Trigonometria

Ramon Nolla
Departament de Matemàtiques
IES Pons d'Icart

1 Introducció de geometria elemental

1.1 Dues hipòtesis de partida

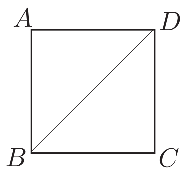
• La primera hipòtesi que acceptarem, sense demostració, en el nostre treball diu que triat un segment que anomenem unitat, per a cada segment existeix un únic nombre real positiu que dóna el valor de la seva relació o raó amb el segment unitat, és a dir la seva mesura. Recíprocament, per cada nombre real positiu existeix un segment que el té per mesura, i tots els que el tenen per mesura són congruents, —coincidents per superposició—.

Exemples:

– Els nombres naturals mesuren els segments que contenen un nombre enter de vegades el segment unitat.

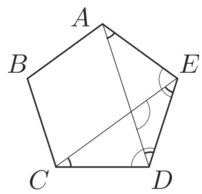
– Els nombres racionals p/q mesuren els segments que contenen un nombre enter p de vegades el segment que resulta de partir el segment unitat en un nombre enter q de parts iguals.

– El nombre irracional $\sqrt{2}$ mesura la diagonal d'un quadrat de costat el segment unitat.



$BC = 1$

$BD = \sqrt{2}$

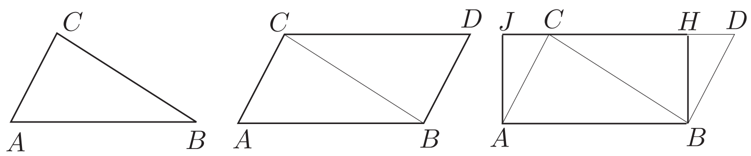


$AE = 1$

$AD = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

– El nombre irracional $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ mesura la diagonal d'un pentàgon regular de costat el segment unitat. (Ho podeu demostrar com a exercici)

• La segona hipòtesi diu que donat un quadrat de costat unitat, la relació o raó entre la superfície de qualsevol rectangle i la d'aquest quadrat, —és a dir la mesura de la seva àrea—, ve donada pel nombre real que resulta de multiplicar els nombres reals que mesuren el costats del rectangle. A partir d'aquest fet és immediat de demostrar que la mesura de l'àrea d'un triangle ve donada per la meitat del producte de la mesura d'un costat per la mesura de l'altura sobre aquest costat.

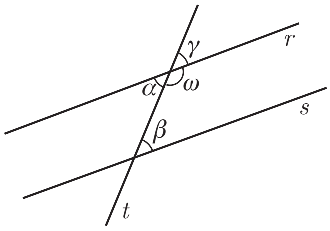


àrea(ABC)=1/2 àrea($ABCD$)=1/2 àrea($ABHJ$)=1/2 $AB{\cdot}HB$

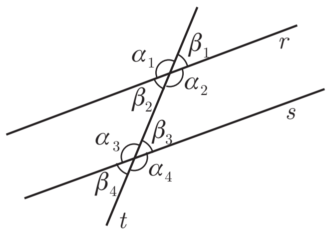
1.2 Angles determinats per dues paral·leles i una secant

Siguin les rectes r i s, i la recta t que les talla. Llavors es compleix,

a) $\alpha = \beta \Longrightarrow r$ i s paral·leles
b) $\gamma = \beta \Longrightarrow r$ i s paral·leles
c) $\omega + \beta = 180° \Longrightarrow r$ i s paral·leles



$$r \text{ i } s \text{ paral·leles} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 \\ \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 \end{cases}$$



És convenient memoritzar els noms que reben les diferents parelles d'angles iguals en el teorema anterior:

- α_1 i α_2, α_3 i α_4, β_1 i β_2, β_3 i β_4 $\longleftrightarrow$ *oposats pel vèrtex.*
- α_1 i α_3, α_2 i α_4, β_1 i β_3, β_2 i β_4 $\longleftrightarrow$ *corresponents.*
- α_1 i α_4, β_1 i β_4 $\longleftrightarrow$ *alterns externs.*
- α_2 i α_3, β_2 i β_3, $\longleftrightarrow$ *alterns interns.*

1.3 Criteris d'igualtat o congruència de triangles

• Entenem per triangles iguals o congruents, aquells que es poden portar a tenir tots els seus elements coincidents per superposició.

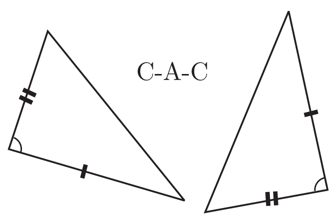
Si només tenim en compte aquesta definició, per comprovar si dos triangles són iguals hauríem de comprovar que tenen sis elements coincidents, tres angles i tres costats. El següents criteris, que no demostrem, permetran establir la igualtat mitjançant la comparació de només tres elements.

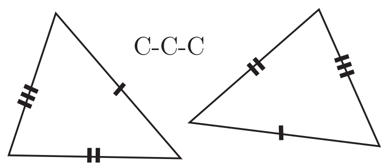
• Dos triangles són iguals o congruents si es compleix alguna de les següents condicions:

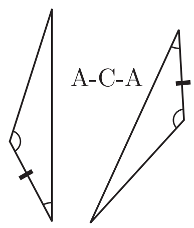
a) **C-A-C**: dos costats d'un d'ells són iguals a dos de l'altre, i l'angle que determinen és igual.

b) **C-C-C**: els tres costats d'un són iguals als tres de l'altre.

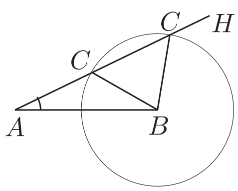
c) **A-C-A**: dos angles d'un d'ells són iguals a dos de l'altre i el costat que comparteixen és igual.

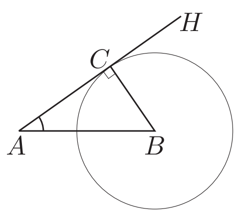






A partir del tercer criteri és immediat comprovar que **A-A-C** també és un criteri d'igualtat. Notem que **A-C-C** és un criteri d'igualtat només en el cas que el triangle sigui rectangle.

