Geometria mètrica plana

Ramon Nolla
Departament de Matemàtiques
IES Pons d'Icart

En aquests apunts s'inicia el tractament de les distàncies i els angles en la geometria plana analítica. De sortida, s'introduirà l'eina bàsica per a aquest tractament, el *producte escalar de vectors*, a partir de l'estudi del problema de presentar l'angle de dos vectors en funció dels seus mòduls i de les seves expressions en una base ortonormal.
Considerar una *base ortonormal*, no vol dir res més que escollir dos vectors de direccions perpendiculars que tenen el mateix mòdul, al qual s'assigna el valor 1. Amb aquesta assignació inicial veurem que es pot expressar el mòdul i l'angle de dos vectors en funció del seu producte escalar. Això permetrà definir distàncies entre punts i rectes del pla afí, i angles entre rectes. D'aquesta manera el pla afí quedarà convertit en un pla mètric en el qual es podran tractar problemes de mesura.

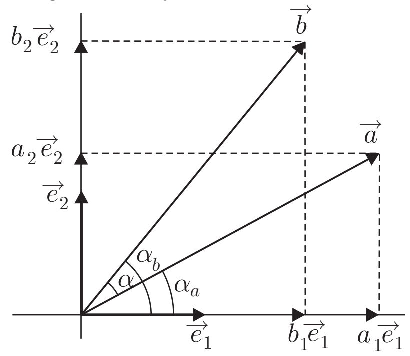
1 Producte escalar

Sigui la base ortonormal $\left\{\begin{array}{l}\vec{e}_1,\ \vec{e}_2\\ |\vec{e}_1,| = |\vec{e}_2| = 1\\ \text{angle}\,(\vec{e}_1,\vec{e}_2) = 90^\circ.\end{array}\right.$

Considerem dos vectors qualssevol $\left\{\begin{array}{l}\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 = (a_1,a_2)\\ \vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 = (b_1,b_2).\end{array}\right.$

Cercarem l'angle α que determinen $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Concretament, cercarem $\cos\alpha$ que és independent de l'orientació horària o antihorària de l'angle. Si observem el gràfic adjunt:

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \cos(\alpha_b-\alpha_a) =\\ &= \cos\alpha_b\cos\alpha_a + \sin\alpha_b\sin\alpha_a =\\ &= \frac{b_1}{|\vec{b}|}\cdot\frac{a_1}{|\vec{a}|} + \frac{b_2}{|\vec{b}|}\cdot\frac{a_2}{|\vec{a}|} \Longrightarrow\\ \Longrightarrow &\ \boxed{\cos\alpha = \frac{a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}}.\end{aligned} \tag{1}$$



1.1 Definició de producte escalar

Remarquem que una part de l'interès d'aquest resultat rau en allò que es desprèn quan tractem el problema de la perpendicularitat. En aquest cas $\cos\alpha = 0$ i, per tant, $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$. És a dir, amb la simple observació d'aquesta operació totalment simètrica entre les coordenades dels vectors en una base ortonormal, podem establir si dos vector són perpendiculars o no.

Llavors, es decideix donar-li rellevància a aquesta expressió i es defineix el **producte escalar de dos vectors $\vec{a} = (a_1, a_2)$ i $\vec{b} = (b_1, b_2)$ en una base ortonormal** com

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2}.$$

Si es vol una definició que no depengui de la base escollida, observem la igualtat (1) i obtenim

$$a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha.$$

Llavors, en ser la part dreta de la igualtat independent de la base, es defineix el **producte escalar de dos vectors** $\vec{a}$ i $\vec{b}$ com

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha}. \tag{2}$$

1.2 Mòdul d'un vector i angle entre vectors

• Si observem que $\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 0° = |\vec{v}|^2$, en resulta l'expressió següent del mòdul en funció del producte escalar:

$$\boxed{|\vec{v}| = +\sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}}.$$

Llavors, si treballem en una base ortonormal $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ en què $\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2$, obtenim

$$|\vec{v}| = +\sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = +\sqrt{v_1 \cdot v_1 + v_2 \cdot v_2} = +\sqrt{v_1^2 + v_2^2}.$$

Notació: Escriurem $\vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{v}^{\,2}$.

