Teoria de la probabilitat

Ramon Nolla
I.E.S. Pons d'Icart
Tarragona

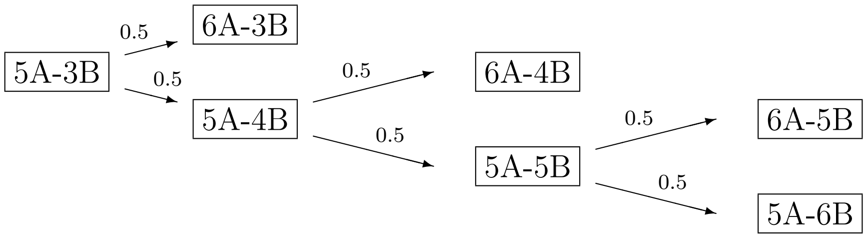
Quan desconeixem les causes reals dels esdeveniments resultants de la realització d'un experiment o de l'observació d'un fenomen, diem que venen causats per l'atzar. Aquests experiments reben el nom d'*aleatoris* i, tot i conèixer els seus possibles resultats, no podem predir quin d'entre ells esdevindrà. La *teoria de la probabilitat* pretén crear un model teòric sobre les freqüències dels possibles esdeveniments que resulten quan l'experiència o fenomen es repeteix un nombre molt gran de vegades.
Un dels propòsits de la teoria de la probabilitat és la seva aplicació a l'estadística. Més concretament a la part de l'estadística que permet *inferir* conclusions, a partir de les descripcions de petites poblacions de resultats d'experiments aleatoris, a poblacions més grans.

Exemple 1 Si hem observat que el 5% d'individus d'una població té una altura mitjana de 1.70m., la teoria de la probabilitat ens hauria de proporcionar un marc teòric que ens permetés arribar a conclusions del tipus: l'alçada mitjana del total de la població se situarà entre 1.68 i 1.72m., i el risc d'equivocar-nos en la predicció és del 3%, (ens equivocaríem en una mitjana de 3 de cada 100 poblacions estudiades). □

El tipus de resposta esperat deixa entreveure que l'empresa de fer una teoria no és simple. Un altre exemple extret de la *Summa de arithmetica, geometrica, proportioni et proportionalita* del frare Luca Pacioli, de l'any 1494, ho confirmarà.

Exemple 2 A i B estan llançant monedes. A guanya un llançament si surt cara. B guanya si surt creu. S'acorda que guanyarà un muntant de 100 monedes el primer que guanyi 6 llançaments.
A causa d'una interrupció aliena als jugadors, cal suspendre la partida quan A ha guanyat 5 llançaments i B n'ha guanyat 3. Pacioli es pregunta com haurà de repartir-se el premi, i argumenta a favor de que $5/8$ del premi siguin per a A i $3/8$ per a B. □

Es pot notar que podem fer moltes objeccions a aquesta decisió. Per exemple si ens creiem que la moneda és homogènia i està perfectament equilibrada, pensem que podem establir que per terme mitjà sortiran tantes cares com creus, que això es pot agafar com a una mesura de probabilitat, i que seria just establir el següent arbre de probabilitats i agafar-lo com a mesura del repartiment del premi:



És a dir que les probabilitats guanyadores d'A i B serien respectivament:

$$P(A) = 0.5 + 0.5^2 + 0.5^3 = 0.875 = \frac{7}{8} \qquad \text{i} \qquad P(B) = 0.5^3 = \frac{1}{8}\,,$$

i el premi es podria repartir segons aquestes proporcions.
També es podria pensar que no podem assegurar que les monedes estiguin ben equilibrades, que només ens podem basar amb la informació proporcionada pels resultats obtinguts fins el moment de la suspensió de la partida, i que hem d'estimar la probabilitat que surti cara 5/8 i que surti creu 3/8. Llavors, construint un diagrama com l'anterior obtindríem:

$$P(A) = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cdot\frac{5}{8} + \left(\frac{3}{8}\right)^2\cdot\frac{5}{8} = 0.9472656 \qquad \text{i} \qquad P(B) = \left(\frac{3}{8}\right)^3 = 0.0527343\,,$$

amb resultats molt diferents de cara a un repartiment del premi.
Notem que arribar a un acord no és fàcil. Fins i tot es podria considerar igualment just el repartir-se el premi en parts iguals, argumentant que és impossible saber el que passaria realment, o també no repartir el premi fins que s'acabés la partida en un altre moment.
Per tancar aquesta discussió es considera com a certa una llei que sembla regular els fenòmens o experiments en què intervé l'atzar, és l'anomenada *llei empírica de l'atzar* la qual diu:

> La freqüència relativa d'un esdeveniment S, associat a un experiment aleatori, s'apropa a un valor fix quan aquest experiment és repetit un nombre molt gran de vegades.

