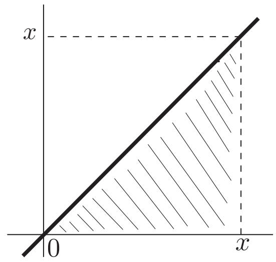


que es podrà generalitzar als casos $f(x) \le 0$. Fixem-nos en que hem fixat el punt a i l'àrea dependrà del punt $x > a$. L'estratègia a seguir consistirà en establir, a partir de l'observació d'uns exemples concrets, una conjectura que relacionarà el càlcul d'àrees amb el càlcul de derivades. De moment utilitzarem la notació

$$\text{àrea}\,(\mathcal{R}_x) = A_a(x).$$

[1]Podeu consultar Carl B. Boyer, *Historia de la matemática*, Alianza Universidad Textos/94, Madrid, 1986, p. 690. L'article es pot trobar a Berggren–Borwein–Borwein. *Pi: A Source Book*, Springer, New York, (reedició augmentada, 2000).

Exemple 1 *Càlcul d'$A_0(x)$ quan $f(x) = x$.*

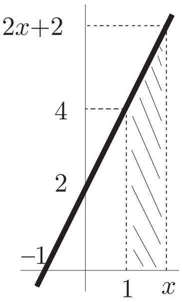


Per la fórmula de l'àrea d'un triangle tenim

$$A_0(x) = \frac{1}{2}(x-0)\cdot f(x) = \frac{1}{2}\,x\cdot x = \frac{x^2}{2}\,.$$

□

Exemple 2 *Càlcul d'$A_1(x)$ quan $f(x) = 2x + 2$.*



Partint de la fórmula de l'àrea del trapezi, aconseguida restant les àrees de dos triangles, tenim que

$$A_1(x) = \frac{f(1)+f(x)}{2}\cdot(x-1) = \frac{4+(2x+2)}{2}\cdot(x-1) = x^2+2x-3\,.$$

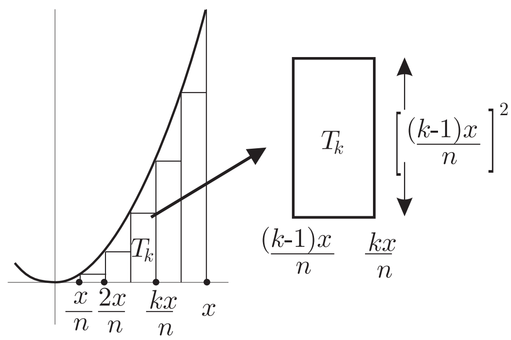
□

Exemple 3 *Càlcul d'$A_0(x)$ quan $f(x) = x^2$.*

Per tal d'obtenir el valor d'$A_0(x)$ procedim de la manera següent:

a) La divisió de l'interval $[0, x]$ en n subintervals d'igual longitud. Aquests són del tipus $\left[(k-1)\frac{x}{n}, k\frac{x}{n}\right]$, on $1 \le k \le n$, i la seva longitud és $\frac{x}{n}$.

b) La inscripció entre l'eix d'abscisses i la paràbola de n rectangles, T_k, tals que la seva base és cadascun dels intervals anteriors.



c) El càlcul de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \grave{a}rea(T_k)$.

$$\sum_{k=1}^{n} \grave{a}rea(T_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{n}\left[(k-1)\frac{x}{n}\right]^2 = \sum_{k=1}^{n}(k-1)^2\frac{x^3}{n^3} = \frac{x^3}{n^3}\left[\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2\right], \qquad (2)$$

on cal trobar el valor de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2$, la qual cosa es farà, en general, calculant la suma

$$\sum_{p=1}^{n} p^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2.$$

Sabent que $(n+1)^3 - n^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$ podem construir una col·lecció d'igualtats que un cop sumada ens solucionarà el problema. Efectivament,

$$\begin{array}{lcl}
2^3 - 1^3 & = & 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 \\
3^3 - 2^3 & = & 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 \\
4^3 - 3^3 & = & 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1 \\
\vdots & & \vdots \\
n^3 - (n-1)^3 & = & 3 \cdot (n-1)^2 + 3 \cdot (n-1) + 1 \\
(n+1)^3 - n^3 & = & 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1 \\
\hline
(n+1)^3 - 1 & = & 3 \sum_{p=1}^{n} p^2 + 3 \sum_{p=1}^{n} p + n = 3 \sum_{p=1}^{n} p^2 + 3 \frac{(1+n)n}{2} + n.
\end{array}$$

D'on obtenim $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} p^2 = \frac{1}{3} n^3 + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{6} n.$

I si fem $p = n - 1$ i substituïm a l'equació (2), obtenim

$$\sum_{k=1}^{n} \grave{a}rea(T_k) = \frac{x^3}{n^3} \left(\frac{1}{3}(n-1)^3 + \frac{1}{2}(n-1)^2 + \frac{1}{6}(n-1) \right).$$

d) El càlcul de $A_0(x) = \displaystyle\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \grave{a}rea(T_k)$.

$$A_0(x) = x^3 \cdot \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{3} \frac{(n-1)^3}{n^3} + \frac{1}{2} \frac{(n-1)^2}{n^3} + \frac{1}{6} \frac{n-1}{n^3} \right) = x^3 \left(\frac{1}{3} + 0 + 0 \right) = \frac{x^3}{3}.$$

□

Notem que el grau de complexitat en el càlcul de l'àrea va en augment, i ens veiem abocats a preguntar-nos si no podríem trobar una drecera que abreugés l'esforç esmerçat. Trobar una resposta afirmativa no sembla difícil un cop conegut el càlcul diferencial. Si observem els resultats obtinguts

$$\begin{array}{lcl}
A_0(x) = \dfrac{x^2}{2} & \longrightarrow & f(x) = x = A_0'(x), \\
A_1(x) = x^2 + 2x - 3 & \longrightarrow & f(x) = 2x + 2 = A_1'(x), \\
A_0(x) = \dfrac{x^3}{3} & \longrightarrow & f(x) = x^2 = A_0'(x),
\end{array}$$

podem establir la *conjectura* següent, de la qual establirem la veritat posteriorment[2]:

$$\boxed{f(x) \geq 0 \quad \text{i} \quad f \quad \text{contínua en [a,b]} \Longrightarrow A_a'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]}.$$

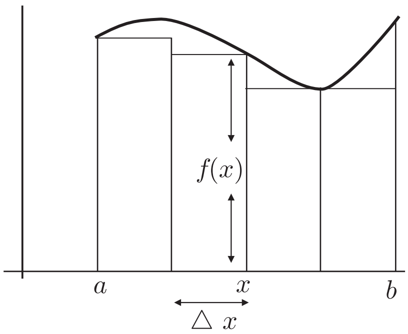
2 Funcions primitives

Treballant sota la hipòtesi que aquesta conjectura és certa, notem la importància que té el càlcul de funcions $P(x)$ tals que la seva derivada $P'(x)$ sigui igual a una funció $f(x)$ donada. Aquestes funcions $P(x)$ reben el nom de *primitives* de $f(x)$.

[2] S'entén que $A_a'(a)$ i $A_a'(b)$ es calculen respectivament per la dreta i per l'esquerra.

