Límits de successions

RAMON NOLLA
Departament de Matemàtiques
IES Pons d'Icart

1 Distància i entorns en $\mathbb{R}$

Valor absolut i distància

- Donat $x \in \mathbb{R}$, definim el *valor absolut de* x com el nombre real $|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x & \text{si } x > 0. \end{cases}$

  Per exemple, $|2| = 2$ i $|-3| = -(-3) = 3$. Algunes de les seves propietats, les quals es dedueixen de la definició, són:

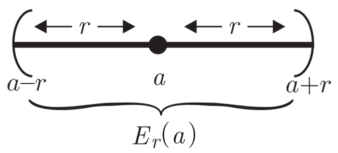
  a) $|x| \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
  b) $|x + y| \leq |x| + |y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.
  c) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.
  d) Si $a > 0$, llavors $|x| < a \Longleftrightarrow -a < x < a$.

- La *distància* entre dos nombres reals x i y, es defineix com el nombre real $d(x, y) = |x - y|$.

Entorns

Utilitzem el terme *entorn d'un punt* per referir-nos als punts que es troben al voltant d'aquest punt. Així, anomenem *entorn de centre* $a \in \mathbb{R}$ *i radi* $r > 0$, el conjunt de nombres que es troben a distància de a menor que r, és a dir:

$$\begin{aligned} E_r(a) &= \{x \in \mathbb{R} \ / \ d(x, a) < r\} = \{x \in \mathbb{R} \ / \ |x - a| < r\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} \ / \ a - r < x < a + r\} = \,]a - r, a + r[\end{aligned}$$



Quan l'interval és tancat l'anomenem *entorn tancat*. Si no diem el contrari, quan parlem d'entorns sempre seran oberts.

Exemple 1 *Expressió en forma d'interval dels punts dels entorns* $E_1(7)$ *i* $E_{10^{-3}}(-2)$.

$E_1(7) =]7 - 1, 7 + 1[=]6, 8[$; $\quad E_{10^{-3}}(-2) =]-2 - 10^{-3}, -2 + 10^{-3}[=]-2.001, -1.999[$. $\square$

2 Successions i el concepte de límit

Una *successió de nombres reals* es pot entendre com una col·lecció infinita i ordenada de nombres reals, de manera que es pot parlar del primer terme de la successió, del segon, del tercer, ... Els termes de la successió venen representats pel símbol a_n, que anomenem *terme general*, en què n representa el lloc que ocupa el terme, i a_n és el seu valor. Està clar que $n \in \mathbf{N}$ i $n \geq 1$.

Exemple 2 *Càlcul del terme general de* $\dfrac{12}{5}, \dfrac{27}{7}, \dfrac{48}{9}, \ldots$

La successió es pot escriure $\dfrac{3 \cdot 4}{2+3}, \dfrac{3 \cdot 9}{4+3}, \dfrac{3 \cdot 16}{6+3}, \ldots$ o bé $\dfrac{3 \cdot 2^2}{2 \cdot 1+3}, \dfrac{3 \cdot 3^2}{2 \cdot 2+3}, \dfrac{3 \cdot 4^2}{2 \cdot 3+3}, \ldots$

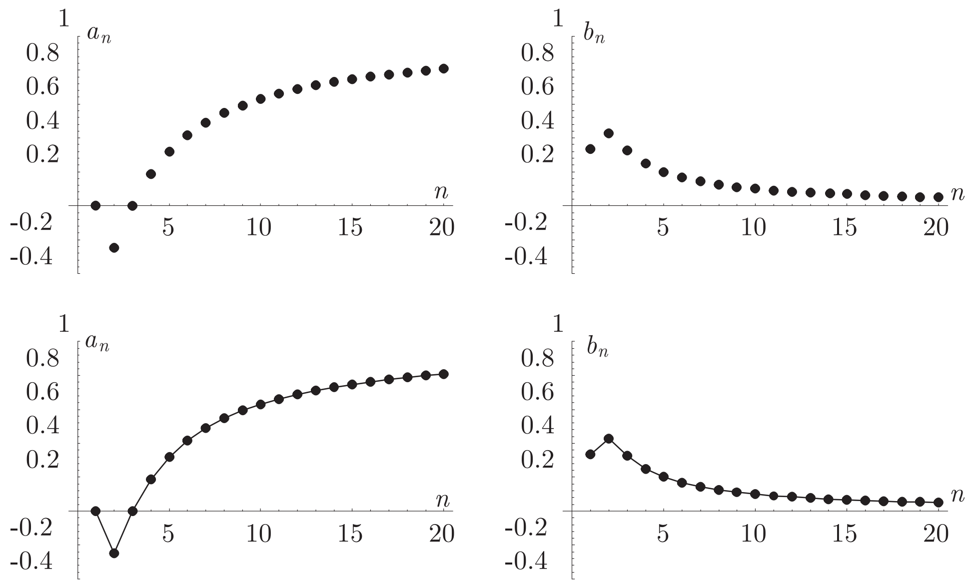
Per tant, $a_n = \dfrac{3(n+1)^2}{2n+3}$.

