Annex 1: Demostració per inducció

Aquest tipus de demostració es basa en el *principi d'inducció*. Aquest principi estableix la veritat d'una propietat p, $\forall n \in \mathbb{N}$.

> Sigui $p(n)$ = " n compleix la propietat p ". Concretament, el principi d'inducció estableix que afirmar la veritat de $p(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, equival a afirmar les dues proposicions següents:
>
> a) $p(1)$ és certa,
>
> b) $\forall k \in \mathbb{N},\ p(k)$ és certa $\Longrightarrow p(k+1)$ és certa.

Exemple 1 *Demostració per inducció de la igualtat* $1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

a) Per a $n=1$ és certa perquè $1 = \dfrac{1\cdot(1+1)}{2}$.
b) Si la suposem certa per a $n=k\in\mathbb{N}$, llavors també és certa per a $n=k+1$ perquè,

$$1+2+\cdots+k+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 = \left(\frac{k}{2}+1\right)(k+1) = \frac{(k+2)(k+1)}{2}\,.$$

□

Exemple 2 *Càlcul de la suma* $s_n = 1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \cdots + n\cdot n!$

Observem les primeres sumes:

$$\left.\begin{array}{ll} s_1 = 1\cdot 1! & = \quad 1 = 2!-1 \\ s_2 = 1\cdot 1! + 2\cdot 2! & = \quad 5 = 3!-1 \\ s_3 = 1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! & = \ 23 = 4!-1 \\ s_4 = 1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + 4\cdot 4! & = 119 = 5!-1 \end{array}\right\} \overset{\text{(Conjectura)}}{\Longrightarrow} s_n = (n+1)! - 1\,.$$

a) Per a $n=1$ és certa perquè $s_1 = 1\cdot 1! = 1 = (1+1)! - 1$.
b) Si la suposem certa per a $n=k\in\mathbb{N}$, llavors també és certa per a $n=k+1$ perquè,

$$\begin{aligned} s_{k+1} &= s_k + (k+1)\cdot(k+1)! = (k+1)! - 1 + (k+1)\cdot(k+1)! = \\ &= (k+1)![1+(k+1)] - 1 = (k+1)!(k+2) - 1 = (k+2)! - 1. \end{aligned}$$

□

Exemple 3 *Els primers termes de la successió* $a_n = 5^n + 2\cdot 3^{n-1} + 1$ *són* $a_1 = 8$, $a_2 = 32$ *i* $a_3 = 144$. *Observem que tots són múltiples de* 8. *Demostrarem que* $\forall n \in \mathbb{N}$, a_n *és múltiple de 8.*

a) Per a $n=1$ és certa perquè així ho hem vist en l'enunciat.
b) Si és cert per a $n=k\in\mathbb{N}$, llavors també és cert per a $n=k+1$ perquè,

$$a_{n+1} = 5^{n+1} + 2\cdot 3^n + 1 = 5\cdot 5^n + 6\cdot 3^{n-1} + 1 = (5^n + 2\cdot 3^{n-1} + 1) + (4\cdot 5^n + 4\cdot 3^{n-1}).$$

En ser el primer sumand múltiple de 8, només cal demostrar que $4\cdot 5^n + 4\cdot 3^{n-1}$ és múltiple de 8. Això equival a demostrar que $5^n + 3^{n-1}$ és múltiple de 2, la qual cosa és immediata perquè la suma de dos nombres senars és un nombre parell. □

Annex 2: Existència del límit de $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

Caldrà demostrar el creixement i l'existència de cota superior de a_n.

- a_n **és creixent:** Veurem que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$.

$$
\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n}} = \left[\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\right]^n \cdot \frac{n+2}{n+1} = \left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]^n \cdot \frac{n+2}{n+1} \geq \\
&\overset{(*)}{\geq} \left(1-\frac{n}{(n+1)^2}\right) \cdot \frac{n+2}{n+1} = \frac{n^3+3n^2+3n+2}{(n+1)^3} = \frac{(n+1)^3+1}{(n+1)^3} > 1
\end{aligned}
$$

$(*)$ Això és cert, en ser $(1-x)^n \geq 1-nx,\ \forall x \leq 1$, i considerar $x = \frac{1}{(n+1)^2}$. Aquesta desigualtat la demostrem per inducció:
a) Per a $n=1$ és certa perquè $(1-x)^1 = 1-x = 1-1\cdot x$.
b) Si la suposem certa per a $n=k \in \mathbb{N}$, llavors també és certa per a $n=k+1$. Perquè, en ser $x \leq 1$, tenim $1-x \geq 0$ i per tant,

$$
\begin{aligned}
(1-x)^{k+1} &= (1-x)^k(1-x) \geq (1-kx)(1-x) = 1-kx-x+kx^2 = \\
&= 1-(k+1)x+kx^2 \geq 1-(k+1)x
\end{aligned}
$$

- a_n **és acotada superiorment:** Veurem que $a_n < 3$.

$$
\begin{aligned}
a_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{n-1}{2!n}+\frac{(n-1)(n-2)}{3!n^2}+\cdots+\frac{(n-1)!}{n!n^{n-1}} = \\
&= 2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) < \\
&< 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!} < 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} \overset{(*)}{<} 2+1 = 3
\end{aligned}
$$

$(*)$ Això és cert perquè

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}\right) \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow S = \frac{1}{2}\left(1+S-\frac{1}{2^{n-1}}\right) \Longrightarrow S = 1-\frac{1}{2^{n-1}} < 1
\end{aligned}
$$

- **Conclusió:** Existeix el $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ i és un nombre real. Es podria demostrar que és irracional. Les seves primeres xifres són $2.718281828459\ldots$ i rep el nom de número e.