Cal observar que amb el càlcul de primitives no queda totalment resolt el problema de l'àrea, perquè si $P(x)$ és primitiva d'una funció $f(x)$ també ho són totes les funcions que es poden escriure de la forma $P(x) + K$, on K és una constant real.[3] Quina d'aquesta infinitat de primitives és la que ens descriu l'àrea? Aquesta qüestió la contestarem més endavant quan controlem millor el càlcul de primitives.

2.1 Qüestions de notació i nomenclatura



La relació existent entre el càlcul d'àrees i el càlcul de primitives, junt amb el mètode utilitzat en el cas de la paràbola ens permet d'introduir la *notació* de LEIBNITZ [1646-1716] que és la vigent actualment. Observant el gràfic adjunt, on $f(x) \geq 0$, i utilitzant una notació poc rigorosa veiem que

$$A_a(b) = \lim_{\Delta x \to 0} \sum f(x)\,\Delta x, \tag{3}$$

on Δx és una notació clàssica que representa un *increment de* x, igual a la mesura de la base dels rectangles inscrits, mentre que $f(x)$ n'és l'alçada.[4] Aquesta notació evoluciona en la de Leibniz

$$\int f(x)\,dx, \tag{4}$$

utilitzada per designar el *conjunt de primitives d'una funció.* El símbol $\int$ representa la inicial deformada **S** de la paraula suma, i dx representa l'increment Δx quan "es fa més i més petit", amb tota l'ambigüitat que això implica, i es llegeix *diferencial*[5] *de* x. Al conjunt de primitives representat en (4) se l'anomena *integral indefinida de la funció* f, i aquest nom s'utilitza igualment en el cas de funcions amb valors negatius.

Exemple 4 *Càlcul de* $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^3-1}\,dx.$

$$\int \frac{x^2}{x^3-1}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{x^3-1}\,dx = \frac{1}{3}\ln(x^3-1) + K.$$

□

Quan es tracta de calcular una àrea sota el gràfic d'una funció contínua i positiva, hem dit que coincideix amb el $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \sum f(x)\,\Delta x$, si la funció és positiva; i és immediat veure que coincideix amb el mateix límit afectat del signe menys si la funció és negativa. Quan entrem de ple en aquest càlcul escriurem, més endavant, per representar aquest límit,

$$\int_a^b f(x)\,dx. \tag{5}$$

[3]Que les primitives són totes d'aquest tipus és de moment una conjectura que establirem més endavant com un teorema.

[4]Introduir rigor en aquest punt no és un problema trivial Grans matemàtics com CAUCHY [1789-1857] i RIEMANN [1826-1866] van dedicar-hi grans esforços. Només direm que es pot assegurar que la igualtat (3) és certa sigui quina sigui la partició en intervals que es faci, sempre que la màxima longitud dels intervals tendeixi a zero, i les alçades dels rectangles siguin imatges de qualsevol punt de cada subinterval.

[5]Notem que el símbol dx no té cap valor operatiu, però pot ser intressant no oblidar-lo perquè ens recorda la variable respecte la qual estem *integrant.* Així $\int yz\,dz = \frac{z^2 y}{2} + K$.

Aquest coincidirà amb el valor de l'àrea quan la funció sigui positiva, i amb el valor de l'àrea amb signe negatiu quan la funció sigui negativa. Al límit representat en (5) se l'anomena *integral definida de la funció* f en l'interval $[a, b]$, on a i b reben el nom de *límits d'integració*.

2.2 Àlgebra del càlcul de primitives

De l'àlgebra del càlcul de derivades en resulten immediatament dues propietats del càlcul de primitives que exposem seguidament.

Teorema 1 *Si f i g són funcions contínues:*

a) $\displaystyle\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx = \int (f+g)(x)\,dx.$

b) $\displaystyle\int a \cdot f(x)\,dx = a \cdot \int f(x)\,dx.$

Prova.

a) Si $F(x)$ i $G(x)$ són primitives de $f(x)$ i $g(x)$, només caldrà veure que $F+G$ és primitiva de $f+g$:

$$(F+G)'(x) = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x) = (f+g)(x).$$

b) Si $F(x)$ és primitiva de $f(x)$, només caldrà demostrar que $a \cdot F(x)$ és primitiva de $a \cdot f(x)$:

$$(a \cdot F)'(x) = a \cdot F'(x) = a \cdot f(x).$$

□

3 Integrals quasi-immediates

A partir del càlcul de derivades és immediat d'establir les següents fòrmules d'integració:

a) $\int a\,dx = a\,x + K$

b) $\displaystyle\int [f(x)]^k\, f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{k+1}}{k+1} + K$ (si $k \neq -1$)

c) $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + K$

d) $\displaystyle\int e^{f(x)}\, f'(x)\,dx = e^{f(x)} + K$

e) $\displaystyle\int a^{f(x)}\, f'(x)\,dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + K = a^{f(x)} \cdot \log_a e + K$

f) $\displaystyle\int \cos[f(x)]\, f'(x)\,dx = \sin[f(x)] + K$

g) $\displaystyle\int \sin[f(x)]\, f'(x)\,dx = -\cos[f(x)] + K$

h) $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{\cos^2[f(x)]}\,dx = \tan[f(x)] + K$

i) $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}\,dx = \arcsin[f(x)] + K$

j) $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}\,dx = \arctan[f(x)] + K$

Exemple 5 *Càlcul d'algunes integrals.*

a) $\displaystyle\int 2\,dx = 2x + K$

b) $\displaystyle\int \cos^2 x \ \sin x \, dx = -\int \cos^2 x \ (-\sin x) \, dx = -\frac{\cos^3 x}{3} + K$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{x \ln x} \, dx = \int \frac{1/x}{\ln x} \, dx = \ln|\ln x| + K$

d) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x} \, dx = \int \ln x \ \frac{1}{x} \, dx = \frac{(\ln x)^2}{2} + K$

e) $\displaystyle\int \tan x \, dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} \, dx = -\ln|\cos x| + K$

f) $\displaystyle\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} \, dx = \int e^{\tan x} \ \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = e^{\tan x} + K$

g) $\displaystyle\int e^{2x} \, dx = \frac{1}{2} \int e^{2x} \ 2 \, dx = \frac{1}{2} e^{2x} + K$

h) $\displaystyle\int 2^{x^3} \ x^2 \, dx = \frac{1}{3} \int 2^{x^3} \ 3x^2 \, dx = \frac{2^{x^3}}{3 \ln 2} + K$

i) $\displaystyle\int \cos(mx) \, dx = \frac{1}{m} \int \cos(mx) \ m \, dx = \frac{\sin(mx)}{m} + K$

j) $\displaystyle\int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \, dx = 2 \int \sin(\sqrt{x}) \ \frac{1}{2\sqrt{x}} \, dx = -2\cos(\sqrt{x}) + K$

k) $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2) \ \cos^2(\arctan x)} \, dx = \int \frac{1}{\cos^2(\arctan x)} \ \frac{1}{1+x^2} \, dx = \tan(\arctan x) + K =$
$= x + K$

l) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}} \, dx = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2}{\sqrt{1-(x^3)^2}} \, dx = \frac{1}{3} \arcsin(x^3) + K$

m) $\displaystyle\int \frac{1}{4+x^2} \, dx = \int \frac{1/4}{1+x^2/4} \, dx = \frac{1}{4} \ 2 \int \frac{1/2}{1+(x/2)^2} \, dx = \frac{1}{2} \ \arctan(x/2) + k$

□

La majoria d'integrals no es poden calcular com aplicació immediata de les fórmules anteriors. Caldrà estudiar alguns mètodes per tal de poder tractar un ventall més gran de casos.