A partir d'aquest terme general podem calcular el valor de qualsevol terme, per exemple el valor del terme que ocupa el lloc onzè és $a_{11} = 432/25$. □

Gràfics

Podem visualitzar les successions a_n mitjançant una representació plana de la mateixa manera que ho fem amb les funcions.

Exemple 3 *Representació de les successions* $a_n = \dfrac{n^2 - 4n + 3}{n^2}$ *i* $b_n = \dfrac{n^3+1}{n^4+5}$.



□

Aquestes representacions ens orienten sobre el comportament i les tendències de la successió. Per exemple sembla que a_n creix a partir del segon terme, que cada vegada creix més a poc a poc i que tots els seus valors es mantenen per sota del 1. També sembla que la successió b_n tendeix a zero. Notem que la representació plana vàlida, és aquella en la qual els punts no estan connectats per segments. La conexió és afegida per afavorir una millor visualització.

Límits

Tractarem d'estudiar d'una manera més rigorosa el comportament dels termes a_n d'una successió, a mesura que el lloc n que ocupen és fa "més i més gran". Quan es fa aquest estudi es diu que es busca el valor del *límit de la successió* a_n *quan* n *tendeix a infinit*, el qual es representa per $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

• **Límit finit:** Mirarem d'establir el significat de que els termes a_n d'una successió tendeixen a un nombre $A \in \mathbb{R}$, en llenguatge de distàncies i entorns. Dit d'una altra manera, volem aclarir el significat de l'expressió $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$. En una primera aproximació això vol dir que en qualsevol entorn del punt A, per petit que sigui, podem trobar la majoria de termes de la successió, excepte un nombre finit d'ells o, de forma més precisa:

Definició 1 *Dir que* $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ *equival a cadascuna de les següents afirmacions:*

a) Per a qualsevol entorn del punt A existeix un terme de la successió tal que tots els termes que el segueixen es troben dins l'entorn.

b) Per a qualsevol $E_\varepsilon(A)$ *existeix un* a_{n_0} *tal que per a tot* a_n *amb* $n > n_0$ *es compleix* $a_n \in E_\varepsilon(A)$.

c) $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbf{N}$ *tal que* $\forall n > n_0$ *es compleix* $|a_n - A| < \varepsilon$.

Exemple 4 *Anàlisi de l'existència de límit de la successió* $a_n = 3/n$ *i de l'existència d'infinits termes d'aquesta en els entorns* $E_{1/100}(0.1)$ *i* $E_{1/5}(0.1)$.

Quan n "es fa gran" observem que $3/n$ es fa petit i tan petit com vulguem. Així, a primer cop d'ull, sembla que el límit és 0. Si considerem l'entorn $E_{0.01}(0)$, i observem que $a_{300} = 0.01$ i que els termes de la successió tenen valor decreixent i positiu, llavors dins d'aquest entorn hi ha infinits termes de la successió, —a partir del a_{301}—, i fora un nombre finit d'ells, —des de l'a_1 fins l'a_{300}—. Observaríem el mateix per a entorns de radi cada cop menors. De fet veuríem que per a cada radi ε es troben dins de l'entorn $E_\varepsilon(0)$ els termes posteriors a a_{n_0}, on $n_0 = [3/\varepsilon]$. És a dir que $\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} = 0$.
En l'entorn $E_{1/100}(0.1)$, no hi poden haver infinits termes perquè això voldria dir que fora de l'entorn $E_{0.09}(0)$ hi ha infinits termes de la successió, la qual cosa no pot ser.
En l'entorn $E_{1/5}(0.1)$ hi ha infinits termes de la successió perquè l'entorn $E_{0.1}(0)$ hi està contingut. □

Exercici 1 *Donada la successió* $\frac{4}{3}, \frac{5}{6}, \frac{6}{9}, \ldots$

a) Trobeu els termes que pertanyen a $E_{0.00002}\left(\frac{1}{3}\right)$.

b) Demostreu, usant la definició, que el límit és $\frac{1}{3}$.

c) Hi ha infinits termes de la successió en $E_{0.15}(0.2)$*? I en* $E_{0.1}(0.2)$*?*