Aquesta llei ens diu que com més repeticions fem d'un experiment aleatori, menys influència té l'atzar sobre la freqüència relativa dels seus esdeveniments associats. Això ens permetria definir la probabilitat d'un esdeveniment com el valor fix que prediu la llei. Més endavant pretenem donar una definició de probabilitat que no es basi en aquesta llei, sinó que sigui capaç de generar la llei com un teorema.
Finalment ens resta notar el fet que una de les primeres definicions de probabilitat es la que deixà Laplace en el segle XVIII la qual diu:

> La probabilitat d'un esdeveniment associat a un experiment aleatori S, és igual al quocient entre el nombre de resultats favorables a S, i el nombre de possibles resultats de l'experiment, sempre que tots els resultats siguin igualment probables.

Aquesta és una definició defectuosa perquè inclou el concepte que es vol definir. Amb la definició que, com ja hem citat, donarem més endavant, obtindrem la de Laplace com un teorema.

1 Àlgebra d'esdeveniments

Definició 1 *Donat un experiment aleatori anomenem* espai mostral Ω, *el conjunt de resultats observables de l'experiment. Els seus elements reben el nom d'esdeveniments o successos elementals, i quasi sempre treballarem el cas en què Ω és finit. Anomenem* esdeveniment o succés, *qualsevol enunciat del qual podem verificar si ha succeït o no un cop realitzat l'experiment.*

Es pot identificar cada esdeveniment amb un subconjunt A de l'espai mostral Ω. Així el conjunt de tots els possibles successos es pot representar per

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{A \;/\; A \subset \Omega\}$$

Definició 2 *Els esdeveniments $\emptyset \subset \Omega$ i $\Omega \subset \Omega$, reben respectivament els noms d'esdeveniment impossible i esdeveniment segur.*

Exemple 3 Donat l'experiment aleatori de tirar tres monedes ordenadament tenim que:

$$\Omega = \{ \circ\circ\circ \;,\; \circ\circ+ \;,\; \circ+\circ \;,\; +\circ\circ \;,\; \circ++ \;,\; +\circ+ \;,\; ++\circ \;,\; +++ \},$$

i el succés "treure dues cares" és $A = \{ \circ\circ+ \;,\; \circ+\circ \;,\; +\circ\circ \}$. □

La identificació entre esdeveniments i conjunts enllaça la descripció de resultats d'un experiment amb la teoria de conjunts,la qual estableix que en $\mathcal{P}(\Omega)$, es poden definir dues operacions:

- **Unió:** A cada parella $A, B \subset \Omega$ li assigna $A \cup B = \{x \in \Omega / \; x \in A$ o $x \in B\}$.
- **Intersecció:** A cada parella $A, B \subset \Omega$ li assigna $A \cap B = \{x \in \Omega / \; x \in A$ i $x \in B\}$.

El seu significat a nivell d'esdeveniments és ben clar. $A \cup B$ significa succeeix A o succeeix B, o succeeixen els dos alhora. $A \cap B$ significa succeeixen A i B alhora.
Es compleixen quatre propietats fonamentals que caracteritzen completament $\mathcal{P}(\Omega)$ amb les dues operacions, i li proporcionen una estructura anomenada *Àlgebra de Boole*:

P1) Commutativa: $A \cup B = B \cup A$ i $A \cap B = B \cap A$.

P2) Distributiva: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ i $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

P3) Element neutre: $\forall A \subset \Omega$ es compleix $A \cup \emptyset = A$ i $A \cap \Omega = A$.

P4) Succés complementari: $\forall A \subset \Omega$ existeix $\overline{A} \subset \Omega$ tal que $A \cup \overline{A} = \Omega$ i $A \cap \overline{A} = \emptyset$.
És immediat veure que $\overline{A} = \{x \in \Omega / \; x \notin A\}$.