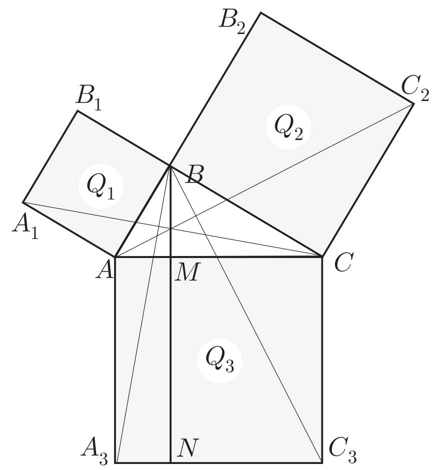




1.4 Teorema de Pitàgores

El teorema de Pitàgores era conegut de totes les civilitzacions de l'Orient, en èpoques anteriors o contemporànies a la civilització grega del temps de Pitàgores [VI aC]. L'únic dubte es presenta en el cas d'Egipte, en el qual no tenim constància escrita d'aquest coneixement. Presentem una versió de la demostració que es troba en el teorema I.47 dels *Elements* d'Euclides.[1] Allí parteix el quadrat sobre la hipotenusa en dos rectangles determinats per l'altura del triangle des de l'angle recte; llavors demostra que les àrees d'aquests rectangles són iguals a les de cadascun dels quadrats sobre els catets.

> En els triangles rectangles el quadrat sobre el costat que subtendeix l'angle recte és igual als quadrats sobre els costats que formen l'angle recte.



Siguin ABC el triangle rectangle, Q_1 i Q_2 els quadrats AB_1 i BC_2 sobre els catets AB i BC, i Q_3 el quadrat AC_3 sobre la hipotenusa AC. Euclides comença construint aquests quadrats i l'altura des del vèrtex B de l'angle recte, i justifica que els catets estan alineats respectivament amb els costats BB_1 i BB_2 dels quadrats Q_1 i Q_2. Llavors estableix que, si prolonga l'altura BM corresponent al vèrtex B fins tallar en N el costat A_3C_3 més allunyat del quadrat Q_3, el quadrat Q_1 és igual al rectangle A_3M i el quadrat Q_2 al rectangle C_3M. Conseqüentment $Q_1 + Q_2 = Q_3$.

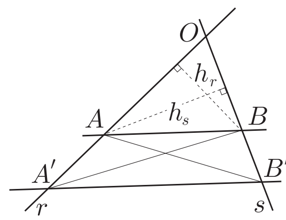
Ho justifica així:

- Q_1 és el doble del triangle A_1AC, per tenir la mateixa base AA_1 i la mateixa altura.
- Els triangles A_1AC i BAA_3 són congruents, pel criteri C-A-C.
- El rectangle A_3M és el doble del triangle BAA_3, per tenir la mateixa base A_3A i la mateixa altura AM.
- El quadrat Q_1 i el rectangle A_3M són iguals, en ser de superfície doble que els triangles congruents citats.
- Diu que passaria el mateix per Q_2 i C_3M.
- Llavors, $Q_1 + Q_2 = A_3M + C_3M = Q_3$. □

Finalment, el teorema I.48 estableix la proposició recíproca que no demostrem. És a dir que si en un triangle els quadrats sobre dos costats sumen la mateixa àrea que el quadrat sobre l'altre costat, llavors el triangle és rectangle.

1.5 Teorema de Tales

Donades dues rectes r i s secants en el punt O, i els punts A, A' sobre r i B, B' sobre s, es compleix l'equivalència:



$$AB \quad \text{i} \quad A'B' \quad \text{paral·leles} \iff \frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'}\,.$$

Demostració:

$\Longrightarrow$) L'estratègia de la prova passa per relacionar les raons entre segments amb raons entre àrees, que siguin fàcils de comparar.[2] Traçarem els segments AB' i BA', i tindrem en compte que les

[1] Quan diem teorema I.47, significa que es tracta del teorema 47 del llibre I. Vegeu (EUCLIDES) [c.300 aC].

[2] Aquesta és l'estratègia a d'Euclides en el teorema VI.2 dels *Elements*.

àrees de ABA' i BAB' són iguals, en compartir un mateix costat AB, i una mateixa altura sobre aquest costat, —la distància entre les paral·leles AB i $A'B'$—.

$$\begin{aligned}\frac{OA}{OA'} &= \frac{\frac{1}{2}\,OA\cdot h_r}{\frac{1}{2}\,OA'\cdot h_r} = \frac{\text{àrea}\,(OBA)}{\text{àrea}\,(OBA')} = \frac{\text{àrea}\,(OBA)}{\text{àrea}\,(OBA)+\text{àrea}\,(ABA')} = \\ &= \frac{\text{àrea}\,(OAB)}{\text{àrea}\,(OAB)+\text{àrea}\,(BAB')} = \frac{\text{àrea}\,(OAB)}{\text{àrea}\,(OAB')} = \frac{\frac{1}{2}\,OB\cdot h_s}{\frac{1}{2}\,OB'\cdot h_s} = \frac{OB}{OB'}\end{aligned}$$

$\Longleftarrow$) Si es dóna la proporcionalitat entre segments tenim:

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} \quad\Longrightarrow\quad \frac{\text{àrea}\,(OBA)}{\text{àrea}\,(OBA')} = \frac{\text{àrea}\,(OAB)}{\text{àrea}\,(OAB')} \Longrightarrow \text{àrea}\,(OBA') = \text{àrea}\,(OAB') \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \text{àrea}\,(ABA') = \text{àrea}\,(BAB')\,.$$

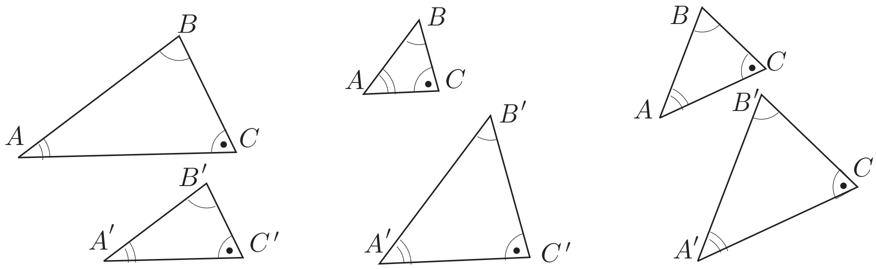
Llavors, els triangles ABA' i BAB' tenen la mateixa altura i, per tant, AB i $A'B'$ són paral·leles.

1.6 Semblança de triangles

Anomenem *triangles semblants*, els triangles tals que els angles d'un d'ells són iguals als de l'altre. Llavors, a partir del teorema de Tales es poden demostrar els criteris de semblança següents:

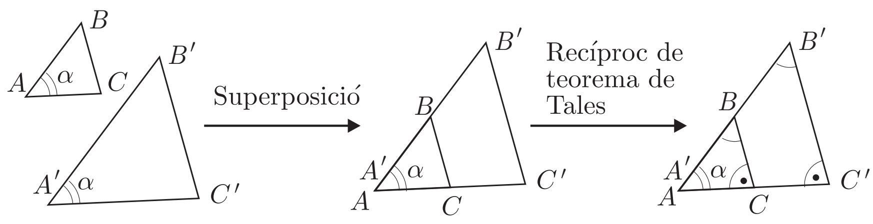
- Dos triangles són semblants si i només si tenen dos costats proporcionals i l'angle que aquests costats determinen igual.
- Dos triangles són semblants si i només si tenen els tres costats proporcionals.