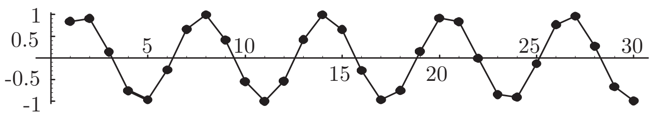
Solució: Els a_n *amb* $n > 50000$. $\forall\varepsilon > 0$ *cal considerar* $n_0 = [1/\varepsilon]$. *Sí; no.*

• **Límit infinit:** Pot passar que els termes d'una successió tinguin tendència a fer-se, en valor absolut, més i més grans. Dit d'una altra manera, si considerem un nombre $K \in \mathbb{R}$, podem trobar un terme de la successió tal que tots els que el segueixen siguin més grans, en valor absolut, que aquest nombre K. Llavors, segons que la successió sigui de termes positius o negatius, es diu que el seu límit és respectivament $+\infty$ o $-\infty$. Si els termes poden tenir qualsevol signe diem que el límit és ∞. Utilitzem una notació més tècnica:

Definició 2

- $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \iff \forall K \in \mathbb{R} \quad \exists n_0$ *tal que* $\forall n > n_0$ *es compleix* $a_n > K$.
- $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \iff \forall K \in \mathbb{R} \quad \exists n_0$ *tal que* $\forall n > n_0$ *es compleix* $a_n < K$.
- $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \iff \forall K \in \mathbb{R} \quad \exists n_0$ *tal que* $\forall n > n_0$ *es compleix* $|a_n| > K$.

També s'utilitza la següent nomenclatura: Anomenem *convergents* les successions que tenen límit finit, *divergents* les que tenen límit ∞, i *oscil·lants* les que no tenen límit. Un exemple de successió oscil·lant pot ser $a_n = \sin n$ com es veu en el gràfic adjunt.



Exemple 5 *Estudi dels límits* $\lim\limits_{n\to\infty} n^2$, $\lim\limits_{n\to\infty} 1-n^3$ *i* $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n n$.

En el primer límit si considerem, primerament, un nombre concret $K = 1000000$ veiem que per $n > 1000$ es compleix $a_n = n^2 > 1000^2 = 1000000$, és a dir $a_n > K$. En general si considerem qualsevol $K > 0$, per a $n > \sqrt{K}$ tenim $a_n = n^2 > (\sqrt{K})^2 = K$; si $K \leq 0$, per a qualsevol n es té $n^2 > K$. D'aquí es conclou que

$$\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty\,.$$

Quant al segon límit, per un raonament semblant, s'arriba a la conclusió que per a qualsevol $K \in \mathbb{R}$ si considerem $n > \sqrt[3]{1-K}$ s'obté $a_n = 1-n^3 < 1-(\sqrt[3]{1-K})^3 = 1-(1-K) = K$. Això significa que a_n es pot fer més petit que qualsevol nombre negatiu, a partir d'un determinat lloc. Consegüentment

$$\lim_{n\to\infty} 1-n^3 = -\infty\,.$$

Finalment, una anàlisi de l'últim límit ens portaria a veure fàcilment que la successió s'apropa a $\pm\infty$. Escriurem

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n n = \infty\,.$$

□

Àlgebra de límits

A partir de les anteriors definicions es poden demostrar els teoremes representats en les taules següents, que per altra banda són força intuïtius.

Teorema 1

$\lim_{n\to\infty}$ a_n \ b_n ($+$)	$-\infty$	B	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\boxed{\infty-\infty}$
A	$-\infty$	$A+B$	$+\infty$
$+\infty$	$\boxed{\infty-\infty}$	$+\infty$	$+\infty$

$\lim_{n\to\infty}$ a_n \ b_n ($\times$)	$-\infty$	0	B	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$\boxed{0\cdot\infty}$	$\pm\infty$	$-\infty$
0	$\boxed{0\cdot\infty}$	0	0	$\boxed{0\cdot\infty}$
A	$\pm\infty$	0	$A\cdot B$	$\pm\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$\boxed{0\cdot\infty}$	$\pm\infty$	$+\infty$

$\lim_{n\to\infty}$ a_n \ b_n ($\div$)	$-\infty$	0	B	$+\infty$
$-\infty$	$\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$
0	0	$\boxed{\frac{0}{0}}$	0	0
A	0	$\pm\infty$	$\frac{A}{B}$	0
$+\infty$	$\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$