• També tenim l'expressió del cosinus de l'angle α entre dos vectors $\vec{a}, \vec{b}$ en funció del producte escalar, com es desprèn de la igualtat (2):

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

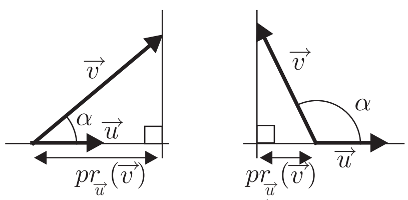
En una base ortonormal $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ en què $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$, $\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2$, obtenim l'expressió (1):

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}.$$

De tots els angles que tenen aquest cosinus, es considera que l'angle α entre els dos vectors és l'angle positiu mínim.

1.3 Observacions

• Es comprova immediatament que una interpretació del producte escalar $\vec{v} \cdot \vec{u}$, quan $\vec{u} = 1$, és igual al valor amb signe de la projecció perpendicular $pr_{\vec{u}}(\vec{v})$ de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$. El signe és positiu si l'angle α que formen és menor que 90°, i negatiu en el cas contrari.



• Anomenem *ortogonals* dos vectors que tenen producte escalar igual a zero. Això inclou dos casos:

– que els dos vectors siguin perpendiculars,

– que algun dels dos vectors sigui el vector $\vec{0}$.

- Anomenem *base ortogonal*, a una base $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ tal que $\vec{e_1} \cdot \vec{e_2} = 0$.
- Una base $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ és ortonormal si i només si $\vec{e_1} \cdot \vec{e_2} = 0$ i $\vec{e_1} \cdot \vec{e_1} = \vec{e_2} \cdot \vec{e_2} = 1$.

1.4 Propietats del producte escalar

Les propietats que caracteritzen aquest producte, quasi totes de fàcil demostració són

i) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a},\ \forall \vec{a}, \vec{b}$. (simetria)

ii) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c},\ \forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. (distributivitat)

iii) $(\alpha \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \alpha \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\alpha \cdot \vec{b}),\ \forall \alpha, \vec{a}, \vec{b}$. (associativitat)

iv) $\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0,\ \forall \vec{a}$. (definició positiva)

v) $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \Longleftrightarrow \vec{a} = 0$.

1.5 Producte escalar en una base no ortonormal

Cal observar que si dos vectors $\vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = b_1\vec{e_1} + b_2\vec{e_2} = (b_1, b_2)$, estan expressats en una base no ortonormal l'expressió en coordenades del seu producte escalar no coincideix amb $a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$.

Exemple 1 *Donada la base $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ tal que $|\vec{e_1}| = 2$, $|\vec{e_2}| = 1$ i $\cos(\vec{e_1}, \vec{e_2}) = -\frac{1}{4}$, cercarem el producte escalar $\vec{a} \cdot \vec{b}$ dels vectors $\vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = b_1\vec{e_1} + b_2\vec{e_2} = (b_1, b_2)$, i els vectors $\vec{x} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2}$ perpendiculars al vector $\vec{u} = \vec{e_1} + \vec{e_2}$.*

$$\begin{aligned}
\vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2}) \cdot (b_1\vec{e_1} + b_2\vec{e_2}) = \\
&= a_1b_1(\vec{e_1} \cdot \vec{e_1}) + (a_1b_2 + a_2b_1)(\vec{e_1} \cdot \vec{e_2}) + a_2b_2(\vec{e_2} \cdot \vec{e_2}) = \\
&= a_1b_1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 + (a_1b_2 + a_2b_1) \cdot 2 \cdot 1 \cdot (-\tfrac{1}{4}) + a_2b_2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = \\
&= 4a_1b_1 - \tfrac{1}{2}(a_1b_2 + a_2b_1) + a_2b_2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{x} \cdot \vec{u} = 0 &\Longleftrightarrow (x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2}) \cdot (\vec{e_1} + \vec{e_2}) = 0 \Longleftrightarrow 4x_1 - \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2) + x_2 = 0 \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow 7x_1 + x_2 = 0 \Longleftrightarrow \text{els vectors cercats són del tipus } (t, -7t),\ t \in \mathbb{R} - \{0\}.
\end{aligned}$$

□

Això té conseqüències quan es vol calcular el mòdul d'un vector i l'angle de dos vectors. Veiem-ho en una continuació de l'exemple anterior.