Definició 3 *S'anomena complementari d'A el conjunt $\overline{A}$, i el succés associat rep el nom de succés contrari d'A.*

Algunes propietats importants que es poden deduir a partir de les anteriors són:

i) $A \cup A = A \cap A = A$.

ii) $A \cup \Omega = \Omega$ i $A \cap \emptyset = \emptyset$.

iii) $A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B) = A$.

iv) $A \subset \Omega \Longrightarrow \overline{A}$ és únic i $\overline{\overline{A}} = A$.

v) $\overline{\emptyset} = \Omega$ i $\overline{\Omega} = \emptyset$.

vi) (Associativa) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ i $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

vii) (Lleis de Morgan) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ i $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Definició 4 *Ens seran útils més endavant les definicions següents:*

- *Anomenem* conjunt diferència *d'A i B a* $A - B = A \cap \overline{B}$.
- *Dos successos A i B s'anomenen* incompatibles *si* $A \cap B = \emptyset$.
- *La col·lecció de successos* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *s'anomena* partició de Ω *si:*
  - *a)* $A_k = \emptyset,\ \forall k$.
  - *b)* $A_i \cap A_j = \emptyset,\ \forall i, j$ *tal que* $i \neq j$.
  - *c)* $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$.

Exemple 4 Considerem l'experiment de treure una carta d'un joc de cartes de pòquer sense comodins i prendre'n nota. Considerem els successos A treure carta negra, B treure el 8 vermell, C treure figura i D treure diamant. En aquest cas Ω té 52 elements i alguns dels successos de $\mathcal{P}(\Omega)$ són: $A \cap C$ treure figura negra, $B \cap C$ succés impossible (B i C són incompatibles), $C - A$ treure figura vermella, i $\overline{A} \cup D$ treure diamant. □

2 Definició axiomàtica de probabilitat

Recordem que teníem la pretensió que la "llei empírica de l'atzar" fos una conseqüència de la definició de probabilitat. Això s'aconsegueix a partir de les propietats bàsiques de les freqüències relatives, les quals exposarem i utilitzarem per definir axiomàticament la probabilitat.

Sigui Ω l'espai mostral associat a un experiment aleatori, el qual repetim n vegades sota les mateixes condicions. Siguin $S_1, S_2 \subset \Omega$ dos esdeveniments que s'han presentat n_1 i n_2 vegades respectivament, llavors

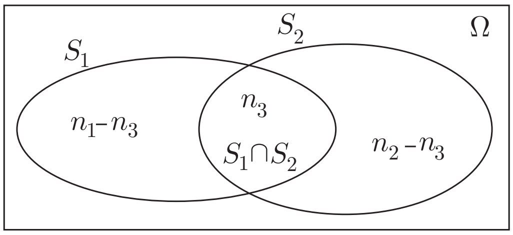
$$f_r(S_1) = \frac{n_1}{n} \qquad \text{i} \qquad f_r(S_2) = \frac{n_2}{n}\,.$$

Es compleix que:

i) $0 \leq \dfrac{n_i}{n} \leq 1 \Longrightarrow 0 \leq f_r(S_i) \leq 1$.

ii) $f_r(\Omega) = \dfrac{n}{n} = 1.$

iii) Si $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, llavors $f_r(S_1 \cup S_2) = \dfrac{n_1 + n_2}{n} = \dfrac{n_1}{n} + \dfrac{n_2}{n} = f_r(S_1) + f_r(S_2).$



Partint d'aquestes propietats es podrien deduir totes les altres propietats de les freqüències relatives. En veurem una per il·lustrar-ho. Suposem que $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$ i $f_r(S_1 \cap S_2) = n_3$, esbrinarem quina és $f_r(S_1 \cup S_2)$:

$$\begin{aligned}
f_r(S_1 \cup S_2) &= f_r((S_1 - S_2) \cup (S_1 \cap S_2) \cup (S_2 - S_1)) = \\
&= f_r(S_1 - S_2) + f_r(S_1 \cap S_2) + f_r(S_2 - S_1) = \\
&= \frac{n_1 - n_3}{n} + \frac{n_3}{n} + \frac{n_2 - n_3}{n} = \frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{n} - \frac{n_3}{n} = f_r(S_1) + f_r(S_2) - f_r(S_1 \cap S_2)
\end{aligned}$$

Definició de probabilitat

Agafarem les propietats que hem considerat fonamentals en les freqüències relatives i les prendrem com una base axiomàtica per definir la probabilitat.