$\lim_{n\to\infty}$ a_n \ b_n ($a_n^{b_n}$)	$-\infty$	$B<0$	0	$B>0$	$+\infty$
0^+	$+\infty$	$+\infty$	$\boxed{0^0}$	0	0
$0<A<1$	$+\infty$	A^B	1	A^B	0
1	$\boxed{1^\infty}$	1	1	1	$\boxed{1^\infty}$
$A>1$	0	A^B	1	A^B	$+\infty$
$+\infty$	0	0	$\boxed{\infty^0}$	$+\infty$	$+\infty$

Les expressions emmarcades representen casos en què no es pot decidir sobre el valor del límit. Reben el nom d'*indeterminacions*, i com podem observar n'hi han set:

$$\infty - \infty \ , \ 0 \cdot \infty \ , \ \frac{\infty}{\infty} \ , \ \frac{0}{0} \ , \ 1^{\infty} \ , \ 0^0 \text{ i } \infty^0.$$

3 Tècniques de càlcul de límits

Ara ens interessa cercar tècniques que ens permetin calcular límits en els quals es presenten les *indeterminacions* de la secció anterior. Proposarem algunes tècniques sobre exemples concrets.

Límits de polinomis

$$\lim_{n\to\infty} 3n^2 - n + 2 = \infty - \infty$$

En casos com aquest el valor del límit sempre és infinit, en valor absolut. El seu signe ve determinat pel coeficient de la màxima potència. En l'exemple s'obté $+\infty$, la qual cosa es pot justificar així:

$$\lim_{n\to\infty} 3n^2 - n + 2 = \lim_{n\to\infty} n^2\left(3 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}\right) = +\infty \cdot (3 - 0 + 0) = +\infty \cdot 3 = +\infty$$

Límits de quocients de polinomis i similars

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - n + 2}{n^3 + n^2 - 3} = \frac{\infty}{\infty}$$

Cal desfer la indeterminació fent desaparèixer els infinits que l'originen. Podem aconseguir-ho amb la divisió del numerador i del denominador per la màxima potència que hi apareix. Això deixa invariant la successió, però canvia la seva presentació d'una manera que ens interessa. Efectivament:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - n + 2}{n^3 + n^2 - 3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{3}{n} - \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^3}}{1 + \dfrac{1}{n} - \dfrac{3}{n^3}} = \frac{0 - 0 + 0}{1 + 0 - 0} = 0$$

En general, és de fàcil comprovació que:

- Quan el grau del numerador és major que el del denominador, el límit és o més o menys ∞.
- Quan el grau del denominador és major que el del numerador, el límit és zero.
- Quan el numerador i el denominador tenen el mateix grau, el límit és igual al quocient de coeficients dels termes de major grau.

També dóna bons resultats l'aplicació d'aquesta tècnica, en altres casos:

a) Quan algun dels polinomis està sotmès a un radical, es procedeix com si el radical actués sobre el polinomi dividint-ne el grau per l'índex del radical. En l'exemple següent procedirem com si el grau del polinomi numerador fos $4/2 = 2$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^4 - n^3 + 1}}{2n^2 + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\sqrt{n^4 - n^3 + 1}}{n^2}}{\dfrac{2n^2 + 1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^4}}}{2 + \dfrac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

b) Quan els polinomis són substituïts per combinacions lineals d'expressions exponencials, és a dir en lloc de $n^2, n^3, \ldots$ apareixen $2^n, 3^n, \ldots$, dividirem per l'expressió exponencial més gran.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4^{n+2}+3^n}{2^{2n}-2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{16\cdot 4^n+3^n}{4^n}}{\dfrac{4^n-2^n}{4^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{16+\left(\dfrac{3}{4}\right)^n}{1-\left(\dfrac{2}{4}\right)^n} = \frac{16+0}{1-0} = 16$$

Límits d'expressions radicals amb indeterminació $\infty - \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} - \sqrt{2n-3} = \infty - \infty$$

Si l'actuació proposada en la secció anterior no ens duu enlloc, resulta útil multiplicar i dividir per l'expressió conjugada, així el signe menys de la indeterminació $\infty - \infty$ desapareix.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} - \sqrt{2n-3} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n}-\sqrt{2n-3})(\sqrt{n}+\sqrt{2n-3})}{\sqrt{n}+\sqrt{2n-3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-(2n-3)}{\sqrt{n}+\sqrt{2n-3}} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{-n+3}{\sqrt{n}+\sqrt{2n-3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-1+\dfrac{3}{n}}{\sqrt{\dfrac{1}{n}}+\sqrt{\dfrac{2}{n}-\dfrac{3}{n^2}}} = \frac{-1}{0^+} = -\infty\end{aligned}$$