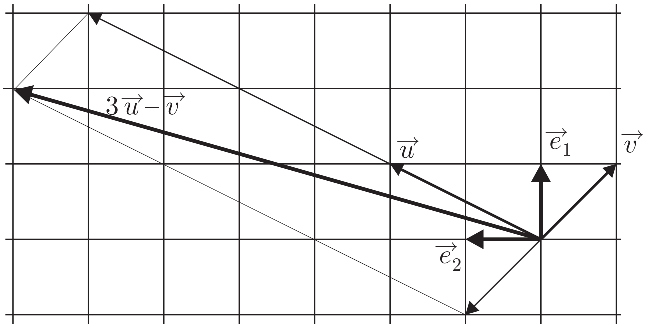
Exemple 2 *Càlcul del mòdul d'un vector $\vec{v} = v_1\vec{e_1} + v_2\vec{e_2}$, i de l'angle α de dos vectors $\vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2}$ i $\vec{b} = b_1\vec{e_1} + b_2\vec{e_2}$ en la base $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ de l'exemple 1.*

$$|\vec{v}| = +\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}} = +\sqrt{4v_1v_1 - \tfrac{1}{2}(v_1v_2+v_2v_1)+v_2v_2} = +\sqrt{4v_1^2 - v_1v_2 + v_2^2}\,.$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{4a_1b_1 - \tfrac{1}{2}(a_1b_2+a_2b_1)+a_2b_2}{\sqrt{4a_1^2-a_1a_2+a_2^2}\cdot\sqrt{4b_1^2-b_1b_2+b_2^2}}\,.$$

□

Exemple 3 *Càlcul del mòdul del vector $\vec{x} = 3\vec{u} - \vec{v}$, en què $\vec{u} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$, $\vec{v} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$ i $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ és una base ortonormal.*



Sobre el gràfic es veu que, si apliquem el teorema de Pitàgoras, el mòdul és $\sqrt{7^2+4^2} = \sqrt{53}$. Si no tinguéssim aquesta eina i haguéssim d'utilitzar l'eina del producte escalar podríem resoldre aquesta qüestió de dues maneres diferents.

- Primera resolució: En la base no ortonormal $\vec{u}, \vec{v}$.

$$\begin{aligned} |\vec{x}| &= +\sqrt{\vec{x}^{\,2}} = +\sqrt{(3\vec{u}-\vec{v})\cdot(3\vec{u}-\vec{v})} = +\sqrt{9\,\vec{u}^{\,2} - 6\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^{\,2}} = \\ &= +\sqrt{9\,|\vec{u}|^{\,2}\cos 0^\circ - 6\,|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\frac{1\cdot 1 + 2\cdot(-1)}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} + |\vec{v}|^{\,2}\cos 0^\circ} = \\ &= +\sqrt{9\cdot 5\cdot 1 - 6\cdot(-1) + 2\cdot 1} = +\sqrt{53} \end{aligned}$$

- Segona resolució: En la base ortonormal $\vec{e}_1, \vec{e}_2$.

$$\begin{aligned} |\vec{x}| &= +\sqrt{\vec{x}^{\,2}} = +\sqrt{(3\vec{u}-\vec{v})\cdot(3\vec{u}-\vec{v})} = \\ &= +\sqrt{(3(\vec{e}_1+2\vec{e}_2)-(\vec{e}_1-\vec{e}_2))\cdot(3(\vec{e}_1+2\vec{e}_2)-(\vec{e}_1-\vec{e}_2))} = +\sqrt{(2\vec{e}_1+7\vec{e}_2)^2} = \\ &= \sqrt{2^2+7^2} = +\sqrt{53} \end{aligned}$$