Definició 5 *Sigui Ω l'espai mostral finit associat a un experiment aleatori. Anomenem probabilitat a una aplicació P definida en el conjunt de successos $\mathcal{P}(\Omega)$, i amb valors reals*

$$\begin{array}{rccc} P: & \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & S \subset \Omega & \longmapsto & P(S) \end{array}$$

que compleix els axiomes següents:

i) $0 \leq P(S) \leq 1, \ \forall S \subset \Omega.$

ii) $P(\Omega) = 1.$

iii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B), \ \forall A, B \subset \Omega$ *tals que* $A \cap B = \emptyset.$

Propietats

a) $P(\emptyset) = 0.$

b) $P(\overline{S}) = 1 - P(S).$

c) $A \subset B \Longrightarrow P(A) \leq P(B).$

d) $P(A - B) = P(A \cup B) - P(B).$

e) Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ és una partició de Ω, llavors $\sum_{k=1}^{n} P(A_k) = 1.$

f) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$

g) $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + \sum_{k=2}^{n}\left(\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} (-1)^{k-1} P\left(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_k}\right)\right)$, i si els A_i són incompatibles entre sí en resulta $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

h) **(Regla de Laplace).** Si Ω té n esdeveniments elementals i tots tenen la mateixa probabilitat, i $S\subset\Omega$ està format per k esdeveniments elementals, llavors

$$P(S) = \frac{k}{n} = \frac{\text{casos favorables a } S}{\text{casos possibles de } \Omega}\,.$$

Definició 6 *Anomenem espai de probabilitat finit al tern $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$, on Ω és un conjunt finit i P una aplicació que compleix els axiomes de probabilitat. Quan Ω no és finit, l'espai de probabilitat es defineix igual canviant l'additivitat (o axioma iii) de la definició de probabilitat per l'axioma de σ-additivitat que diu $P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$, sempre que els A_k siguin incompatibles.*

Exemple 5 Fem l'experiment aleatori de tirar un dau que està manipulat de manera que la probabilitat de cada cara és proporcional als punts que hi té inscrits. Volem saber quina és la probabilitat de treure una cara amb un nombre parell de punts.
Tenim $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, el succés $S = \{2,4,6\} = \{2\}\cup\{4\}\cup\{6\}$, i sabem que:[1]

$$\begin{aligned} P(S) &= P(2)+P(4)+P(6) = 2k+4k+6k = 12k \\ 1 = P(\Omega) &= P(1)+P(2)+P(3)+P(4)+P(5)+P(6) = k+2k+3k+4k+5k+6k = 21k\,. \end{aligned}$$

Per tant $k = \dfrac{1}{21}$ i $P(S) = 12k = \dfrac{12}{21} = \dfrac{4}{7}$. □

Exemple 6 En una bossa tenim 5 boles negres i 7 de blanques. Realitzem l'experiment consistent a treure'n 5 sense reposició. Volem calcular la probabilitat de treure'n 3 de blanques i 2 de negres. Per aconseguir que els successos elementals siguin equiprobables considerem

$$\Omega = \{\text{Totes les col·leccions ordenades de 5 boles}\}.$$

Per solucionar el problema considerem els successos:

$$\begin{array}{rcl} 3B & \longleftrightarrow & \text{Treure tres boles blanques.} \\ BBBNN & \longleftrightarrow & \text{Treure blanca, blanca, blanca, negra, negra.} \\ BBNBN & \longleftrightarrow & \text{Treure blanca, blanca, negra, blanca, negra.} \\ \cdots & \longleftrightarrow & \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ NNBBB & \longleftrightarrow & \text{Treure negra, negra, blanca, blanca, blanca.} \end{array}$$

[1]Per presentar la probabilitat d'un conjunt d'un element $P(\{a\})$, escriurem $P(a)$.

Llavors $P(3B) = P(BBBNN) + P(BBNBN) + \cdots + P(NNBBB)$. En ser la probabilitat de cada sumand, per la regla de Laplace, $\dfrac{V_5^2 \cdot V_7^3}{V_{12}^5}$, i haver-hi un total de C_5^3 sumands, obtenim:

$$P(3B) = C_5^3 \cdot \frac{V_5^2 \cdot V_7^3}{V_{12}^5} = 0.4419191\,.$$

□

Exemple 7 En unes oposicions hi entren 100 temes. El tribunal en tria tres a l'atzar, i l'opositor ha de triar entre aquests tres el que coneix millor i contestar-lo. Si l'opositor se sap bé 80 temes, calcula la probabilitat que en pugui contestar bé un dels tres que li han tocat.
Aquí, si volem aplicar Laplace, agafarem $\Omega = \{\text{Col·leccions no ordenades de tres temes}\}$, perquè en ser els temes diferents no hi ha cap col·lecció no ordenada que tingui més o menys probabilitat que una altra. Llavors si considerem l'esdeveniment S "saber-se un tema, com a mínim, entre 3", tenim:

$$P(\overline{S}) = \frac{C_{20}^3}{C_{100}^3} \Longrightarrow P(S) = 1 - P(\overline{S}) = 1 - \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{100 \cdot 99 \cdot 98} = 0.993\,.$$