Així, en la figura adjunta, les parelles de triangles que si presenten són semblants.



Quant a la demostració dels dos criteris, il·lustrem com es pot actuar amb la presentació de la prova del cas recíproc del primer d'ells. És a dir que, si dos triangles tenen dos costats proporcionals i l'angle que determinen aquests costats és el mateix, llavors tots els angles són iguals.

Suposem, a la figura adjunta, que els triangles ABC i $A'B'C'$ considerats compleixen $\widehat{BAC} = \alpha = \widehat{B'A'C'}$ i $AB/A'B' = AC/A'C'$.



Podrem traslladar ABC sobre $A'B'C'$ de manera que coincideixin, per superposició, els angles α. Així el vèrtex A caurà sobre el vèrtex A', el costat AB sobre el costat $A'B'$, i el costat AC sobre el $A'C'$. Llavors, pel recíproc del teorema de Tales, tenim que els segments BC i $B'C'$ són paral·lels. Per tant, es compleixen les igualtats d'angles:

$$\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'} \qquad \text{i} \qquad \widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}\,.$$

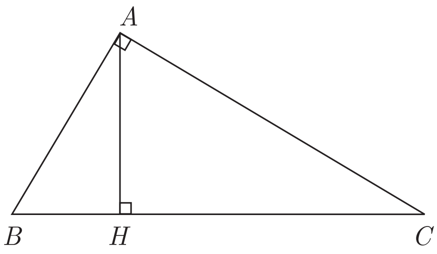
la qual cosa és la que preteníem demostrar.

1.7 El teorema de l'altura i el teorema del catet

Aquest són dos teoremes fàcils d'establir a partir del teorema de Pitàgores o bé de la semblança de triangles.

– El **teorema de l'altura** diu que en qualsevol triangle rectangle l'altura corresponent al vèrtex de l'angle recte és mitjana proporcional entre les projeccions perpendiculars dels catets sobre la hipotenusa. És a dir,

$$\frac{BH}{AH} = \frac{AH}{HC}\,, \quad \text{o bé,} \quad AH^2 = BH \cdot HC\,.$$

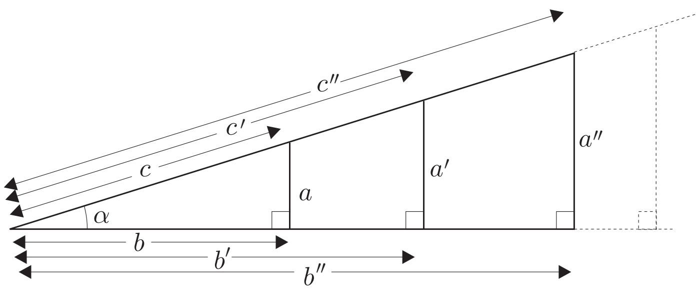


– El **teorema del catet** diu que en qualsevol triangle rectangle cada catet és mitjana proporcional entre la seva projecció perpendicular sobre la hipotenusa i la hipotenusa. És a dir,

$$\frac{BH}{AB} = \frac{AB}{BC}\,, \quad \text{o bé,} \quad AB^2 = BH \cdot BC\,.$$

2 Les raons trigonomètriques dels angles aguts

L'observació de les relacions entre els costats dels triangles rectangles semblants, permet d'establir unes raons invariants en aquests triangles. Concretament, en la col·lecció de triangles rectangles semblants de la figura adjunta s'observa que si mantenim l'angle α constant:



$$\begin{array}{lcl}
\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}\,, \frac{a}{a''} = \frac{c}{c''} \cdots & \Longrightarrow & \frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} = \frac{a''}{c''} = \cdots = \text{constant} \\
\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}\,, \frac{b}{b''} = \frac{c}{c''} \cdots & \Longrightarrow & \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'} = \frac{b''}{c''} = \cdots = \text{constant} \\
\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}\,, \frac{a}{a''} = \frac{b}{b''} \cdots & \Longrightarrow & \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \cdots = \text{constant}
\end{array}$$

Llavors, aquesta invariància de quocients, estableix la seva independència respecte de la grandària dels costats i legitima les definicions següents per a un angle α agut, en un triangle rectangle.

$$\text{sinus}(\alpha) = \frac{\text{catet oposat}}{\text{hipotenusa}}\,, \quad \text{cosinus}(\alpha) = \frac{\text{catet adjacent}}{\text{hipotenusa}}\,, \quad \text{tangent}(\alpha) = \frac{\text{catet oposat}}{\text{catet adjacent}}\,.$$

Aquests tres quocients reben el nom de *raons trigonomètriques* de l'angle α, i es representen mitjançant les notacions $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ i $\tan\alpha$.

La importància d'aquestes raons de cara al tractament de problemes geomètrics va ser advertida molts segles enrere. Els seus valors per als diferents angles van ser calculats i emmagatzemats en llargues llistes de taules. Avui en dia els podem obtenir de les calculadores científiques, en les quals els programadors han implementat algoritmes que proporcionen aquests valors amb una gran velocitat.

2.1 Les raons trigonomètriques inverses

També s'utilitzen les raons trigonomètriques inverses *secant*, *cosecant* i *cotangent*. Es defineixen:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}\,, \quad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}\,, \quad \operatorname{cotan}\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}\,.$$

2.2 Quatre identitats

Considerem el triangle rectangle de catets a i b, i hipotenusa c. Sigui α és l'angle oposat al catet a. Presentem quatre identitats amb les seves demostracions:

– $\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$.[3] Això és immediat pel teorema de Pitàgores, perquè:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1.$$

– $\boxed{\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$. Perquè $\tan\alpha = \dfrac{a}{b} = \dfrac{a/c}{b/c} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

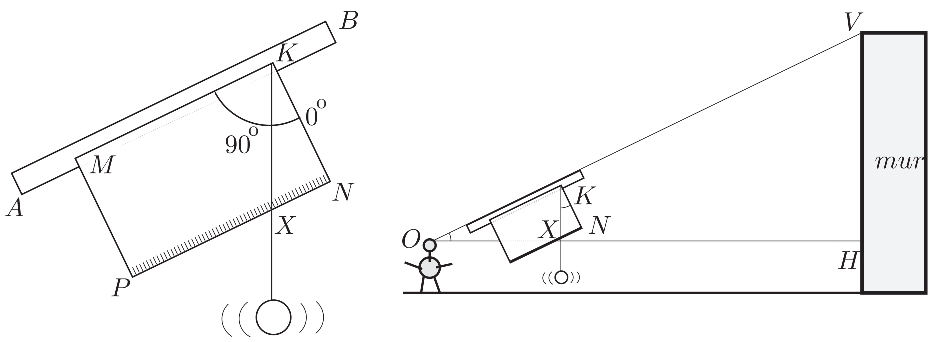
– $\boxed{1+\tan^2\alpha = \sec^2\alpha}$. Perquè $1+\tan^2\alpha = 1+\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \dfrac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} = \sec^2\alpha$.