Exercici 2 *Resoleu els límits següents:*

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}$ *Sol: 0*

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-2}{n^2+3} + \frac{3n-4}{n+5}$ *Sol: 4*

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n^3-2}{1+n^3}\right)^{3/2}$ *Sol: 8*

d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^5-5}{4n^5+n}\right)^{\frac{n}{2n+3}}$ *Sol:* $\dfrac{1}{2}$

e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}$ *Sol: 0*

f) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (\sqrt{0.8})^{-n}$ *Sol:* $+\infty$

g) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+an+b} - \sqrt{n^2+cn+d}$
Sol: $(a-c)/2$

h) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$ *Sol: 0*

i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{n^2+1} - \frac{n^4}{n^2-1}$ *Sol: -2*

j) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^3}{n+5n^3}\right)^{\frac{2-3n^2}{4-n}}$ *Sol: 0*

k) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{3n^2+1}$ *Sol:* $\dfrac{1}{6}$

4 Monotonia i cotes

Hem vist a l'exemple 4 de la pàgina 3 que l'observació del decreixement dels termes de la successió que s'estudiava ens servia per decidir sobre l'existència de límit. L'estudi del comportament creixent o decreixent del valors dels termes d'una successió s'anomena estudi de la *monotonia*.

Definició 3

a) Una successió a_n *és monòtona creixent si* $a_n \le a_{n+1}$, $\forall n$.

b) Una successió a_n *és monòtona decreixent si* $a_n \ge a_{n+1}$, $\forall n$.

Exemple 6 *Estudi de la monotonia de les successions* $a_n = \dfrac{3n-1}{n}$ *i* $b_n = \dfrac{1}{n}$.

a_n és monòtona creixent perquè

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3n+2}{n+1} - \frac{3n-1}{n} = \frac{1}{n(n+1)} > 0 \Longrightarrow a_n \le a_{n+1},\ \forall n.$$

b_n és monòtona decreixent perquè

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)} < 0 \Longrightarrow b_n \ge b_{n+1},\ \forall n.$$

□

Observem que en els exemples estudiats no tan sols es compleix la desigualtat sinó que es compleix la desigualtat estricta, és a dir $a_n < a_{n+1}$ i $b_n > b_{n+1}$. Llavors és diu que la successió és *estrictament creixent* en un cas i *estrictament decreixent* en l'altre. Quan la successió és de termes positius ($a_n > 0$) també es pot estudiar la monotonia a partir de l'equivalència

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \lessgtr 1 \Longleftrightarrow a_{n+1} \lessgtr a_n\ .$$

En la primera successió de l'exemple anterior hagués resultat

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(3n+2)n}{(3n-1)(n+1)} = \frac{3n^2+2n}{3n^2+2n-1} = 1 + \frac{1}{3n^2+2n-1} > 1 \Longleftrightarrow a_{n+1} > a_n\ .$$

Algunes vegades és interessant trobar *cotes*, *màxims* i *mínims* d'una successió. Les cotes són nombres tals que si imaginem els termes d'una successió dibuixats sobre la recta real, aquests sempre es mantenen a un mateix costat de la cota. Els màxims i els mínims són, respectivament, els termes més gran i més petit de la successió. En notació més tècnica direm:

Definició 4

a) K és una cota superior de la successió a_n si $a_n \le K,\ \forall n$.

b) k és una cota inferior de la successió a_n si $a_n \ge k,\ \forall n$.

c) a_p és màxim de la successió a_n si $a_n \le a_p,\ \forall n$.

d) a_q és mínim de la successió a_n si $a_n \ge a_p,\ \forall n$.

e) La més petita de les cotes superiors rep el nom de suprem de a_n, i la més gran de les cotes inferiors rep el nom d'ínfim de a_n.

Exemple 7 *Estudi de les cotes d'$a_n = \dfrac{3n-1}{n}$.*

En ser $a_1 = 2$, a_n creixent i $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$, el conjunt de cotes inferiors és $]-\infty, 2]$ i el conjunt de cotes superiors és $[3, +\infty[$. L'ínfim serà 2, el suprem serà 3, el mínim serà $a_1 = 2$ i no hi ha màxim.