□

3 Probabilitat condicionada

Moltes vegades es realitza un experiment aleatori i coneixem si un esdeveniment S_1 ha succeït o no. Llavors se'ns planteja l'estudi de la probabilitat que hagi succeït un esdeveniment S_2 sabent que ha passat S_1. Aquesta situació condicional es representa S_2/S_1. Si disposem de moltes repeticions de l'experiment i n'estudiem les freqüències relatives, utilitzant les notacions i el gràfic del principi de la secció anterior, tenim:

$$f_r(S_2/S_1) = \frac{n_3}{n_1},\ f_r(S_1) = \frac{n_1}{n},\ f_r(S_1 \cap S_2) = \frac{n_3}{n} \Longrightarrow f_r(S_2/S_1) = \frac{n_3}{n_1} = \frac{n_3/n}{n_1/n} = \frac{f_r(S_1 \cap S_2)}{f_r(S_1)}\,,$$

expressió que té sentit si $f_r(S_1) \neq 0$, i ens suggereix la definició següent per a la probabilitat condicionada.

Definició 7 *Sigui $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ l'espai de probabilitat associat a un experiment aleatori, i S un esdeveniment qualsevol tal que $P(S) \neq 0$. Definim la probabilitat condicionada a l'esdeveniment S com l'aplicació P_S definida en el conjunt de successos $\mathcal{P}(\Omega)$, i amb valors reals*

$$\begin{array}{rccl} P_S: & \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & A \subset \Omega & \longmapsto & P_S(A) = P(A/S) = \dfrac{P(A \cap S)}{P(S)}\,. \end{array}$$

Una conseqüència immediata és que $P(A \cap S) = P(A/S) \cdot P(S)$.

Teorema 1 *La probabilitat condicionada compleix els axiomes de la probabilitat.*

Prova.

i) $A \cap S \subset S \Longrightarrow 0 \leq P(A \cap S) \leq P(S) \Longrightarrow 0 \leq P(A/S) = \dfrac{P(A \cap S)}{P(S)} \leq 1.$

ii) $P(\Omega/S) = \dfrac{P(\Omega \cap S)}{P(S)} = \dfrac{P(S)}{P(S)} = 1.$

iii) $A \cap B = \emptyset \Longrightarrow (A \cap S) \cap (B \cap S) = A \cap B \cap S \cap S = (A \cap B) \cap S = \emptyset \cap S = \emptyset.$

Conseqüentment obtenim:

$$\begin{aligned} P(A \cup B/S) &= \frac{P((A \cup B) \cap S)}{P(S)} = \frac{P((A \cap S) \cup (B \cap S))}{P(S)} = \frac{P(A \cap S) + P(B \cap S))}{P(S)} \\ &= \frac{P(A \cap S)}{P(S)} + \frac{P(B \cap S)}{P(S)} = P(A/S) + P(B/S) \end{aligned}$$

□

Exemple 8 En un poble de 4000 habitants, 2000 habitants llegeixen el diari A, 2200 llegeixen el diari B i 800 no llegeixen cap diari. Volem calcular la probabilitat que si agafem una persona a l'atzar, sigui lectora dels dos diaris si sabem que en llegeix algun dels dos.
En aquest cas $\Omega = \{\text{Tots els habitants del poble}\}$, i si considerem els successos A "llegir el diari A", i B "llegir el diari B", volem calcular $P(A \cap B/A \cup B)$:

$$P(A \cap B/A \cup B) = \frac{P((A \cap B) \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)},$$

I en ser

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - \frac{800}{4000} = \frac{4}{5} \\ P(A \cap B) &= P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{2000}{4000} + \frac{2200}{4000} - \frac{4}{5} = \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

obtenim $\quad P(A \cap B/A \cup B) = \dfrac{1/4}{4/5} = \dfrac{5}{16}.$ □

Independència de successos. Probabilitat de la intersecció

Definició 8 *Direm que un succés B és independent d'un succés A si $P(B/A) = P(B)$. En cas contrari direm que B depèn d'A.*