– $\boxed{1+\operatorname{cotan}^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha}$. Perquè $1+\operatorname{cotan}^2\alpha = 1+\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \dfrac{1}{\sin^2\alpha} =$
$= \operatorname{cosec}^2\alpha$.

2.3 Exemple pràctic per comparar mètodes

Una estratègia per resoldre el problema de mesurar distàncies o altures de llocs inaccessibles es basa en la consideració de triangles semblants. Construirem un "quadrant" que ens ajudarà en aquest problema. Aquest es compon de:

– Un llistó de fusta AB, (llargària entre 35 i 45 cm).
– Un cartó rígid o fullola $MPKN$ de forma rectangular (15×25 cm). El costat MK segueix la direcció del llistó, i els costats KN i MP li seran perpendiculars. Sobre KN anirà escrita la mesura del costat, i sobre NP s'establirà una graduació mil·limètrica assignant a N el valor 0. També s'establirà una graduació angular de 90° sobre un quart de circumferència de centre K, assignant a KN el valor 0° i seguint l'orientació horària.
– Una plomada penjada del vèrtex K.



a) Observeu el gràfic adjunt en què l'observador O col·loca el quadrant amb el llistó AB, seguint la direcció del raig visual, dirigit al capdamunt del mur que té davant. Justifiqueu que els triangles KNX i OHV són semblants.

[3] Les notacions $\sin^2\alpha$, $\cos^2\alpha$, etc., són les expressions abreujades de $(\sin\alpha)^2$, $(\cos\alpha)^2$, etc.

b) Trobeu la fórmula que dóna l'alçada del mur utilitzant la informació de l'apartat anterior.

c) Calculeu l'alçada d'una habitació en què $KN = 15$ cm, $XN = 6$ cm, $OH = 5$ m i l'alçada del punt de mira de l'observador és 1.70 m.

d) Feu el càlcul per a una habitació en què $OH = 4.5$ m i $\measuredangle NKX = 23°$ i l'alçada de l'observador és 1.70 m.

e) Si entre l'observador O i el peu d'un mur H que voleu mesurar hi hagués un obstacle que us impedís mesurar la distància OH, com ho podríeu fer per trobar l'alçada del mur? (Podeu allunyar-vos del mur.)

- Resolució:

a) Els triangles KNX i OHV són semblants perquè $\widehat{NKX} = \widehat{VOH}$, en ser angles aguts de costats perpendiculars, i $\widehat{KNX} = \widehat{OHV} = 90°$.

b) En ser els triangles KNX i OHV semblants, els seus costats són proporcionals. Per tant,

$$\frac{HV}{NX} = \frac{OH}{KN} \Longrightarrow HV = \frac{OH \cdot NX}{KN},$$

i l'alçada del mur resultarà de sumar HV a l'alçada de l'observador.

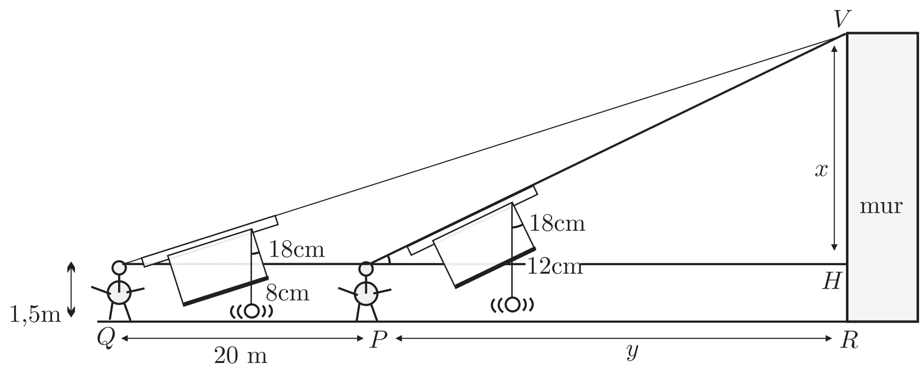
c) Considerem que la paret de l'habitació juga el paper del mur a l'apartat anterior. Llavors,

$$\frac{HV}{6 \text{ cm}} = \frac{5 \text{ m}}{15 \text{ cm}} \Longrightarrow \text{Alçada} = HV + 1.70 = \frac{6 \cdot 5}{15} + 1.70 = 3.70 \text{ m}.$$

d) En ser l'angle d'elevació conegut podem utilitzar la trigonometria.

$$\tan 23° = \frac{HV}{4.5} \Longrightarrow 1.70 + HV = 1.70 + 4.5 \cdot \tan 23° \approx 3.61 \text{ m}.$$

e) Es podria resoldre prenent mesures des de dos punts d'observació P i Q diferents, de manera que estiguessin alineats amb el peu R de la vertical del mur que passa pel punt V cap on hem dirigit les dues visuals, —vegeu la figura adjunta—.



Tindríem $x = VH$ i $y = PR$ desconeguts, i les dades del quadrant conegudes en les dues posicions P i Q de l'observador, així com l'altura HR d'aquest últim. Si suposem que s'han fet les lectures que figuren en el gràfic, tenim:

$$\frac{x}{8} = \frac{20 + y}{18}, \quad \frac{x}{12} = \frac{y}{18} \Longrightarrow x = 26.67\,\text{m}.$$

Llavors, l'altura del mur, seria de $1.5\,\text{m} + 26,67\,\text{m} = 28.17\,\text{m}$.