4 Integrals de funcions racionals

Aquestes són integrals de funcions que es poden escriure

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} \, dx,$$

on $P(x)$ i $Q(x)$ són polinomis.

Una primera acció que dóna bon resultat es *convertir el seu estudi en el de la integral d'una funció racional tal que el grau del polinomi numerador sigui més petit que el grau del polinomi denominador.* Això s'aconsegueix dividint, quan calgui, el dos polinomis.

$$\left.\begin{array}{l|l} P(x) & Q(x) \\ \cline{2-2} \quad\ddots & C(x) \\ \quad R(x) & \\ gr(R(x)) < gr(Q(x)) & \end{array}\right\} \Longrightarrow \int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int \frac{Q(x)C(x)+R(x)}{Q(x)}\,dx = \int \left(C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}\right) dx$$

on la última funció racional és del tipus esmentat.

Exemple 6 *Càlcul de* $\displaystyle\int \frac{x^3-2}{x^2+1}\,dx.$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3-2}{x^2+1}\,dx &= \int \left(x + \frac{-x-2}{x^2+1}\right) dx = \int x\,dx - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx - \int \frac{2}{x^2+1}\,dx = \\ &= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx - 2\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \\ &= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 2\arctan x + K. \end{aligned}$$

□

A partir d'aquest punt podem treballar amb el supòsit de que

$$\boxed{gr(Q(x)) > gr(P(x))},$$

L'estudi es pot classificar en diferents casos que requereixen tractament divers.

4.1 El polinomi denominador té totes les seves arrels reals i diferents

En aquest cas s'haurà de descompondre la funció racional en suma de tantes funcions racionals com indica el grau del denominador; això s'aconsegueix posant com a polinomis denominador cadascun dels factors de $Q(x)$, i deixant els numeradors com a coeficients numèrics indeterminats.

Exemple 7 *Càlcul de* $\displaystyle\int \frac{x+3}{2x^2-10x+12}\,dx.$

$$\int \frac{x+3}{2x^2-10x+12}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{x+3}{(x-2)(x-3)}\,dx = \frac{1}{2}\left[\int \frac{A_1}{x-2}\,dx + \int \frac{A_2}{x-3}\,dx\right] = (*).$$

Cal trobar els valors d'A_1 i A_2, per la qual cosa imposem

$$\frac{x+3}{(x-2)(x-3)} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{x-3} = \frac{A_1(x-3)+A_2(x-2)}{(x-2)(x-3)} \Longrightarrow x+3 = A_1(x-3)+A_2(x-2).$$

De la última igualtat podem trobar A_1 i A_2 de dues maneres:
— imposant que els coeficients dels dos polinomis siguin iguals,
— donant valors "còmodes" a la x.

Efectivament,

$$\text{a)}\quad x+3=(A_1+A_2)x-3A_1-2A_2 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 1 &=& A_1+A_2 \\ 3 &=& -3A_1-2A_2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -5 &=& A_1 \\ 6 &=& A_2. \end{array}\right.$$

$$\text{b)}\quad \left\{\begin{array}{lcll} x=3 & \Longrightarrow & 6=A_1\cdot 0+A_2\cdot 1 & \Longrightarrow\ A_2=6 \\ x=2 & \Longrightarrow & 5=A_1\cdot(-1)+A_2\cdot 0 & \Longrightarrow\ A_1=-5. \end{array}\right.$$

Finalment

$$(*)=\frac{1}{2}\left[\int \frac{-5}{x-2}\,dx+\int \frac{6}{x-3}\,dx\right]=-\frac{5}{2}\ln|x-2|+3\ln|x-3|+K.$$

□

En general si $Q(x)=a(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$, on les a_i són totes diferents, podem afirmar que existeixen $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n\in\mathbb{R}$ tals que

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx=\frac{1}{a}\left[\int \frac{A_1}{x-a_1}\,dx+\int \frac{A_2}{x-a_2}\,dx+\cdots+\int \frac{A_n}{x-a_n}\,dx\right],$$

on les integrals són immediates, —són logaritmes—, essent la única dificultat per al seu càlcul la recerca dels coeficients A_i per algun dels dos mètodes explicats.

4.2 El polinomi denominador té arrels reals, algunes repetides

Aquí també s'haurà de descompondre la funció racional en suma de tantes funcions racionals com indica el grau del denominador; això s'aconsegueix posant com a polinomis denominador els factors repetits de $Q(x)$, elevats primerament a la potència 1, després a la 2, i així successivament fins arribar al nombre de vegades que estan repetits, deixant els numeradors com a coeficients numèrics indeterminats.

Exemple 8 *Càlcul de* $\displaystyle\int \frac{x-1}{(x+1)^3\,x}\,dx.$

Escrivim $\displaystyle\frac{x-1}{(x+1)^3\,x}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{(x+1)^3}+\frac{D}{x}$, d'on

$$x-1=A(x+1)^2\,x+B(x+1)\,x+Cx+D(x+1)^3.$$

Donant valors adequats a la x:

$$\left.\begin{array}{lcc} x=-1 & \Longrightarrow & -C=-2 \ \Longrightarrow\ C=2 \\ x=0 & \Longrightarrow & D=-1 \\ x=1 & \Longrightarrow & 4A+2B+C+8D=0 \\ x=-2 & \Longrightarrow & -2A+2B-2C-D=-3 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{c} C=2 \\ D=-1 \\ 4A+2B=6 \\ -2A+2B=0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{c} A=1 \\ B=1 \\ C=2 \\ D=-1. \end{array}$$

D'això resulta

$$\begin{aligned} \int \frac{x-1}{(x+1)^3\,x}\,dx &= \int \frac{1}{x+1}\,dx+\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx+\int \frac{2}{(x+1)^3}\,dx-\int \frac{1}{x}\,dx = \\ &= \ln|x+1|-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}-\ln|x|+K = \\ &= \ln\left|\frac{x+1}{x}\right|-\frac{x+2}{(x+1)^2}+K. \end{aligned}$$

□

4.3 El polinomi denominador és de segon grau i no admet descomposició factorial en els números reals

Les classificarem en quatre tipus:

a) $\boxed{\displaystyle\int \frac{k}{ax^2+b}\,dx}$ $\longrightarrow$ Es transforma en una quasi-immediata del tipus (j).

b) $\boxed{\displaystyle\int \frac{px+q}{ax^2+b}\,dx}$ $\longrightarrow$ Es transforma en una quasi-immediata del tipus (c)+(j).

c) $\boxed{\displaystyle\int \frac{k}{ax^2+bx+c}\,dx}$ $\longrightarrow$ Es transforma en una quasi-immediata del tipus (j).

d) $\boxed{\displaystyle\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}\,dx}$ $\longrightarrow$ Es transforma en una quasi-immediata del tipus (c)+(j).