Teorema 2 *Si B és independent d'A, llavors A és independent de B, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, i direm que A i B són independents.*

Prova. Efectivament es compleix,

$$\begin{aligned} P(A/B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{P(B/A) \cdot P(A)}{P(B)} = \frac{P(B) \cdot P(A)}{P(B)} = P(A), \\ P(A \cap B) &= P(A/B) \cdot P(B) = P(A) \cdot P(B). \end{aligned}$$

□

Quant a la probabilitat de la intersecció d'un nombre qualsevol d'esdeveniments el teorema següent és de demostració immediata.

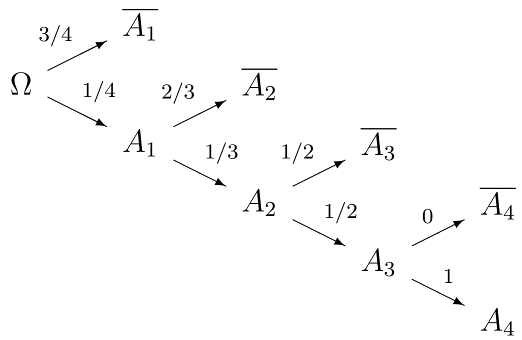
Teorema 3 *Donats* $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset \Omega$*, tals que* $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$*, llavors*

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

Exemple 9 Quatre parelles home-dona organitzen un ball. Cada dona tria un home a l'atzar per ballar. Quina és la probabilitat que cada dona balli amb la seva parella?
Si anomenem A_k el succés "la dona k balla amb la seva parella", calculem

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) &= P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap A_2) \cdot P(A_4/A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{24}\,. \end{aligned}$$

la qual cosa es visualitzada molt bé en l'arbre:



Això també s'hagués pogut obtenir observant que d'entre totes les permutacions que es poden fer entre les dones (casos possibles=4!), només n'hi ha una de favorable. □

En general, per a una col·lecció de n conjunts la definició d'independència és la següent:

Definició 9 $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset \Omega$ *són independents si*

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdots P(A_n).$$

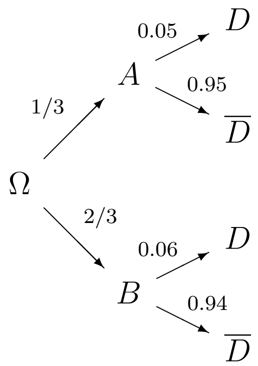
4 Teorema de les probabilitats totals i fórmula de Bayes

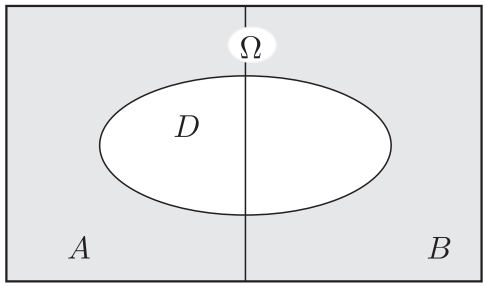
Moltes vegades es pot aconseguir una *partició* de l'espai mostral que ens permet trobar la probabilitat d'un esdeveniment sumant les probabilitats d'aquest esdeveniment condicionades a cadascun dels successos de la partició. Aquesta situació és molt fàcil de visualitzar utilitzant diagrames de conjunts, o també diagrames d'arbre. La fórmula resultant d'aquest procés és la de les *probabilitats totals*. Introduïm la qüestió amb un exemple:

Exemple 10 Suposem que tenim dues màquines A i B que han produït respectivament 100 i 200 peces del mateix tipus, les quals han sigut amagatzemades en un mateix contenidor. Si sabem que A n'ha produït un 5% de defectuoses i B un 6%, es tracta de calcular la probabilitat que una peça triada a l'atzar sigui defectuosa.
Considerem $\Omega = \{\text{tres-centes peces}\}$ i els esdeveniments:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{peces produïdes per la màquina A}\}, \\ B &= \{\text{peces produïdes per la màquina B}\}, \\ D &= \{\text{peces defectuoses}\}. \end{aligned}$$

En aquest cas $\{A, B\}$ és una partició de Ω i, observant els diagrames queda clara la resolució del problema que els segueix:





Notem que $D = D \cap \Omega = D \cap (A \cup B) = (D \cap A) \cup (D \cap B)$.
D'altra banda, $(D \cap A) \cap (D \cap B) = D \cap (A \cap B) = D \cap \emptyset = \emptyset$, i per tant

$$\begin{aligned} P(D) &= P((D \cap A) \cup (D \cap B)) = P(D \cap A) + P(D \cap B) = \\ &= P(D/A) \cdot P(A) + P(D/B) \cdot P(B) = 0.05 \cdot \frac{1}{3} + 0.06 \cdot \frac{2}{3} = \frac{17}{300} = 0.0567 \end{aligned}$$

$\square$

Si en lloc de tenir una partició de Ω en dos subconjunts, tinguéssim una partició en n subconjunts obtindríem, actuant de la mateixa manera, el teorema següent:

Teorema 4 (probabilitats totals) *Sigui $A_1, A_2, \ldots, A_n$ una partició del conjunt Ω i $D \subset \Omega$, llavors*

$$P(D) = P(D/A_1) \cdot P(A_1) + P(D/A_2) \cdot P(A_2) + \cdots + P(D/A_n) \cdot P(A_n)\,.$$

L'últim problema que volem tractar és el que estudia de quina manera un esdeveniment en condiciona un altre si sabem com aquest últim condiciona el primer. D'alguna manera podem pensar que tenim la informació invertida, coneixem l'efecte i ens demanen un estudi probabilístic de la causa. Per concretar la qüestió imaginem que en l'exemple 10 ens demanen que contestem la pregunta següent:

Exemple 11 Quina és la probabilitat que si hem agafat una peça defectuosa, aquesta procedeixi de la màquina A?
Observem que ens demanen $P(A/D)$ i nosaltres coneixem $P(D/A)$. Llavors, si recordem la definició de probabilitat condicionada i el teorema de les probabilitats totals, obtenim

$$\begin{aligned} P(A/D) &= \frac{P(A\cap D)}{P(D)} = \frac{P(D/A)\cdot P(A)}{P(D/A)\cdot P(A)+P(D/B)\cdot P(B)} = \\ &= \frac{0.05\cdot 1/3}{0.05\cdot 1/3+0.06\cdot 2/3} = \frac{5}{17} = 0.294\,. \end{aligned}$$

□

Si generalitzem com en el cas del teorema 4, obtenim l'anomenada *fórmula de Bayes*:

Teorema 5 (fórmula de Bayes) *Sigui* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *una partició del conjunt* Ω *i* $D \subset \Omega$*, llavors*

$$P(A_i/D) = \frac{P(D/A_i)\cdot P(A_i)}{P(D/A_1)\cdot P(A_1)+P(D/A_2)\cdot P(A_2)+\cdots+P(D/A_n)\cdot P(A_n)}\,.$$

Exemple 12 Tenim tres urnes U_1, U_2, U_3 amb boles de colors B blanc, N negre i V verd. La composició de les urnes és:

$$U_1(1B, 2N, 3V),\ U_2(2B, 3N, 4V),\ U_3(4B, 7N, 5V)$$

Triem una urna a l'atzar i agafem una bola sense mirar, volem calcular:

a) La probabilitat que sigui verda.

b) La probabilitat que si la bola ha sortit blanca, procedeixi de la tercera urna.

En aquest cas $\Omega = \{31 \text{ boles}\}$ i si anomenem U_i el conjunt associat al succés "treure bola de la urna U_i", llavors $\Omega = U_1 \cup U_2 \cup U_3$ i $U_i \cap U_j = \emptyset$. Si considerem els successos V "treure bola verda", i B "treure bola blanca":

$$\begin{aligned} P(V) &= P(V/U_1)\cdot P(U_1)+P(V/U_2)\cdot P(U_2)+P(V/U_3)\cdot P(U_3) = \\ &= \frac{3}{6}\cdot\frac{1}{3}+\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{3}+\frac{5}{16}\cdot\frac{1}{3} = 0.419 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(U_3/B) &= \frac{P(B/U_3)\cdot P(U_3)}{P(B/U_1)\cdot P(U_1)+P(B/U_2)\cdot P(U_2)+P(B/U_3)\cdot P(U_3)} = \\ &= \frac{4/16\cdot 1/3}{1/6\cdot 1/3+2/9\cdot 1/3+4/16\cdot 1/3} = 0.391\,. \end{aligned}$$

□