□

1.6 Vectors perpendiculars en una base ortonormal

Estudiarem les relacions entre les coordenades de vectors perpendiculars quan estan expressats en una base ortonormal. Sigui el vector $\vec{u} = (u_1, u_2) \neq \vec{0}$, els vectors perpendiculars a $\vec{u}$ són els vectors $(x, y) \neq \vec{0}$ tals que

$$(u_1, u_2)\cdot(x, y) = 0.$$

És a dir les seves coordenades x i y són les solucions no nul·les de l'equació $u_1x + u_2y = 0$. Suposem que una coordenada diferent de 0 del vector $\vec{u}$ és u_1. Llavors,

$$u_1x + u_2y = 0 \iff x = -\frac{u_2}{u_1}\,y \iff (x,y) = \left(-\frac{u_2}{u_1}\,t, t\right) = \frac{t}{u_1}(-u_2, u_1) = \lambda(-u_2, u_1).$$

Per tant, tots els vectors perpendiculars a (u_1, u_2) són del tipus $\lambda(-u_2, u_1)$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

1.7 Vectors unitaris en una base ortonormal

Cercarem una expressió per als vectors de mòdul 1 —*unitaris*— que tenen la mateixa direcció que un vector $\vec{v} = (a, b)$ donat en una base ortonormal.[1] En ser de la mateixa direcció es podrà representar el vector unitari com $\lambda(a, b)$, i caldrà trobar el valor de λ.

$$|\lambda(a,b)| = 1 \Longleftrightarrow +\sqrt{\lambda^2 a^2 + \lambda^2 b^2} = 1 \Longleftrightarrow |\lambda|\sqrt{a^2+b^2} = 1 \Longleftrightarrow \lambda = \frac{1}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Per tant, hi ha dos vectors unitaris en la direcció de (a, b):

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}\right) \quad \text{i} \quad \left(\frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{-b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

Exemple 4 *Càlcul dels vectors perpendiculars i unitaris al vector* $\vec{u} = (3, -4)$.

Apliquem els dos resultats anteriors. Els vectors perpendiculars i unitaris al vector $\vec{u}$ són

$$\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) \qquad \text{i} \qquad \left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right).$$

□

2 Pla euclidià

Es tracta d'introduir una mètrica en el pla afí per poder fer el tractament de problemes que impliquin qüestions de mesura de distàncies, àrees o angles. Ho podem fer utilitzant el producte escalar de vectors.

2.1 Distància entre dos punts

Calculem la *distància* $d(A, B)$ *entre dos punts* A i B de la manera següent

$$\boxed{d(A,B) = |\overrightarrow{AB}\,| = +\sqrt{\overrightarrow{AB}^{\,2}}}\,.$$

Concretament, si considerem un sistema de referència $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ ortonormal en què tenim les coordenades $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ obtenim

$$d(A,B) = |\overrightarrow{AB}\,| = +\sqrt{\overrightarrow{AB}^{\,2}} = +\sqrt{(b_1-a_1, b_2-a_2)^2} = +\sqrt{(b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2}\,.$$

Aquesta distància rep el qualificatiu d'*euclidiana* i satisfà les propietats següents:

i) $d(A, B) \geq 0, \ \forall A, B.$

ii) $d(A, B) = 0 \Longleftrightarrow A = B.$

iii) $d(A, B) = d(B, A), \ \forall A, B.$

iv) $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B), \ \forall A, B, C.$

El pla afí dotat d'aquesta distància rep el nom de *pla euclidià*.

[1] A partir d'ara, mentre no diem el contrari, treballarem amb bases ortonormals.

2.2 Rectes perpendiculars

Direm que dues rectes són perpendiculars si i només si els seus vectors directors formen un angle de 90°. Això equival a dir que el producte escalar dels seus vectors directors és zero. Presentem dos criteris per al tractament d'aquesta qüestió.
• La família de rectes perpendiculars a una recta $r:\ ax+by+c=0$ està formada per les rectes d'equació $s_k:\ -bx+ay+k=0,\ k\in\mathbb{R}$.
Efectivament, en ser $(-b,a)$ vector director de la recta r, les rectes perpendiculars s_k tindran (a,b) de vector director perquè $(-b,a)\cdot(a,b)=-ba+ab=0$. Això implica que els coeficients de les variables x, y són qualssevol valors proporcionals a $-b$, a, en particular ells mateixos.