Exemple 9 *Càlcul de diverses integrals d'aquest tipus.*

a) $$\int \frac{3}{5x^2+4}\,dx = 3\int \frac{1/4}{(\sqrt{5}x/2)^2+1}\,dx == \frac{3\cdot 2}{4\cdot\sqrt{5}}\int \frac{\sqrt{5}/2}{(\sqrt{5}x/2)^2+1}\,dx =$$
$$= \frac{3\sqrt{5}}{10}\arctan\left(\frac{\sqrt{5}}{2}x\right) + K.$$

b) $$\int \frac{3x+2}{5x^2+4}\,dx = \frac{3}{10}\int \frac{10x+20/3}{5x^2+4}\,dx = \frac{3}{10}\left[\ln(5x^2+4) + \frac{20}{3}\int \frac{1}{5x^2+4}\,dx\right] =$$
$$= \frac{3}{10}\ln(5x^2+4) + \frac{\sqrt{5}}{5}\arctan\left(\frac{\sqrt{5}}{2}x\right) + K.$$

c) $$\int \frac{3}{2x^2+4x+3}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{dx}{(x+1)^2+1/2} = \frac{3}{2}\int \frac{2\,dx}{2(x+1)^2+1} =$$
$$= \frac{3}{\sqrt{2}}\int \frac{\sqrt{2}\,dx}{[\sqrt{2}(x+1)]^2+1} = \frac{3\sqrt{2}}{2}\arctan[\sqrt{2}(x+1)] + K.$$

d) $$\int \frac{x+3}{2x^2+4x+3}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x+12-8+8}{2x^2+4x+3}\,dx =$$
$$\frac{1}{4}\left[\ln(2x^2+4x+3) + \int \frac{8}{2x^2+4x+3}\,dx\right] =$$
$$= \frac{1}{4}\ln(2x^2+4x+3) + \sqrt{2}\arctan[\sqrt{2}(x+1)] + K.$$

$\square$

4.4 El polinomi denominador té arrels complexes simples i alguna arrel real

S'haurà de descompondre la funció racional seguint, per a les arrels racionals, les mateixes indicacions que abans, i afegint una funció racional per a cada parella d'arrels complexes conjugades. Aquesta tindrà per denominador el polinomi irreductible que genera les arrels complexes, i per numerador un polinomi de primer grau $Mx + N$, amb coeficients indeterminats.

Exemple 10 *Càlcul de la integral* $\displaystyle\int \frac{x^3+4x+4}{x^4+4x^2}\,dx = \int \frac{x^3+4x+4}{x^2(x^2+4)}\,dx.$

$$\frac{x^3+4x+4}{x^2(x^2+4)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+4} = \frac{Ax(x^2+4)+B(x^2+4)+(Cx+D)x^2}{x^2(x^2+4)} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{r} A+C=1\\ B+D=0\\ 4A=4\\ 4B=4 \end{array}\right. \Longrightarrow A=1,\ B=1,\ C=0,\ D=-1.$$

I, per tant, $\displaystyle\int \frac{x^3+4x+4}{x^4+4x^2}\,dx = \int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+4}\right)dx = \ln|x| - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} + K.$ □

5 Canvi de variable

En el càlcul de moltes primitives no n'hi ha prou amb les tècniques utilitzades i se n'han d'introduir de noves. Pensem en el càlcul de l'àrea d'un cercle de radi 1. El cercle d'equació $x^2+y^2=1$ determina dues funcions simètriques respecte de l'eix OX,

$$f_1(x) = +\sqrt{1-x^2}$$
$$f_2(x) = -\sqrt{1-x^2},$$

i el càlcul de la seva àrea estarà relacionat amb la integral

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Es tracta d'expressar la variable x en funció $g(t)$ d'una altra variable t que converteixi la funció a integrar en una altra que es pugui integrar per mètodes coneguts. En aquest cas podria ser interessant fer $x = g(t) = \sin t$, perquè així $\sqrt{1-x^2} = \cos t$ i sembla que desapareixen les dificultats. Tanmateix cal esbrinar de quina manera es pot efectuar el canvi.

En general, considerem $\displaystyle\int f(x)\,dx$. Suposem que $P(x)$ és primitiva de $f(x)$, la qual cosa significa que $P'(x) = f(x)$, i considerem $x = g(t)$ canvi de variable. Ens preguntem si $P(g(t)) = (P\circ g)(t)$ és primitiva de $f(g(t))$. Si ho esbrinem,

$$(P\circ g)'(t) = P'(g(t))\cdot g'(t) = (f\circ g)(t)\cdot g'(t)\,,$$

arribem a la conclusió que $(P \circ g)(t)$ no és primitiva de $(f \circ g)(t)$ sinó de $(f \circ g)(t) \cdot g'(t)$. És a dir que tenim

$$\begin{aligned} \int f(x)\,dx &= P(x) \\ \int f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt &= P(g(t)). \end{aligned}$$

En ser $x = g(t)$, si abusem del llenguatge podríem escriure

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt\,,$$

encara que això, en rigor, només és cert si acceptem que la igualtat porta implícit el fet que cal desfer el canvi $x = g(t)$. És a dir després de calcular la integral de la part dreta cal fer $t = g^{-1}(x)$. Llavors, en el cas del cercle, quan considerem el canvi $x = g(t) = \sin t$, tenim $g'(t) = \cos t$ i, per tant,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int \cos^2 t\,dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right) + K = \\ &= \frac{1}{2}\,(t + \sin t\,\cos t) + K = \frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}) + K. \end{aligned} \tag{6}$$

Exemple 11 *Càlcul de* $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}\,dx$*.*

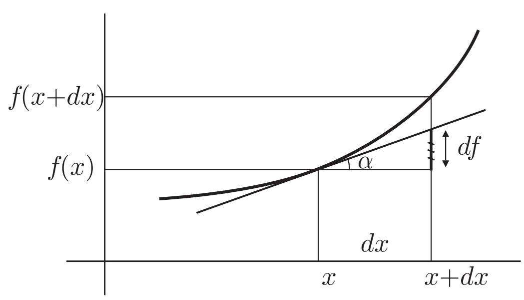
Utilitzem el canvi $x = \ln t$, d'on $x'(t) = \frac{1}{t}$. Observem que es compleixen les hipòtesis del teorema, per tant,

$$\begin{aligned} \int \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}\,dx &= \int \frac{t}{t+\frac{1}{t}} \cdot \frac{1}{t}\,dt = \int_1^e \frac{t}{t^2+1}\,dt = \\ &= \frac{1}{2}\ln(t^2+1) = \ln\sqrt{e^{2x}+1} + K. \end{aligned}$$

□

6 Diferencial d'una funció

A la secció 2 vam parlar de la diferencial dx. Si considerem un entorn "molt petit" de x, la recta tangent en el punt $(x, f(x))$ aproxima molt bé el gràfic de la funció, i $f'(x)\,dx = \tan\alpha\;dx$ aproxima el valor de l'increment $f(x+dx) - f(x)$ de la funció quan la variable x és sotmesa a un increment dx "molt petit".