□

5 Una introducció al número e

La successió que ens dóna el capital C_t en què es transforma un capital C sotmès a un interès compost anual $r\%$ en t anys és:

$$C_t = C\left(1 + \frac{r}{100}\right)^t\ .$$

Ara bé, si el període de capitalització dels interessos en lloc de ser anual és semestral, o bé trimestral, o bé mensual, etc., llavors haurem d'afegir els interessos $(r/2)\%$, $(r/4)\%$, $(r/12)\%$, etc., cada semestre, trimestre, mes, etc., respectivament. Així, en general, quan dividim l'any en n parts iguals obtenim

$$C_t = C\left(1+\frac{r/100}{n}\right)^{nt}.$$

Si ens plantegem el cas de capitalització *contínua*, és a dir el cas en què el període de capitalització es fa infinitament petit, llavors $n \to \infty$ i

$$C_t = \lim_{n\to\infty} C\left(1+\frac{r/100}{n}\right)^{nt} = C\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r/100}{n}\right)^{n}\right]^{t}.$$

Ara tractarem un cas concret, inversemblant, però molt pràctic de cara a al nostre objectiu d'introduir el número e. Estudiarem el capital que s'obté en un any, a partir de $C = 1$, sotmès a un interès continu anual del 100%. Com que $t = 1$ i $r = 100$ obtenim

$$C_1 = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}_{a_n} \tag{1}$$

Alguns termes de la successió a_n implicada són:

n	a_n	n	a_n
1	2	1000	2.71688
2	2.25	2000	2.71757
3	2.3707	10000	2.718145
4	2.4414	20000	2.718214
10	2.5937	100000	2.718268

Un primer cop d'ull ens fa pensar que la successió és creixent i, com que els termes cada cop estan més junts, potser té límit. Es pot demostrar, encara que aquí no ho farem, que aquestes conjectures són certes, gràcies a que se li podrien trobar cotes superiors a la successió. En particular el número 3 és una cota. En general, la propietat fonamental dels nombres reals que ens permetria establir la veritat del que hem dit rep el nom de continuïtat. El seu significat gràfic és que els nombres reals "omplen" la recta, —recordem que els nombres racionals no tenen aquesta propietat—. Gràcies a aquesta propietat es pot establir el teorema següent que no demostrarem i que és el que ens permet assegurar l'existència del límit (1):

Teorema 2
Tota successió creixent acotada superiorment té límit, i tota successió decreixent acotada inferiorment té límit.

Conseqüentment la successió donada a (1) té límit; aquest límit és un nombre irracional que val aproximadament 2.7182818... i se li dóna el nom de número e.
Aquest nombre apareix en l'estudi de qüestions i problemes ben diversos. Aquí s'ha presentat en l'estudi d'un problema de matemàtica comercial. Però també apareix en problemes originats en la geometria, la física, etc. En relació amb una de les qüestions del nostre interès, el càlcul de límits, aquest nombre ens proporcionarà una gran ajuda en la resolució d'indeterminacions del tipus 1^∞. Enunciarem en forma de teorema, la propietat en la qual basarem les tècniques de resolució.

Teorema 3
Si $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ *llavors* $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$

Això no és de demostració immediata encara que sembla una propietat ben "natural". A partir d'aquesta és fàcil comprovar que:

Teorema 4

a) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ *llavors* $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$

b) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ *llavors* $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = \frac{1}{e}.$

Resolució de la indeterminació 1^∞

Ara veurem quines tècniques utilitzem per tal d'aplicar aquests resultats a la resolució d'indeterminacions del tipus 1^∞. Es tractarà de transformar l'expressió del terme general de la successió considerada, sense que canviï la successió, fins aconseguir que sigui del tipus que apareix en els teoremes 3 o 4.

Exemple 8 *Càlcul del límit de la successió* $a_n = \left(\dfrac{2n+1}{2n+2}\right)^{\frac{n+15}{3}}$

En resulta una indeterminació del tipus 1^∞. Llavors actuem transformant el terme general de la manera indicada:

$$\begin{aligned}\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^{\frac{n+15}{3}} &= \left(1+\frac{2n+1}{2n+2}-1\right)^{\frac{n+15}{3}} = \left(1-\frac{1}{2n+2}\right)^{(2n+2)\frac{n+15}{3}\frac{1}{2n+2}} \\ &= \left[\left(1-\frac{1}{2n+2}\right)^{2n+2}\right]^{\frac{n+15}{6n+6}}.\end{aligned}$$

Ara passem al límit, i apliquem el teorema 4 d'on resulta:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \left(\frac{1}{e}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+15}{6n+6}} = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{6}} = \frac{1}{\sqrt[6]{e}}. \qquad \square$$

Exercici 3 *Resoleu els límits següents:*

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+5}\right)^{n+2}$ *Sol:* e

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{n}$ *Sol:* e

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5}{\left(\frac{5n+2}{5n+3}\right)^{5n}}$ *Sol:* $5e$

d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-4n}{n^2-3}\right)^{\frac{n^3+1}{n^2-1}}$ *Sol:* e^{-4}

e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n^2-5}\right)^{\frac{n^2+1}{n+1}}$ *Sol:* 1

f) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{\frac{1-n^3}{2n-1}}$ *Sol:* 0

Exercici 4 *Si* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ *i* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ *justifiqueu que*

$$\lim_{n\to\infty} {a_n}^{b_n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n(a_n-1)}$$

i utilitzeu aquesta fórmula per resoldre l'exercici 3.