Exemple 5 *Recta perpendicular a* $2x-5y+4=0$, *que passa pel punt* $(1,3)$.

Serà del tipus $5x+2y+k=0$. Cal imposar que el punt $(1,2)$ pertanyi a la recta. És a dir, $5\cdot 1+2\cdot 3+k=0 \Longrightarrow k=-11$. Per tant, la recta té l'equació

$$5x+2y-11=0.$$

□

• Dues rectes $r_1:\ y=m_1x+b_1$, $r_2:\ y=m_2x+b_2$, expressades en forma explícita són perpendiculars si i només si $m_1\cdot m_2=-1$.
Efectivament, en ser $(1,m_1)$ i $(1,m_2)$ vectors directors de les rectes r_1, r_2, aquestes seran perpendiculars si i només si $(1,m_1)\cdot(1,m_2)=0$. És a dir, si i només si $1+m_1m_2=0$, i això és el que volíem demostrar.

Exemple 6 *Recta perpendicular a la recta* $y=3x+2$, *que passa pel punt* $(1,-2)$.

El pendent m de la recta cercada satisfà $m\cdot 3=-1$. És a dir $m=-\frac{1}{3}$. Per tant, si utilitzem l'equació punt-pendent, la recta serà:

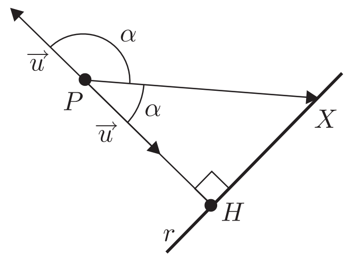
$$y+2=-\frac{1}{3}(x-1) \quad \text{que es pot presentar com} \quad x-3y-5=0$$

□

2.3 Distància d'un punt a una recta

La distància $d(P,r)$ entre un punt P i una recta r es defineix com la mínima distància entre el punt P i els punts X de la recta r. El punt H de la recta que determina la distància mínima fins a P s'obté sobre la intersecció de la recta t perpendicular a r que passa per P. Efectivament, si $\vec{u}$ és un vector unitari i perpendicular a la direcció de r, $X\in r$ i $\alpha=\text{angle}\,(\vec{u},\overrightarrow{PX})$, tenim que $d(P,H)$ és mínima entre totes les $d(P,X)$ perquè

$$\begin{aligned} d(P,X) &= |\overrightarrow{PX}| \geq \left| |\overrightarrow{PX}|\cdot\cos\alpha \right| = \left|\overrightarrow{PX}\cdot\vec{u}\right| = \\ &= \left|pr_{\vec{u}}(\overrightarrow{PX})\right| = |\overrightarrow{PH}| = d(P,H). \end{aligned}$$



Llavors,

$$\boxed{d(P,r)=d(P,H)=\left|\overrightarrow{PX}\cdot\vec{u}\right|}.$$

Així, si treballem en una referència ortonormal en què els punts tenen coordenades $X(x,y)$, $P(p_1,p_2)$, la recta r té equació $ax+by+c=0$, i el vector $\vec{u}$ és unitari i perpendicular al vector director $(-b,a)$ de r i, per tant, de coordenades $\vec{u}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$, obtenim

$$\begin{aligned} d(P,r) &= \left|(x-p_1,y-p_2)\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\right| = \\ &= \frac{|ax+by-ap_1-bp_2|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|-c-ap_1-bp_2|}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{aligned}$$

O sigui que,

$$\boxed{d(P,r)=\frac{|ap_1+bp_2+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}. \tag{3}$$

Exemple 7 *Càlcul de les equacions de les rectes que passen pel punt* $(1,8)$ *i es troben a distància 4 de l'origen de coordenades.*