Si, en un altre mur, en lloc de fer les lectures anteriors s'haguessin fet les lectures dels angles d'elevació, i aquestes haguessin sigut 35° i 15°, i la distància entre les dues observacions fos de

20 m, la resolució seria:

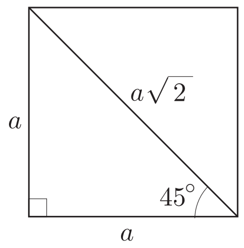
$$\left\{\begin{array}{l}\tan 35^\circ = \dfrac{x}{y}\\ \tan 15^\circ = \dfrac{x}{y+20}\end{array}\right. \Longrightarrow \tan 15^\circ = \frac{y\cdot\tan 35^\circ}{y+20} \Longrightarrow y(\tan 35^\circ - \tan 15^\circ) = 20\tan 15^\circ \Longrightarrow$$

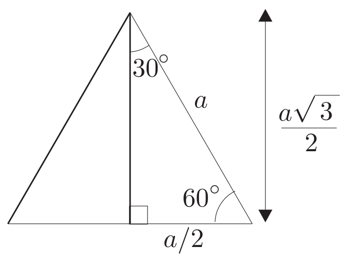
$$\Longrightarrow y = \frac{20\tan 15^\circ}{\tan 35^\circ - \tan 15^\circ} \Longrightarrow x = \frac{20\tan 15^\circ \tan 35^\circ}{\tan 35^\circ - \tan 15^\circ} \approx 8.68 \text{ m}$$

L'alçada del mur s'obtindria afegint a aquesta mesura l'altura de l'observador.

2.4 Raons trigonomètriques que cal recordar

Si en un quadrat tracem una diagonal i en un triangle equilàter tracem una altura, obtenim la configuració d'angles de les figures adjuntes. A més, de l'aplicació del teorema de Pitàgores, s'obtenen les mesures dels costats que s'hi indiquen.





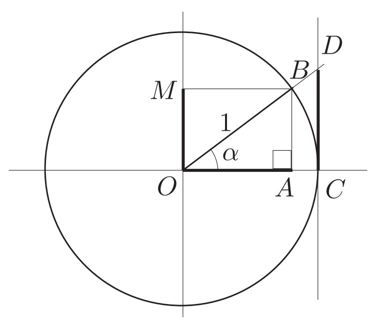
Llavors, en resulten les raons trigonomètriques següents:

$\sin 30^\circ = \dfrac{a/2}{a} = \dfrac{1}{2}$	$\sin 45^\circ = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}/2}{a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos 30^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}/2}{a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 45^\circ = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos 60^\circ = \dfrac{a/2}{a} = \dfrac{1}{2}$
$\tan 30^\circ = \dfrac{a/2}{a\sqrt{3}/2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$	$\tan 45^\circ = \dfrac{a}{a} = 1$	$\tan 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}/2}{a/2} = \sqrt{3}$

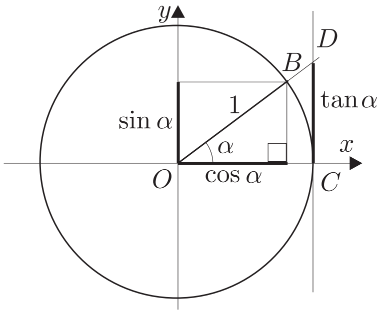
2.5 Definició alternativa sobre la circumferència trigonomètrica

Anomenem circumferència trigonomètrica, una circumferència de radi 1 sobre la que representem angles orientats amb el seu vèrtex sobre el centre, un costat fix sobre un diàmetre i l'altre variable segons el valor de l'angle. El fet de tenir el radi de valor 1, permetrà identificar les raons trigonomètriques com les longituds d'uns certs segments que s'hi representen. Concretament, el sinus i el cosinus vindran representats sobre el diàmetre citat anteriorment i un altre de perpendicular. De moment només treballem amb angles aguts i positius, és a dir orientats en sentit antihorari. Si observem el gràfic tenim que:

$$\begin{aligned}\sin\alpha &= \frac{AB}{OB} = \frac{AB}{1} = AB = OM.\\ \cos\alpha &= \frac{OA}{OB} = \frac{OA}{1} = OA.\\ \tan\alpha &= \frac{AB}{OA} = \frac{CD}{OC} = \frac{CD}{1} = CD.\end{aligned}$$



A partir d'això, si utilitzem els dos diàmetres perpendiculars com a eixos de coordenades, es poden definir les raons trigonomètriques d'un angle agut com els valors numèrics d'uns certs segments:[4]



$\sin\alpha$	$=$	Projecció de OB sobre l'eix OY de les ordenades.
$\cos\alpha$	$=$	Projecció de OB sobre l'eix OX de les abscisses.
$\tan\alpha$	$=$	Segment CD de la tangent per C, interceptat entre la intersecció D, amb OB, i C.

3 Dos teoremes sobre triangles no rectangles

Presentem dos teoremes sobre triangles acutangles, que estendrem a triangles obtusangles, i donaran pas a la definició de raons trigonomètriques per a qualsevol angle.

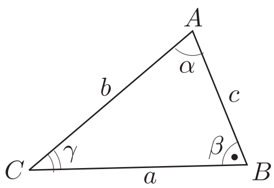
3.1 Teorema del sinus

- **Per a triangles acutangles.**

Aquest teorema ens permetrà obtenir informació de tots els elements d'un triangle quan coneguem dos angles i un costat, o bé, un angle, el costat oposat i un altre costat. Diu que:

En qualsevol triangle acutangle ABC, es compleix:

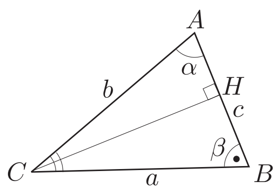
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$



Demostració:

Tracem l'altura CH. Dels dos triangles rectangles ACH i BCH, obtenim

$$\sin\alpha = \frac{CH}{b} \quad \text{i} \quad \sin\beta = \frac{CH}{a}, \quad \text{és a dir} \quad \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}.$$

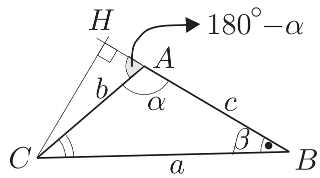


De la mateixa manera, si es traça l'altura corresponent al vèrtex A s'obté

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

- **Per a triangles obtusangles.**

Suposem que el triangle ABC té un angle $\alpha = \widehat{BAC}$ obtús. En traçar l'altura des de C, dels triangles rectangles ACH i BCH s'obté



$$\sin(180^\circ - \alpha) = \frac{CH}{b} \quad \text{i} \quad \sin\beta = \frac{CH}{a}, \quad \text{és a dir} \quad \frac{a}{(180^\circ - \alpha)} = \frac{b}{\sin\beta}.$$

[4]Més endavant veurem que aquesta manera d'introduir les raons trigonomètriques, possibilita l'extensió d'aquest concepte a angles no aguts i a angles negatius. Aquesta extensió simplificarà la presentació d'alguns teoremes.