6 Exercicis finals

1. Trobeu el terme general de les successions següents:

a) $0 \, , \, 5 \, , \, 10 \, , \, 15 \, , \, \ldots$

b) $7 \, , \, 10 \, , \, 13 \, , \, 16 \, , \, \ldots$

c) $3 \, , \, 6 \, , \, 12 \, , \, 24 \, , \, \ldots$

d) $1 \, , \, 2 \, , \, 5 \, , \, 10 \, , \, 17 \, , \, \ldots$

e) $4 \, , \, 8 \, , \, 16 \, , \, 32 \, , \, \ldots$

f) $0 \, , \, 3 \, , \, 8 \, , \, 15 \, , \, \ldots$

g) $\frac{1}{8} \, , \, \frac{1}{27} \, , \, \frac{1}{64} \, , \, \frac{1}{125} \, , \, \ldots$

h) $\frac{1}{4} \, , \, \frac{4}{7} \, , \, \frac{9}{12} \, , \, \frac{16}{19} \, , \, \ldots$

i) $2 \, , \, -2 \, , \, 2 \, , \, -2 \, , \, 2 \, , \, \ldots$

j) $0 \, , \, \frac{3}{2} \, , \, \frac{8}{3} \, , \, \frac{15}{4} \, , \, \frac{24}{5} \, , \, \ldots$

2. Estudieu la monotonia de les successions següents:

a) $a_n = \dfrac{n}{2n-1}$ (D)

b) $a_n = \dfrac{n^2}{n^2+2}$ (C)

c) $a_n = \dfrac{n+1}{n+2}$ (C)

d) $a_n = \dfrac{3n+5}{4n+1}$ (D)

e) $a_n = \dfrac{n^2-4n-1}{n^2}$ (C)

f) $a_n = \dfrac{3n}{n+1}$ (C)

g) $a_n = 5n^2$ (C)

h) $a_n = \dfrac{1}{n^3}$ (D)

i) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2+5}$ (No monòtona)

3. Trobeu les cotes, el suprem i l'ínfim de les successions següents:

a) $a_n = 2n+4$ $\quad (Inf = 6)$

b) $a_n = \dfrac{2n+1}{5n+3}$ $\quad (Inf = \frac{3}{8}, Sup = \frac{2}{5})$

c) $a_n = \dfrac{n^2}{2n+1}$ $\quad (Inf = \frac{1}{3})$

d) $a_n = \dfrac{3n-1}{n+1}$ $\quad (Inf = 1, Sup = 3)$

e) $a_n = \dfrac{1}{n+2}$ $\quad (Inf = 0, Sup = \frac{1}{3})$

f) $a_n = \dfrac{(-1)^n \cdot n}{n^2+2}$ $\quad (Inf = \frac{-1}{3}, Sup = \frac{1}{3})$

4. Donada la successió $\quad a_n = \dfrac{5n+1}{n}$:

a) Estudieu-ne la monotonia, les cotes, el màxim i el mínim.

b) Calculeu la distància entre a_{1000} i el límit.

c) Cerqueu els termes que es troben en els entorns $E_{0.06}(4.95)$, $E_{0.04}(5.05)$, $E_{0.04}(4.95)$ i $E_{0.001}(5)$. Interpreteu aquests resultats des del punt de vista del límit.

Sol: Decr. $Inf = 5, Sup = 6, Màx = 6$. 1/1000. A partir del a_{101}; del a_{12} al a_{100}; cap; a partir del a_{10001}.

5. Estudieu el mateix que en l'exercici anterior per a la successió $a_n = \dfrac{2n}{n+3}$ i els entorns $E_{0.5}(3/2)$, $E_{0.4}(3/2)$, $E_{0.02}(2.01)$ i $E_{10^{-6}}(2)$.

Sol: Cr. $Inf = 1/2, Sup = 2, Mín = 1/2$. 6/1003. A partir del a_4; des del a_4 al a_{56}; a partir del a_{200}; a partir del $a_{2 \cdot 10^6}$.