Definició 1 *L'expressió $df = f'(x)\,dx$ rep el nom de diferencial de la funció f.*

Amb l'ús del llenguatge de diferencials la fórmula del canvi de variable surt de manera natural. Efectivament, si tenim $\int f(x)\,dx$ i fem el canvi $x = g(t)$, llavors, en ser $dx = g'(t)\,dt$, resulta

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))\,g'(t)\,dt.$$

Exemple 12 *Càlcul de $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}\,dx$ utilitzant diferencials.*

$$e^x = t \Longrightarrow e^x\,dx = dt \Longrightarrow dx = \frac{dt}{t} \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{e^x}{e^x+e^{-x}}\,dx = \int \frac{t}{t+1/t}\,\frac{dt}{t} = \int \frac{t}{t^2+1}\,dt \;=$$
$$= \frac{1}{2}\ln(t^2+1) = \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1) + K. \qquad \square$$

7 Integració per parts

Finalment donarem la fórmula d'integració per parts, la qual es dedueix de la regla de derivació del producte de funcions.

Teorema 2 *Siguin f i g funcions tals que existeixen $\int f(x)\,g'(x)\,dx$ i $\int g(x)\,f'(x)\,dx$, llavors*

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int g(x)\,f'(x)\,dx. \tag{7}$$

Prova. $(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g' \Longrightarrow \displaystyle\int (f\cdot g)'\,dx = \int (f'\cdot g)\,dx + \int (f\cdot g')\,dx \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow f(x)\,g(x) = \int f'(x)\,g(x)\,dx + \int f(x)\,g'(x)\,dx,$$

i això ens dóna la igualtat (7). $\square$

Exemple 13 *Càlcul de $\displaystyle\int x\,\ln x\,dx$, $\displaystyle\int \arcsin x\,dx$ i $\displaystyle\int \sin(\ln x)\,dx$.*

- Considerem $\left\{\begin{array}{ll} f(x) = \ln x & \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x} \\ g'(x) = x & \Longrightarrow g(x) = \dfrac{x^2}{2} \end{array}\right.$, es complirà que

$$\int x\,\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\,\ln x - \int \frac{1}{x}\,\frac{x^2}{2}\,dx = \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) + K.$$

- Considerem $\left\{\begin{array}{ll} f(x) = \arcsin x & \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ g'(x) = 1 & \Longrightarrow g(x) = x \end{array}\right.$, es complirà que

$$\begin{aligned} \int \arcsin x\,dx &= x\cdot\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \\ &= x\cdot\arcsin x + \frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)\,dx = x\cdot\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + K. \end{aligned}$$

- Considerem $\begin{cases} f(x) = \sin(\ln x) \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{\cos(\ln x)}{x} \\ g'(x) = 1 \qquad\quad\;\; \Longrightarrow g(x) = x \end{cases}$, es complirà que

$$\int \sin(\ln x)\, dx = x \cdot \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\, dx = (*).$$

I si fem $\begin{cases} f(x) = \cos(\ln x) \Longrightarrow f'(x) = -\dfrac{\sin(\ln x)}{x} \\ g'(x) = 1 \qquad\quad\;\; \Longrightarrow g(x) = x \end{cases}$, es complirà que

$$(*) = x \cdot \sin(\ln x) - \left(x \cdot \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)\, dx \right),$$

d'on obtenim

$$\int \sin(\ln x)\, dx = \frac{x}{2} \left(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\right) + K.$$

□

8 La integral definida en un interval tancat

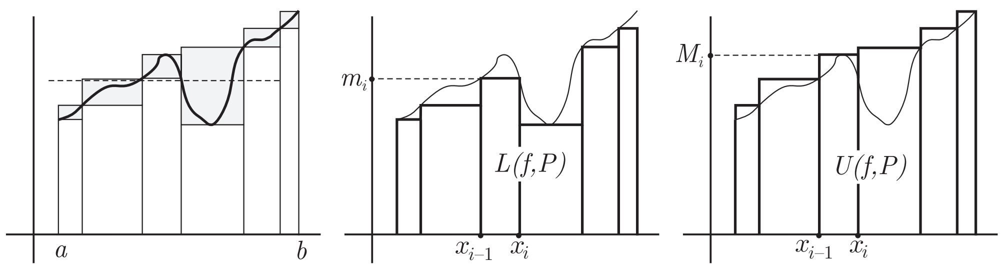
Donada una funció f contínua en $[a, b]$, tornem al problema del càlcul de l'àrea $A_a(x)$ del recinte $\mathcal{R}_x$ contingut entre el gràfic de f i l'eix OX en els dominis $[a, x]$, en què $x \in [a, b]$. Presentarem el concepte d'*integral* $\int_a^b f(x)\, dx$ de la funció f *definida* en l'interval $[a, b]$. Aquest és un concepte abstracte que ens proporcionarà l'eina per al càlcul de $A_a(x)$. Concretament, un cop definida la integral $\int_a^b f(x)\, dx$ disposarem de la funció:

$$\begin{array}{rccl} F: & [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & F(x) = \int_a^x f(t)\, dt. \end{array}$$

i l'àrea quedarà definida així:

$$x \in [a, b] \Longrightarrow A_a(x) = \begin{cases} -F(x) & \text{, si } f(t) < 0,\ \forall t \in [a, x] \\ F(x) & \text{, si } f(t) \geq 0,\ \forall t \in [a, x]. \end{cases} \tag{8}$$

Per definir la integral d'una funció abstreurem de l'operació d'aproximar per defecte i per excés el recinte entre el seu gràfic i l'interval $[a, b]$ de l'eix OX, mitjançant figures poligonals determinades per rectangles de costats paral·lels als eixos, amb un costat sobre aquest interval.



Definició 2 *Anomenem partició P de l'interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$, qualsevol conjunt de punts $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, on $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Anomenem subintervals de la partició cadascun dels intervals $[x_{i-1}, x_i]$. El conjunt de particions de l'interval $[a, b]$ el representem per $\mathcal{P}[a, b]$.*

Definició 3 *Siguin f contínua en $[a, b]$, $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathcal{P}[a, b]$ i*

$$m_i = \min\{f(x) \,/\, x_{i-1} \le x \le x_i\} \text{ i } M_i = \max\{f(x) \,/\, x_{i-1} \le x \le x_i\}.$$

Anomenem:

$$\text{Suma inferior de } f \text{ per a } P, \qquad \mathcal{L}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}).$$

$$\text{Suma superior de } f \text{ per a } P, \qquad \mathcal{U}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}).$$

Teorema 3

$$f \text{ contínua} \implies \sup\{\mathcal{L}(f, P) \,/\, P \in \mathcal{P}[a, b]\} = \inf\{\mathcal{U}(f, P) \,/\, P \in \mathcal{P}[a, b]\}.$$

Definició 4 *Anomenem integral definida de la funció contínua f en l'interval $[a, b]$,*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sup\{\mathcal{L}(f, P) \,/\, P \in \mathcal{P}[a, b]\} = \inf\{\mathcal{U}(f, P) \,/\, P \in \mathcal{P}[a, b]\}.$$

També diem que la funció és integrable i els valors a i b reben el nom de límits d'integració.