Llavors, si actuéssim igual que abans, traçant l'altura des de A, obtindríem:

$$\frac{a}{\sin(180^\circ - \alpha)} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

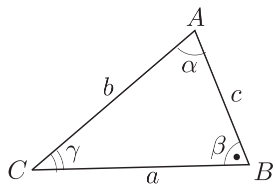
3.2 Teorema del cosinus

- **Per a triangles acutangles.**

Aquest teorema ens permetrà obtenir informació de tots els elements d'un triangle quan coneguem un angle i dos costats qualssevol. Diu que:

En qualsevol triangle acutangle ABC, es compleix:

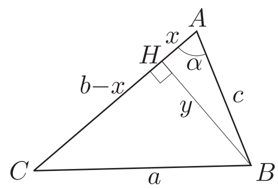
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$



Demostració:

Tracem l'altura BH i anomenem $x = AH$ i $y = BH$. Dels dos triangles rectangles ABH i CBH, obtenim

$$c^2 = x^2 + y^2, \quad a^2 = (b-x)^2 + y^2, \quad \cos\alpha = \frac{x}{c}.$$



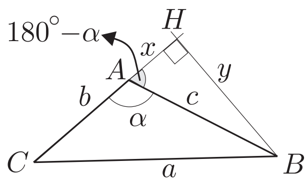
Si eliminem x i y, restant les dues primeres igualtats i tenint en compte que $x = c\cdot\cos\alpha$, en resulta

$$c^2 - a^2 = x^2 - (b-x)^2 = -b^2 + 2bx = -b^2 + 2bc\ \cos\alpha.$$

Finalment, reordenem i s'obté

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ \cos\alpha.$$

- **Per a triangles obtusangles.**



Suposem que el triangle ABC té un angle $\alpha = \widehat{BAC}$ obtús. En traçar l'altura des de B, dels triangles rectangles ABH i CBH s'obté

$$c^2 = x^2 + y^2, \quad a^2 = (b+x)^2 + y^2, \quad \cos(180^\circ - \alpha) = \frac{x}{c}.$$

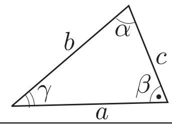
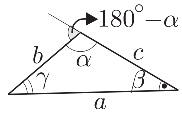
Actuem igual que abans i en resulta

$$c^2 - a^2 = x^2 - (b+x)^2 = -b^2 - 2bx = -b^2 - 2bc\ \cos(180^\circ - \alpha).$$

Finalment, reordenem i s'obté

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\ \cos(180^\circ - \alpha).$$

Resum

	Teorema del sinus	Teorema del cosinus	
Triangles acutangles	$\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}$	$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$	
Triangles obtusangles	$\dfrac{a}{\sin(180^\circ-\alpha)}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}$	$a^2=b^2+c^2+2bc\cos(180^\circ-\alpha)$	

És evident que si féssim una extensió de la definició de les raons trigonomètriques, per a angles α no aguts, de manera que $\sin\alpha=\sin(180^\circ-\alpha)$ i $\cos\alpha=-\cos(180^\circ-\alpha)$, es podrien presentar cadascun dels dos teoremes de forma unificada, amb independència dels tipus d'angles implicats. Aquesta extensió de la definició de les raons es presentarà a la secció següent, i amb els seu ús els dos teoremes es presentaran sota la única forma:

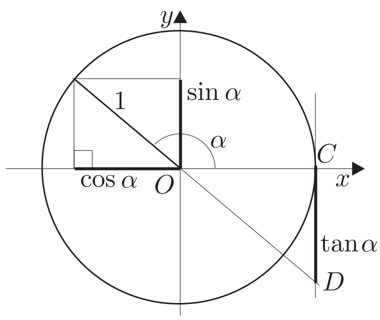
Teorema del sinus: $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}$

Teorema del cosinus: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$

4 Raons trigonomètriques per a angles qualssevol

Hem vist a la secció anterior la conveniència d'estendre la definició de les raons trigonomètriques per a angles no aguts. Aquesta extensió es fa sobre la circumferència trigonomètrica i, per assolir el que allí es pretenia, només cal definir les raons, —igual que en el cas dels angles aguts—, com a projeccions sobre els eixos. Aquesta definició també serà adoptada per angles majors de 180° i angles negatius. No justifiquem perquè ho fem així, encara que apuntem la seva utilitat en molts tipus de problemes; un d'ells podria ser el de la descripció d'un moviment circular mitjançant la determinació de les coordenades amb l'ajut de les raons trigonomètriques.

Així que, en general, per a qualsevol angle α, positiu o negatiu, inclosos els que superen la volta de circumferència tenim



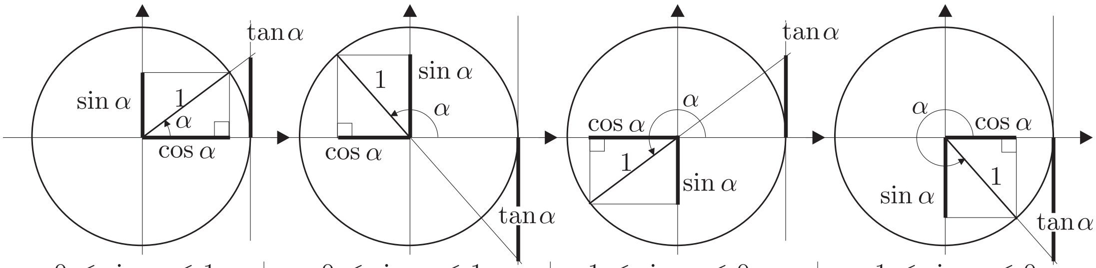
$\sin\alpha$ = Projecció de OB sobre l'eix OY de les ordenades.

$\cos\alpha$ = Projecció de OB sobre l'eix OX de les abscisses.

$\tan\alpha$ = Segment CD de la tangent per C, interceptat entre la intersecció D, amb OB, i C.

• Una de les primeres qüestions a observar és la dels possibles valors i signes d'aquestes raons, segons el valor de l'angle:

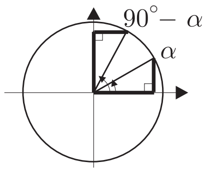
$0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$	$90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$	$180^\circ \leq \alpha \leq 270^\circ$	$270^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$



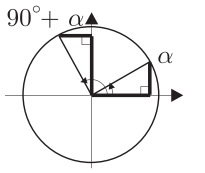
$0 \leq \sin\alpha \leq 1$	$0 \leq \sin\alpha \leq 1$	$-1 \leq \sin\alpha \leq 0$	$-1 \leq \sin\alpha \leq 0$
$0 \leq \cos\alpha \leq 1$	$-1 \leq \cos\alpha \leq 0$	$-1 \leq \cos\alpha \leq 0$	$0 \leq \cos\alpha \leq 1$
$0 \leq \tan\alpha < \infty$	$-\infty \leq \tan\alpha < 0$	$0 \leq \tan\alpha < \infty$	$-\infty \leq \tan\alpha < 0$

També cal recordar que les raons trigonomètriques dels angles $\alpha + t \cdot 360°$, en què $t \in \mathbb{Z}$, són les mateixes que les de l'angle α.