6. a) Donada la successió $\quad 4 \, , \, \frac{8}{3} \, , \, \frac{16}{9} \, , \, \frac{32}{27} \, , \, \ldots$, quin és el nombre mínim de termes que cal considerar per superar la suma 11.9998? I per obtenir la suma 12?

b) Donada la successió $\quad 3 \, , \, \frac{9}{4} \, , \, \frac{27}{16} \, , \, \frac{81}{64} \, , \, \ldots$, quants termes es necessiten per obtenir la suma 13?

Sol: a) 28; tots. b) No és possible.

7. Donada la successió $a_n = \dfrac{4n-7}{3n+2}$

a) Estudieu la monotonia, les cotes, i l'existència de suprem, ínfim, màxim i mínim. Sol: Creixent. $Inf = -3/5, Sup = 4/3, Mín = -3/5$

b) Esbrineu quins termes de la successió es troben en un entorn de centre $1,332$ i radi $0,0005$. Què podem afirmar del centre de l'entorn observant el resultat? Sol: Des del a_{1757} fins el a_{3865}.

8. Quins valors han de tenir a i b per tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(an-3)^2-(2n-b)^2}{2n+5} = 4$$

Sol: $a = 2$, $b = 5$ o bé $a = -2$, $b = -1$.

9. Calculeu els límits següents:

i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2-1}$ Sol: 1

ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n^2+n+1}$ Sol: 0

iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+n-1}{2n^2+5n-3}$ Sol: $+\infty$

iv) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}$ Sol:1

v) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n-1}}$ Sol: 1

vi) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$ Sol: 0

vii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(3n-2)(2n+5)}{7n^2+4n+1}$ Sol: $\frac{6}{7}$

viii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(3n+1)^3-(3n-1)^3}{(3n+1)(3n-1)}$ Sol: 6

ix) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+2}{n-1}-\frac{n^2+2n}{n+1}\right)$ Sol: 0

x) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (2n-\sqrt{4n^2-3n+2})$ Sol: 3/4

xi) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+4n+1} - \sqrt{n^2+8n+1})$ Sol: -2

xii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3-3n^2+2}-\sqrt{n^3+1}}{\sqrt{n+2}}$ Sol: $-\frac{3}{2}$

xiii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\cdots+2n}{n^2}$ Sol: 2

xiv) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{5+8+11+\cdots+(3n+2)}{3+4+5+\cdots+(2n+1)}$ Sol: $\frac{3}{4}$

xv) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+1}-n)$ Sol: 0

xvi) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(1+2n^3)(1-2n)}{(2n+1)^2}$ Sol: $-\infty$

xvii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{9n^2+6n-1}{3n-2}-\frac{3n^2+7}{n+3}\right)$ Sol: 13

xviii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n+\sqrt{4n^2+1}}{3n-2}$ Sol: 1

xix) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n-2}{2n}\right)^{\frac{2n^2+1}{n^2-2}}$ Sol: 9/4

xx) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1-n-3n^2}{4-3n^2}\right)^{\frac{n^2+1}{n}}$ Sol: $\sqrt[3]{e}$

xxi) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (\sqrt{2n^2+1}-\sqrt{3-n-2n^2})$ Sol: No existeix

xxii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n-3}{2n+7}\right)^{\frac{n^2}{3n+5}}$ Sol: $1/\sqrt[3]{e^5}$

xxiii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (2n-3-\sqrt{4n^2+5})$ Sol: -3

xxiv) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n+3}{1-4n}+2\right)^{\sqrt{n^2+1}}$ Sol: $1/e$

xxv) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n^2+2}{3n^2+7}\right)^{n-2n^3}$ Sol: $+\infty$

xxvi) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{2n+3}\right)^{n+\sqrt{n}}$ Sol: $1/e$

xxvii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} 5^{\frac{n^3-n}{n^2+1}}$ Sol: $+\infty$

xxviii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{\frac{n^3+2n^2-1}{8n^3+2}}$ Sol: 1/2

xxix) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+5}}\cdot\frac{\sqrt{3n^4+7}}{n}$ Sol: $\sqrt{3}$

xxx) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n n}{3n+2}$ Sol: No existeix

xxxi) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ Sol: 0

10. Calculeu la suma dels n primers termes de la successió $\frac{3}{2}, \frac{9}{8}, \frac{27}{32}, \cdots$, i la suma de tots fent un pas al límit. Sol: 6

11. Resoleu l'equació $1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^n = 1093$. Sol: 6

12. Per a quin valor de k es compleix

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{kn^2+1} - \sqrt{4n^2+n}}{2n+1} = -\frac{1}{2}. \quad \text{Sol: } 1$$

Índex