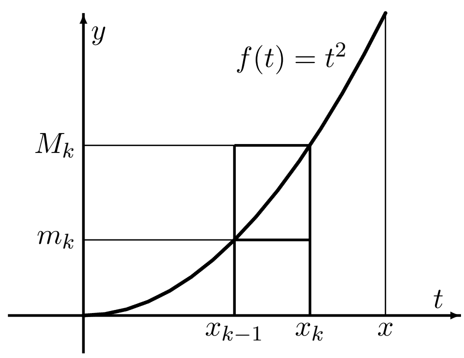
Observacions

- Existeixen funcions que sense ser contínues verifiquen la condició del teorema 3, en què s'han substituït els màxims i els mínims de la funció en els subintervals de la partició pels suprems i els ínfims. Aquestes funcions constitueixen una classe més general que les contínues i també són integrables.
- Notem que la integral no s'identifica amb l'àrea, sinó que és un instrument que la pot mesurar. Només cal observar que si agafem funcions amb tots els seus valors negatius, el valor de la integral serà igual al valor de l'àrea canviat de signe. Si la funció pot agafar valors positius i negatius llavors el valor de la integral no coincideix amb l'àrea, sinó amb la diferència entre les àrees determinades per $y \ge 0$, i les determinades per $y \le 0$.

Exemple 14 *Demostració de la integrabilitat de la funció $f(t) = t^2$ en l'interval $[0, x]$ i càlcul de $\displaystyle\int_0^x t^2\, dt$.*

Considerem $P_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathcal{P}[0, x]$, on $x_0 = 0$, $x_n = x$ i $x_k - x_{k-1} = \frac{x}{n}$, $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$. És a dir, una partició de $[0, x]$ en n subintervals d'igual longitud. Llavors,

$$\begin{cases} m_k = f(x_{k-1}) = x_{k-1}^2 \\ M_k = f(x_k) = x_k^2 \end{cases} \text{ i } \begin{cases} x_{k-1} = (k-1)\frac{x}{n} \\ x_k = k\frac{x}{n}. \end{cases}$$



Per tant, $\forall n \in \mathbf{N}$ es compleix

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f,P_n) &= \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k-x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} x_{k-1}^2\frac{x}{n} = \sum_{k=1}^{n}(k-1)^2\frac{x^3}{n^3} = \frac{x^3}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2 \underset{(*)}{=} \\
&= \frac{x^3}{n^3}\left(\frac{1}{3}(n-1)^3+\frac{1}{2}(n-1)^2+\frac{1}{6}(n-1)\right) = \frac{x^3}{n^3}\left(\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n\right). \qquad (9) \\
\mathcal{U}(f,P_n) &= \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k-x_{k-1}) = \cdots = \frac{x^3}{n^3}\left(\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n\right). \qquad (10)
\end{aligned}$$

$(*)$ Hem utilitzat el resultat $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} p^2 = \frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n.$

Tornant al problema, tenim que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{L}(f,P_n) \le \sup\{\mathcal{L}(f,P)\,/\,P\in\mathcal{P}[a,b]\} = \int_0^x t^2\,dt = \inf\{\mathcal{U}(f,P)\,/\,P\in\mathcal{P}[a,b]\} \le \mathcal{U}(f,P_n).$$

Substituint les expressions de les igualtats (9) i (10) i passant al límit quan $n\to\infty$,

$$\frac{x^3}{3} \le \int_0^x t^2\,dt \le \frac{x^3}{3}\,.$$

És a dir que

$$\int_0^x t^2\,dt = \frac{x^3}{3}\,.$$

$\square$

9 Recull de propietats i teoremes sobre la integral

Donem un recull de teoremes, sense demostració, sobre la integral d'una funció, els quals són bastant intuïtius si tenim en compte les relacions entre aquesta integral i la mesura d'àrees.

Teorema 4 (Additivitat de l'interval) *Si f és integrable en $[a,b]$ i $c\in]a,b[$, llavors f és integrable en $[a,c]$ i $[c,b]$ i es compleix*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Si per $a<b$ definim $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ i *$\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$, aquest teorema es compleix, encara que $c\notin]a,b[$ i sempre que f sigui integrable en tots els intervals implicats.*

Teorema 5 (Linealitat i monotonia) *Si f i g són funcions integrables en $[a,b]$ i $K\in\mathbb{R}$, llavors*

- *$f+g$ és integrable i $\displaystyle\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$*
- *$K\cdot f$ és integrable i $\displaystyle\int_a^b K\cdot f(x)\,dx = K\cdot\int_a^b f(x)\,dx.$*
- *$\displaystyle f\ge 0 \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge 0.$*
- *$\displaystyle f\ge g \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx.$*

Teorema 6 *Si f és integrable en $[a,b]$ també ho és $|f|$ i*

$$\int_a^b |f(x)|\,dx \geq \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|.$$

Teorema 7 *Si f és contínua en $[\,a,b\,]$ i tenim una successió de particions $P_n = \{x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \ldots, x_{p_n}^{(n)}\}$ de $[\,a,b\,]$, tal que la màxima longitud dels subintervals de cada partició tendeix a zero, llavors*

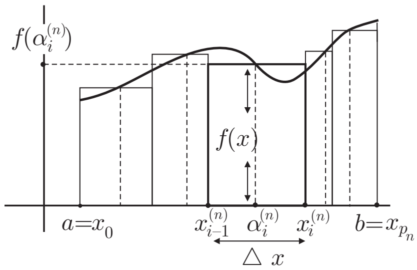
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{p_n} f(\alpha_i^{(n)})(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}), \text{ en què } \alpha_i \in [\,x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}\,].$$

Observacions:

- Notem que aquesta expressió de la integral és una presentació més rigorosa de l'expressió

$$\lim_{\Delta x\to 0} \sum f(x)\,\Delta x,$$

donada per a l'àrea, a la igualtat (3) de la pàgina 4.

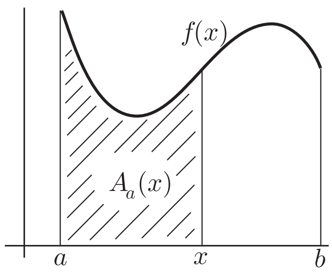


- En la secció 13.1 utilitzarem aquest teorema per al càlcul del volum d'un cilindre. Això il·lustrarà el fet que el concepte d'integral és més abstracte que el d'àrea.

10 Relacions entre càlcul integral i diferencial

Recordem la nostra conjectura original sobre l'àrea $A_a(x)$ del recinte determinat per una funció $f(x)$ contínua i positiva en l'interval $[a,b]$:

$$\begin{array}{rccl} A_a: & [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & A_a(x) \end{array} \Longrightarrow A_a'(x) = f(x),\ \forall x \in [a,b].$$



Ara, en disposar de la funció $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, la conjectura a demostrar és, d'acord amb la igualtat (8) de la pàgina 13,

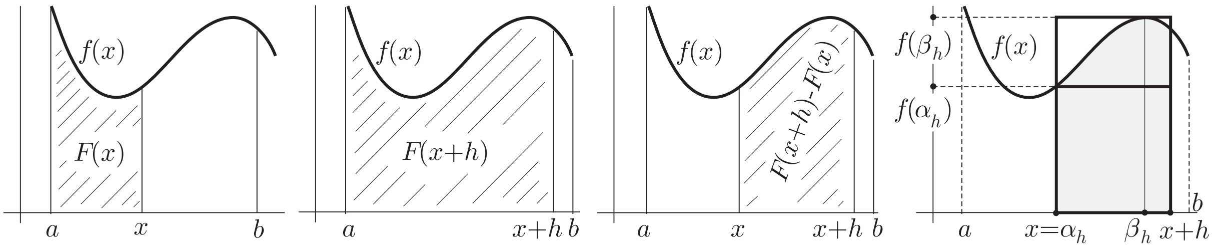
$$F'(x) = f(x),\ \forall x \in [\,a,b\,].$$

Cal doncs estudiar $\forall x \in [a,b]$ l'expressió

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}\,, \tag{11}$$

on entenem que si treballem en els punts $x = a$ o $x = b$ només s'estudien els límits laterals corresponents, per la dreta en el primer cas i per l'esquerra en el segon. L'estudi general $\forall x$ només el farem considerant $\boxed{h > 0}$; el cas $h < 0$ es faria de manera del tot igual posant atenció en els signes de les expressions que apareixen.