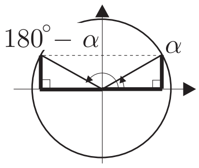
• D'altra banda, de l'observació de les raons trigonomètriques en els diferents quadrants de la circumferència s'extreuen les relacions següents:



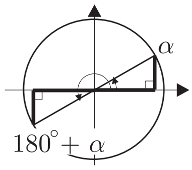
$$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha \qquad \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha \qquad \tan(90° - \alpha) = \text{cotan}\ \alpha$$



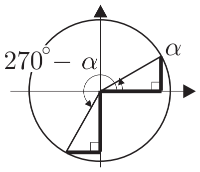
$$\sin(90° + \alpha) = \cos\alpha \qquad \cos(90° + \alpha) = -\sin\alpha \qquad \tan(90° + \alpha) = -\text{cotan}\ \alpha$$



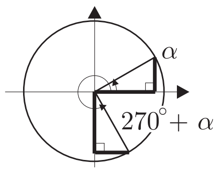
$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha \qquad \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha \qquad \tan(180° - \alpha) = -\tan\alpha$$



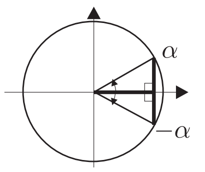
$$\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha \qquad \cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha \qquad \tan(180° + \alpha) = \tan\alpha$$



$$\sin(270° - \alpha) = -\cos\alpha \qquad \cos(270° - \alpha) = -\sin\alpha \qquad \tan(270° - \alpha) = \text{cotan}\ \alpha$$



$$\sin(270° + \alpha) = -\cos\alpha \qquad \cos(270° + \alpha) = \sin\alpha \qquad \tan(270° + \alpha) = -\text{cotan}\ \alpha$$



$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \qquad \cos(-\alpha) = \cos\alpha \qquad \tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$

Exemples: Càlcul de $\tan 240°$, $\cos 495°$, $\sin 300°$ i $\sec(-210°)$.

$\tan 240° = \tan(180° + 60°) = \tan 60° = \sqrt{3}$.

$\cos 495° = \cos(360° + 135°) = \cos(135°) = -\cos(180° - 135°) = -\cos(45°) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$\sin 300° = \sin(270° + 30°) = -\cos 30° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

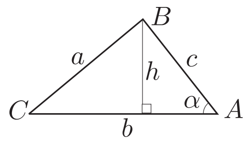
$$\sec(-210°) = \frac{1}{\cos(-210°)} = \frac{1}{\cos 210°} = \frac{1}{\cos(180° + 30°)} = \frac{1}{-\cos 30°} = \frac{1}{-\sqrt{3}/2} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

5 Àrea d'un triangle

Sigui ABC el triangle de costats a, b i c. Estudiem diverses maneres de cercar l'àrea S, segons les dades disponibles i amb l'ajut de la trigonometria.

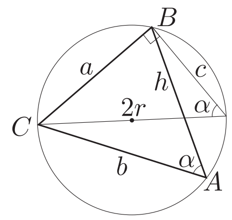
En funció de dos costats b i c i de l'angle $\alpha = \widehat{BAC}$ que determinen

$$\left.\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\, b \cdot h \\ h &= c \cdot \sin\alpha \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \boxed{S = \frac{1}{2}\, b \cdot c \cdot \sin\alpha}\,.$$



En funció dels tres costats i del radi de la circumferència circumscrita

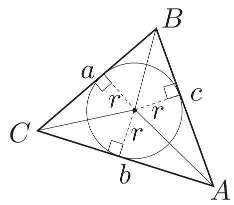
A la circumferència de radi $2r$, circumscrita al triangle ABC, inscrivim el triangle rectangle de catet a i angle oposat α, la hipotenusa del qual serà un diàmetre $2r$. Llavors,



$$\left.\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\, b \cdot c \cdot \sin\alpha \\ \sin\alpha &= \frac{a}{2r} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow S = \frac{1}{2}\, b \cdot c \cdot \frac{a}{2r} \Longrightarrow \boxed{S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4r}}\,.$$

En funció del seu perímetre $2p$ i del radi r de la circumferència inscrita

Sigui $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ el semiperímetre del triangle. Considerem la partició del triangle en tres triangles a partir dels segments d'extrems l'incentre i els vèrtexs. Llavors, l'altura de cada triangle és el radi r de la circumferència inscrita i s'obté



$$S = \frac{1}{2}\, a \cdot r + \frac{1}{2}\, b \cdot r + \frac{1}{2}\, a \cdot r = \frac{a+b+c}{2} \cdot r \Longrightarrow \boxed{S = p \cdot r}\,.$$

En funció dels tres costats a, b i c. Fórmula d'Heró[5]

El camí que seguim en la recerca d'aquesta fórmula és:

(1) Considerar $S = \dfrac{1}{2}\, bc \sin\alpha = bc \sin\dfrac{\alpha}{2} \cos\dfrac{\alpha}{2}$.

(2) Utilitzar el teorema del cosinus per trobar $\cos\alpha$ en funció de a, b i c.

(3) Utilitzar les fórmules trigonomètriques de l'angle meitat per trobar $\sin\frac{\alpha}{2}$ i $\cos\frac{\alpha}{2}$ en funció dels costats, per tal de substituir aquests valors en l'expressió de S del primer pas.

Considerem, doncs, $S = bc \sin\dfrac{\alpha}{2} \cos\dfrac{\alpha}{2}$. Llavors,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \Longrightarrow \cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

[5] La demostració més antiga que tenim de la fórmula que presentem és d'Heró d'Alexandria [fl.∼ 100]. No utilitza la trigonometria i es pot trobar a (Fauvel–Gray) [1987], 205–206. També es pot trobar una demostració no trigonomètrica a (Xambó) [2001], 186–187.

Per tant,

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1-\cos\alpha = \frac{a^2-(b-c)^2}{2bc} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}\,.$$

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1+\cos\alpha = \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc} = \frac{(b+c-a)(b+c+a)}{2bc}\,.$$

Si anomenem $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ és fàcil comprovar que:

$$a+b-c = 2(p-c), \quad a-b+c = 2(p-b), \quad b+c-a = 2(p-a), \quad b+c+a = 2p.$$

Si substituïm a la fórmula de l'àrea:

$$S = bc\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\sqrt{\frac{(p-a)p}{bc}} = ab\sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2b^2}}\,.$$

Per tant, finalment,

$$\boxed{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}\,.$$

6 Mesura d'angles en radians, mesura d'arcs i mesura de sectors

El procés de mesura dels angles es du a terme en dues fases:

– Es traça una circumferència de centre el vèrtex de l'angle.