Cercarem les rectes entre les que es poden presentar com $r:\ x+by+c=0$, és a dir entre les no paral·leles a l'eix d'abscisses. Si en surten dues haurem acabat. En el cas contrari haurem de buscar la segona entre les que tenen l'equació del tipus $y=k$.
En primer lloc, $(1,8)\in r \Longrightarrow 1+8b+c=0 \Longrightarrow c=-1-8b$. Per tant,

$$\begin{aligned} 4=d\big((0,0),r\big) &\Longrightarrow 4=\frac{|c|}{\sqrt{1+b^2}} \Longrightarrow 4=\frac{|1+8b|}{\sqrt{1+b^2}} \Longrightarrow 16+16b^2=1+16b+64b^2 \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow 48b^2+16b-15=0 \Longrightarrow b=\frac{-8\pm\sqrt{64+720}}{48}=\frac{-8\pm 28}{48}= \begin{cases} \frac{5}{12} \\ -\frac{3}{4}. \end{cases} \end{aligned}$$

Llavors, $c=-1-8b=-1-\frac{8\cdot 5}{12}=-\frac{52}{12}$, o bé, $c=-1-8b=-1+\frac{8\cdot 3}{4}=5$.
Per tant, les rectes cercades són

$$12x+5y-52=0, \qquad 4x-3y+20=0.$$

□

2.3.1 Procediment alternatiu per al càlcul de la distància

Si definim rectes perpendiculars com aquelles que tenen vectors directors ortogonals, podem establir la igualtat (3) amb un altre procediment. Amb la notació del gràfic de més amunt, si tenim en compte que $d(P,r)=d(P,H)$ s'actuaria així:

- Es troba la recta perpendicular a r que passa per P.
- Es troba la intersecció H d'aquesta recta perpendicular amb la recta r.
- Es calcula $d(P,H)$.

2.3.2 Aplicació al càlcul de l'àrea d'un triangle

Sigui el triangle de vèrtexs $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $C(c_1, c_2)$. Volem aplicar la igualtat (3) al càlcul de la seva àrea. Considerem la base AB i l'altura determinada per la perpendicular a la recta r suport del segment AB que passa per C. L'equació de la recta r es pot presentar en les formes

$$\begin{aligned} r:\ \frac{x-a_1}{b_1-a_1}=\frac{y-a_2}{b_2-a_2} &\iff (b_2-a_2)(x-a_1)=(b_1-a_1)(y-a_2) \iff \\ &\iff (b_2-a_2)x-(b_1-a_1)y+b_1a_2-b_2a_1=0. \end{aligned}$$

Llavors, l'àrea del triangle serà

$$\begin{aligned} \text{àrea}\,(\triangle ABC) &= \frac{1}{2}\,d(C,r)\cdot d(A,B) = \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{\Big|(b_2-a_2)c_1-(b_1-a_1)c_2+b_1a_2-b_2a_1\Big|}{\sqrt{(b_2-a_2)^2+(b_1-a_1)^2}}\cdot\sqrt{(b_2-a_2)^2+(b_1-a_1)^2} = \\ &= \frac{1}{2}\,\Big|(b_2-a_2)c_1-(b_1-a_1)c_2+b_1a_2-b_2a_1\Big| \end{aligned}$$

Això se sol presentar de maneres més fàcils de recordar. Per exemple,

$$\begin{aligned} \text{àrea}\,(\triangle ABC) &= \frac{1}{2}\,\Big|(a_1b_2-a_2b_1)-(a_1c_2-a_2c_1)+(b_1c_2-b_2c_1)\Big| = \\ &= \frac{1}{2}\left|\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}\ \right| = \frac{1}{2}\left|\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}\ \right|, \end{aligned}$$

on podem observar que operant les diagonals de manera adequada obtenim l'àrea.

Exemple 8 *Càlcul de l'àrea del triangle de vèrtexs $A(-1,3)$, $B(2,-3)$, $C(4,2)$.*

$$\text{àrea}\,(\triangle ABC) = \frac{1}{2}\left|\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix}\ \right| = \frac{1}{2}\,\Big|\ (3-6)-(-2-12)+(4+12)\ \Big| = \frac{27}{2}.$$

□

2.3.3 Aplicació al càlcul de la distància entre rectes paral·leles

La distància entre dues rectes paral·leles r, s, es defineix com la mínima de les distàncies $d(P,Q)$, en què $P \in r$ i $Q \in s$. És de fàcil demostració que aquesta distància s'obté amb el càlcul de la distància d'un punt qualsevol de r a la recta s.