En definitiva, es tracta d'estudiar el quocient que apareix en la expressió (11); actuarem fent una "visualització" per a $f(x) > 0$ de $F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt$, que ens permetrà acotar els seus valors, de manera que finalment serà fàcil esbrinar el comportament del quocient esmentat quan h s'apropa a 0 per la dreta.



Observem els gràfics i notem que en cada interval $[x, x+h]$ existeixen, per la continuïtat de $f(x)$, dos valors α_h, β_h extrems absoluts de $f(x)$. D'altra banda, pel teorema 4 de la pàgina 15

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^{x+h} f(t)\,dt.$$

Llavors, per la definició d'integral o, d'una manera més intuïtiva, observant les àrees dels rectangles $f(\alpha_h) \cdot h$ i $f(\beta_h) \cdot h$,

$$f(\alpha_h) \cdot h \le F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t)\,dt \le f(\beta_h) \cdot h.$$

Dividint tot per $h > 0$ i passant al límit quan $h \longrightarrow 0^+$, resulta per la "llei de l'embut",

$$f(\alpha_h) \le \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \le f(\beta_h)$$

$$\Big\downarrow {\scriptstyle h\longrightarrow 0^+}$$

$$f(x)$$

Per al límit quan $h \to 0$ per l'esquerra actuaríem igual i obtindríem el mateix resultat, de manera que podem concloure que

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

i la nostra conjectura inicial s'ha convertit en un teorema:

Teorema 8 (Teorema fonamental del càlcul integral) f *contínua en* $[a, b]$ *i* $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \Longrightarrow F'(x) = f(x)$.

Un cop establert que $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ és una primitiva de $f(x)$, ens queda cercar entre totes les primitives possibles de f quina coincideix amb F. Primerament cal veure quina relació hi ha entre totes les primitives. D'això ja havíem proposat una conjectura que ara establirem com un teorema.

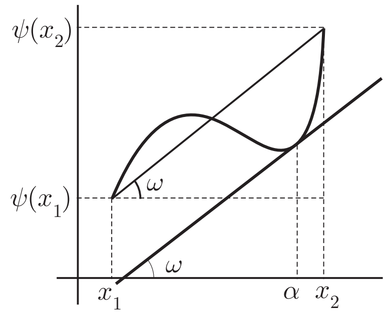
Teorema 9 *$P(x)$ i $Q(x)$ primitives de $f(x)$ en $[a,b]$ $\Longrightarrow$ $P(x) = Q(x) + K$, on $K \in \mathbb{R}$ és constant.*

Prova. Efectivament, si $P(x)$ i $Q(x)$ són primitives de $f(x)$ tenim

$$P'(x) = f(x) = Q'(x) \Longrightarrow (P-Q)'(x) = P'(x) - Q'(x) = 0 \underset{(*)}{\Longrightarrow} (P-Q)(x) = K \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow P(x) = Q(x) + K.$$

(*) $\left[\begin{array}{l}\text{Cal justificar que:}\\ \psi'(x) = 0 \Longrightarrow \psi(x) = K.\end{array}\right]$

Si no fos així existirien x_1, x_2 tals que $\psi(x_1) \neq \psi(x_2)$. També existiria un punt $\alpha \in]x_1, x_2[$ tal que la recta tangent al gràfic de $\psi(x)$ seria paral·lela al segment que uneix els punts $(x_1, \psi(x_1))$, $(x_2, \psi(x_2))$ de la corba, la qual cosa implicaria que



$$0 = \psi'(\alpha) = \tan(\omega) = \frac{\psi(x_2) - \psi(x_1)}{x_2 - x_1} \neq 0.$$

Però això és una contradicció i, per tant, la suposició de sortida és falsa. Llavors podem afirmar que $\forall x_1, x_2$ és $\psi(x_1) = \psi(x_2)$, d'on $\psi(x) = K$, $\forall x$.

$\square$

Ara ja podem establir quina de totes les primitives possibles és $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. En ser $F(x)$ primitiva de $f(x)$, si triem una primitiva $P(x)$ qualsevol, tindrem

$$F(x) = P(x) + K, \ \forall x \in [a,b].$$

En el teorema 4 de la pàgina 15 hem definit $F(a) = \int_a^a f(x)\,dx = 0$, la qual cosa lliga amb el fet que l'àrea d'un segment és nul·la. Llavors, podem determinar el valor de K,

$$0 = F(a) = P(a) + K \Longrightarrow K = -P(a).$$

Així queda determinada la funció F tal com diu el teorema següent:

Teorema 10 (Regla de Barrow) *Donada $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua i $P(x)$ primitiva de $f(x)$, es compleix que $\int_a^x f(t)\,dt = P(x) - P(a)$, $\forall x \in [a,b]$.*

En llenguatge d'àrees tenim:
– Si $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [\,a,b\,]$ i $P(x)$ primitiva de $f(x)$, llavors

$$A_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt = P(x) - P(a).$$

– Si $f(x) \leq 0$, $\forall x \in [\,a,b\,]$ i $P(x)$ primitiva de $f(x)$, llavors

$$A_a(x) = -\int_a^x f(t)\,dt = -(P(x) - P(a)).$$

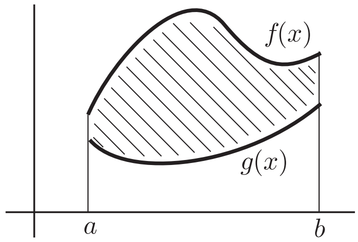
També s'utilitza la notació $P(x) - P(a) = [P(t)]_a^x$.

11 Àrea compresa entre els gràfics de dues funcions contínues

Observant els gràfics adjunts, en què es vol calcular les àrees entre els gràfics de dues funcions, es pot afirmar que:

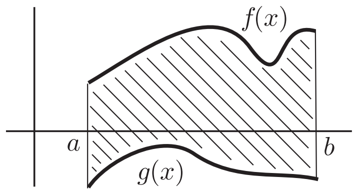
a) Si $f(x) \geq g(x) \geq 0,\ \forall x \in [a,b]$,

$$\grave{A}rea = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx.$$



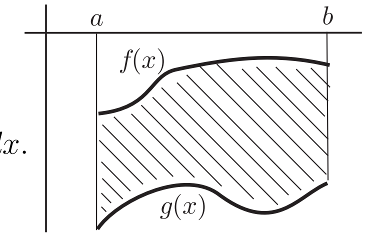
b) Si $f(x) \geq g(x)$ i $f(x) \geq 0$ i $g(x) \leq 0,\ \forall x \in [a,b]$,

$$\grave{A}rea = \int_a^b f(x)\,dx + \left(-\int_a^b g(x)\,dx\right) = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx.$$