Exemple 9 *Càlcul de la distància entre les rectes* $\begin{cases} r:\ x+2y+1=0 \\ s:\ x+2y+5=0. \end{cases}$

Aquestes rectes són paral·leles perquè comparteixen el vector director $(-2, 1)$. Per tant, en ser $P(-1, 0)$ un punt de la recta r, podem establir que:

$$d(r, s) = d(P, s) = \frac{|-1 + 2 \cdot 0 + 5|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|5 - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

□

Des d'aquest exemple intuïm que si, en general, les rectes són $\left\{ \begin{array}{l} r: \ ax + by + c = 0 \\ s: \ ax + by + d = 0 \end{array} \right\}$, llavors

$$\boxed{d(r, s) = \frac{|c - d|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}.$$

Això és cert en general. Per demostrar-ho quan $a \neq 0$, —el cas $a = 0$ és immediat—, només cal considerar el punt $P\left(-\frac{c}{a}, 0\right) \in r$ i calcular

$$d(r, s) = d(P, s) = \frac{\left|a \cdot \left(-\frac{c}{a}\right) + b \cdot 0 + d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|c - d|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

2.4 Angle de dues rectes

Les parelles de vectors directors que es poden considerar sobre dues rectes determinen dos angles suplementaris. Definim l'angle de dues rectes com l'angle α més petit dels dos angles que formen els seus vectors directors. Per tant, sempre serà un angle entre 0° i 90°.[2] Per establir una fórmula que proporcioni directament l'angle s'ha de tenir en compte que quan es considera una parella de vectors directors, —un de cada recta—, aquests poden formar l'angle α desitjat o el seu suplementari $180° - \alpha$. Els cosinus d'aquests dos angles són iguals en valor absolut i difereixen en el signe, —excepte quan $\alpha = 90°$ que valen zero—. L'angle α que cerquem és el que té el cosinus positiu. Per tant, si $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són vectors directors de les dues rectes. llavors l'angle α que formen les rectes satisfà

$$\cos\alpha = \left|\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}\right| \quad \text{és a dir,} \quad \boxed{\alpha = \arccos \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}}.$$

Exemple 10 *Càlcul de l'angle de les rectes $y = 3x - 1$ i $y = 2x + 2$.*

Els vectors directors són $(1, 3)$ i $(1, 2)$. Per tant,

$$\alpha = \arccos\left|\frac{(1, 3) \cdot (1, 2)}{\sqrt{1^2 + 3^2}\sqrt{1^2 + 2^2}}\right| = \arccos \frac{7}{5\sqrt{2}} = 8°7'48.37''.$$

□

Exemple 11 *Càlcul de les equacions de les rectes que passen pel punt $(1, -1)$ i formen amb la recta $x + 2y - 4 = 0$ un angle α tal que $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.*

[2] Amb aquest plantejament es considera que dues rectes paral·leles formen un angle de 0°.

El vector director de les rectes que busquem es pot escriure $(1, \lambda)$, si no és paral·lela a l'eix d'ordenades. En aquest cas tenim

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \left| \frac{(1, \lambda) \cdot (-2, 1)}{\sqrt{1+\lambda^2} \cdot \sqrt{4+1}} \right| \implies \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{|-2+\lambda|}{\sqrt{1+\lambda^2} \cdot \sqrt{5}} \implies \sqrt{1+\lambda^2} = |\lambda - 2| \implies$$

$$\implies 1 + \lambda^2 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 \implies \lambda = \frac{3}{4}\,.$$

Llavors, el vector $(1, \frac{3}{4})$ o també el vector $(4, 3)$ és vector director d'una de les rectes buscades. No oblidem que pot existir una altra recta, paral·lela a l'eix d'ordenades, amb la propietat proposada. De fet, la nostra intuïció geomètrica diu que hi ha d'haver dues rectes que formin l'angle demanat amb la recta donada i només n'hem trobat una. Tot apunta a que existeix una altra solució que tindrà vector director $(0, 1)$. Efectivament,

$$\left| \frac{(0, 1) \cdot (-2, 1)}{\sqrt{0+1} \cdot \sqrt{4+1}} \right| = \frac{1}{\sqrt{5}}\,.$$

Per tant, les rectes són $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y+1}{3}$ o $\dfrac{x-1}{0} = \dfrac{y+1}{1}$, és a dir, $3x - 4y - 7 = 0$ o $x = 1$. □

A la secció 2.2 hem estudiat la relació entre els pendents m_1, m_2 de dues rectes perpendiculars. En general, es pot demostrar que una fórmula per cercar l'angle α de dues rectes en funció dels seus pendents m_1, m_2 quan aquestes no són perpendiculars ni paral·leles a l'eix d'ordenades és

$$\boxed{\alpha = \arctan \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|}\,. \tag{4}$$

La demostració queda com un exercici. Una indicació per a la resolució és recordar que els pendent d'una recta coincideix amb el valor de la tangent trigonomètrica de l'angle que forma amb la direcció positiva de l'eix d'abscisses. Això, juntament amb la igualtat trigonomètrica

$$\tan(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{\tan\alpha_1 - \tan\alpha_2}{1 + \tan\alpha_1 \tan\alpha_2}\,,$$

ens durà a la fórmula (4).

Exemple 12 *Resolució de l'exemple (11) mitjançant la fórmula (4).*

El pendent de la recta donada és $\frac{-1}{2}$. A més $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \implies \tan\alpha = 2$. Si anomenem m el pendent de les rectes cercades tenim

$$\left| \frac{m + \frac{1}{2}}{1 - \frac{m}{2}} \right| = 2 \implies \frac{2m+1}{2-m} = \pm 2 \implies \left\{ \begin{array}{c} 2m + 1 = 4 - 2m \\ \text{o bé} \\ 2m + 1 = -4 + 2m \end{array} \right. \implies m = \frac{3}{4}\,.$$

D'aquí en resulta la recta $y + 1 = \frac{3}{4}(x - 1)$. És a dir, $3x - 4y - 7 = 0$, la qual coincideix amb la recta trobada abans. Per trobar la solució que falta hem d'actuar de la manera que hem fet abans, perquè les rectes paral·leles a l'eix d'ordenades no permeten el tractament amb pendents en ser infinits. □

2.5 Bisectriu de l'angle determinat per dues rectes

Considerem el lloc geomètric dels punts tals que les seves distàncies a les dues rectes són iguals. En resulten dues rectes perpendiculars que coincideixen amb les bisectrius dels dos angles que formen les dues rectes.[3] Si tenim les dues rectes

$$r_1 : \; a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \text{i} \quad r_2 : \; a_2x + b_2y + c_2 = 0,$$

cerquem doncs el lloc geomètric dels punts $P(x, y)$ tals que $d(P, r_1) = d(P, r_2)$. En resulta

$$\frac{|a_1x + b_1y + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{|a_2x + b_2y + c_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}},$$

d'on surten les dues rectes perpendiculars

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \quad \text{i} \quad \frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = -\frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

Exemple 13 *Càlcul de les bisectrius de les rectes $x = 2$ i $3x + 4y - 5 = 0$.*

$$x - 2 = \pm\frac{3x + 4y - 5}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \iff \left\{ \begin{array}{l} 5x - 10 = 3x + 4y - 5 \\ 5x - 10 = -3x - 4y + 5 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} 2x - 4y - 5 = 0 \\ 8x + 4y - 15 = 0. \end{array} \right.$$

Observem que les rectes bisectrius trobades tenen vectors directors $(4, 2)$ i $(4, -8)$. El seu producte escalar és $(4, 2) \cdot (4, -8) = 4 \cdot 4 - 2 \cdot 8 = 0$. Per tant, tal com havíem anunciat, són perpendiculars. □

[3] És de demostració immediata que les rectes que en resulten parteixen els angles de les dues rectes en dues parts iguals.

Índex