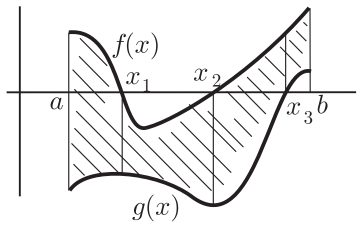


c) Si $0 \geq f(x) \geq g(x),\ \forall x \in [a,b]$,

$$\grave{A}rea = -\int_a^b g(x)\,dx - \left(-\int_a^b f(x)\,dx\right) = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx.$$



d) Si $f(x) \geq g(x),\ \forall x \in [a,b]$, i $f(x)$ o $g(x)$ canvien el signe, es treballa en subintervals $[a,x_1],\ [x_1,x_2], \ldots, [x_{n-1},b]$, on es compleixi alguna de les condicions anteriors de signe constant, i aplicant la tercera propietat de les integrals definides resulta



$$\grave{A}rea = \int_a^{x_1} (f(x) - g(x))\,dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^b (f(x) - g(x))\,dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$

Com a conclusió resulta el següent teorema:

Teorema 11 *Si $f(x)$ i $g(x)$ són contínues en $[a,b]$ i $f(x) \geq g(x)\ \forall x \in [a,b]$, llavors*

$$\grave{A}rea\ entre\ f(x)\ i\ g(x) = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx,$$

i si $f(x) \lesseqgtr g(x)$, llavors

$$\grave{A}rea\ entre\ f(x)\ i\ g(x) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx.$$

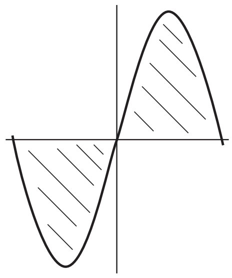
Exemple 15 *Càlcul de l'àrea del recinte limitat per*

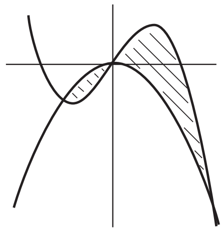
a) $f(x) = \sin x, \quad y = 0, \quad x = -\pi, \quad x = \pi.$

b) $y = -x^2, \quad y = 2x - x^3.$

a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|\, dx = \int_{-\pi}^{0} -\sin x\, dx + \int_{0}^{\pi} \sin x\, dx = 2 + 2 = 4.$

b) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \left[-x^2 - (2x - x^3)\right] dx + \int_{0}^{2} \left[2x - x^3 - (-x^2)\right] dx = \frac{37}{12}.$





□

12 Canvi de variable per a integrals definides

Recordem el problema de l'àrea del cercle de radi 1. Havíem fet el canvi de variable $x = \sin t$, del que vam obtenir la igualtat (6) de la secció 5. Llavors,

$$4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = 4\left[\frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2})\right]_0^1 = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Obtindríem el mateix resultat si féssim,

$$4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = 4\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = 4\left[\frac{1}{2}\left(t + \sin t \cos t\right)\right]_0^{\pi/2} = 4\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \pi.$$

Això es pot fer en general i tenim el teorema del canvi de variable per a integrals definides:

Teorema 12 (Canvi de variable) *Siguin g definida a $[c, d]$ derivable i amb derivada contínua, de manera que $g(c) = a$ i $g(d) = b$, i f contínua en $g([c, d])$, llavors*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_c^d f(g(t)) \cdot g'(t)\, dt.$$

Exemple 16 *Càlcul de* $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}\, dx.$

Utilitzem el canvi $x = \ln t$, d'on $x'(t) = \frac{1}{t}$. Observem que es compleixen les hipòtesis del teorema, per tant,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}\, dx &= \int_1^e \frac{t}{t + \frac{1}{t}} \cdot \frac{1}{t}\, dt = \int_1^e \frac{t}{t^2 + 1}\, dt = \\ &= \frac{1}{2}\left[\ln(t^2 + 1)\right]_1^e = \ln\sqrt{\frac{e^2 + 1}{2}}.\end{aligned}$$

□

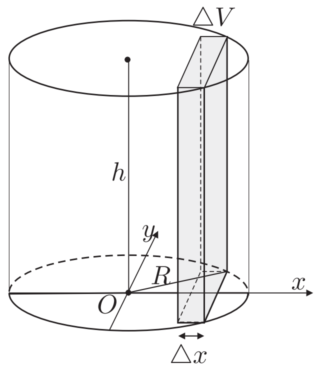
13 Aplicació de la integral al càlcul de volums

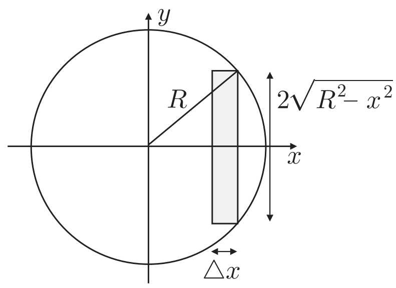
13.1 Volum d'un cilindre recte de base circular

Partim de la hipòtesi que el volum d'un ortoedre d'arestes a, b i c, és igual a $a \cdot b \cdot c$. Per calcular el volum del cilindre considerem seccions planes perpendiculars a un diàmetre OX de la base. El cilindre queda partit en elements de volum ΔV, els quals es poden aproximar per ortoedres d'arestes:

– Δx: separació entre dos seccions planes consecutives.
– h: altura del cilindre.
– $2\sqrt{R^2 - x^2}$: segment determinat per la secció del pla sobre la base circular de radi R.

Llavors, en ser l'equació de la circumferència en una referència determinada per dos diàmetres perpendiculars, $x^2 + y^2 = R^2$, tenim





$$
\begin{aligned}
\text{Volum} &= \lim_{\Delta x \to 0} \sum \Delta V = \lim_{\Delta x \to 0} \sum h \cdot 2\sqrt{R^2 - x^2} \cdot \Delta x \overset{(*)}{=} \int_{-R}^{R} 2h\sqrt{R^2 - x^2}\, dx = \\
&= 4h \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\, dx \overset{(**)}{=} 4hR^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = 4hR^2 \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos(2t)}{2}\, dt = \\
&= 4hR^2 \left[\frac{1}{2}\, t + \frac{\sin(2t)}{4} \right]_0^{\pi/2} = 4hR^2 \left[\left(\frac{\pi}{4} + 0 \right) - (0 + 0) \right] = \boxed{\pi R^2 h}.
\end{aligned}
$$

($*$) Apliquem el teorema 7 de la pàgina 16, a la funció $f(x) = h \cdot 2\sqrt{R^2 - x^2}$.
($**$) Utilitzem el canvi de variable $x(t) = R \sin t$.

13.2 Volums de revolució

Utilitzant tècniques semblants a les anteriors es pot veure que:

- El volum generat pel recinte limitat pel gràfic d'una funció contínua $f(x)$ i l'eix OX, amb $x \in [\,a, b\,]$, en girar al voltant de l'eix OX és

$$\boxed{\pi \int_a^b f(x)^2\, dx}.$$

- Sigui $f(x)$ contínua i positiva en $x \in [\,a, b\,]$. El volum generat pel recinte limitat entre el gràfic de f, i les rectes $x = a$, $x = b$ i $y = 0$, en girar al voltant de l'eix OY és

$$\boxed{2\pi \int_a^b x \cdot f(x)\, dx}.$$

Índex