– Es compara l'arc de circumferència contingut entre els dos costats de l'angle, amb un arc unitat triat prèviament.

La unitat de mesura amb la que hem treballat fins ara, era un dels arcs que resultava de dividir en 360 parts iguals, la circumferència traçada en la primera fase. L'anomenàvem *grau sexagesimal*. La mesura resultant és independent de la circumferència traçada per obtenir-la, en ser totes les circumferències figures semblants entre si.

Es pot introduir una altra unitat de mesura per als angles, si tenim en compte que la longitud d'una circumferència de radi r és $2\pi r$, en què el nombre π ve aproximat per $3.141592653\ldots$. La nova unitat de mesura és un arc de circumferència que mesura igual que el seu radi, s'anomena *radian* i es representa amb el símbol "rad". D'aquesta definició resulta que la relació entre els dos tipus de mesura es regeix per la proporció $\frac{360^\circ}{2\pi}$, la qual presenta la relació de les mesures d'un cercle en els dos tipus d'unitats. La mesura en radians d'un angle permet comparar directament l'arc que determina sobre la circumferència trigonomètrica amb els segments que hi determinen les seves raons trigonomètriques. És així perquè s'utilitza la mateixa unitat, —el radi de la circumferència trigonomètrica—, per mesurar-los. Per exemple,

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\,\mathrm{rad}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{8}\,\mathrm{rad}\right) = \sin\left(\frac{360^\circ}{8}\right) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}\,,$$

permet establir que, sobre la circumferència trigonomètrica, la relació entre la mesura de l'arc corresponent a $45^\circ = \pi/4\,\mathrm{rad}$ i la mesura del segment que determina el sinus és

$$\frac{\sqrt{2}/2}{\pi/4} = 0.9003163161\ldots$$

Aquestes consideracions permeten d'afirmar que:[6]

[6]Si quan expressem l'angle no hi figuren les unitats, significa que aquestes són radians.

- Per a qualsevol angle α es compleix que:
$$\frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{\alpha^\circ}{\alpha_{\text{rad}}}\,.$$
Exemples: a) Expressió de l'angle $\alpha = 70^\circ$ en radians:
$$\frac{180^\circ}{\pi} = \frac{70^\circ}{\alpha_{\text{rad}}} \Longrightarrow \alpha_{\text{rad}} = 70^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{7\pi}{18}\,\text{rad}\,.$$
b) Expressió de l'angle $\alpha = \frac{3\pi}{5}$ rad en graus:
$$\frac{180^\circ}{\pi} = \frac{\alpha^\circ}{3\pi/5} \Longrightarrow \frac{3\pi}{5} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 78^\circ.$$
- Consegüentment, els factors de conversió d'unes unitats a les altres són:
$$\text{De graus a radians: } \frac{\pi}{180^\circ}. \qquad \text{De radians a graus: } \frac{180^\circ}{\pi}\,.$$
- La longitud d'un arc de cercle L_α d'angle central α, en què el radi del cercle és r, es pot calcular de la manera següent:
$$\alpha \text{ en graus: } \frac{180^\circ}{\alpha^\circ} = \frac{\pi r}{L_\alpha} \Longleftrightarrow L_\alpha = \frac{\pi\alpha^\circ r}{180^\circ}.$$
$$\alpha \text{ en radians: } \frac{\pi}{\alpha_{\text{rad}}} = \frac{\pi r}{L_\alpha} \Longleftrightarrow L_\alpha = \alpha_{\text{rad}} \cdot r.$$
- Si es té en compte la proporcionalitat entre les àrees A_α dels sectors de cercle i els seus angles α centrals, i que l'àrea d'un cercle de radi r és πr^2, s'obté que:
$$\alpha \text{ en graus: } \frac{360^\circ}{\alpha^\circ} = \frac{\pi r^2}{A_\alpha} \Longleftrightarrow A_\alpha = \frac{\pi\alpha^\circ r^2}{360^\circ}.$$
$$\alpha \text{ en radians: } \frac{2\pi}{\alpha_{\text{rad}}} = \frac{\pi r^2}{A_\alpha} \Longleftrightarrow A_\alpha = \frac{\alpha_{\text{rad}} \cdot r^2}{2}.$$

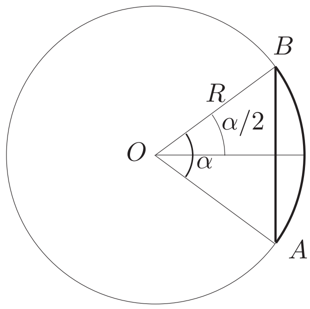
7 Apunt històric

La trigonometria entesa com a disciplina que cercava d'establir les relacions entre les mesures de tots els elements d'un triangle, nasqué a Grècia a l'època d'Hiparc [II aC], o potser una mica abans amb Apol·loni [III aC]. Sembla clar que una de les motivacions de la seva aparició, residí en l'intent de crear un model cosmològic racional que expliqués i relacionés els moviments dels astres en la volta celeste, i contribuís a la mesura cada cop més acurada dels fenòmens relacionats, com la durada de les hores de claror, les posicions relatives dels planetes, etc. Aquest intent esdevingué en el món grec, a més tardar, en el segle IV aC, a l'època de Plató. S'elaboraren diferents models i a partir possiblement d'Apol·loni i, de ple, amb Hiparc i Ptolemeu [II dC], per tal de concordar més acuradament aquests models amb les observacions, s'introduïren cercles excèntrics i epicicles per aproximar millor les trajectòries dels astres interiors de l'esfera celeste. En d'altres paraules els moviments d'aquests astres s'explicaven a partir de la composició de trajectòries circulars amb diferents centres. La complexitat que afegia aquesta teoria, contribuí a fer més punyent la necessitat de relacionar les mesures dels angles i els costats dels triangles. Hiparc fou, possiblement, el primer a establir aquesta relació, amb la compilació d'una "taula de cordes", en què es recollien els valors de les cordes determinades per diferents arcs de circumferència. El mateix va fer Menelau en el primer segle de la nostra era, però cap d'aquestes taules s'ha conservat. L'obra més antiga en què podem trobar-ne un model és la *Composició Matemàtica* —o *Sintaxi Matemàtica*— de Ptolemeu, composta de tretze llibres conservats íntegrament.[7] Allí es pot estudiar la seva presentació, així

[7] Vegeu (PTOLEMEU) [II]. Es pot despenjar de la plana web gallica.bnf.fr.

com els procediments geomètrics, —amb les demostracions pertinents—, emprats per elaborar-les.

En aquestes taules, els valors de les cordes corresponents a diferents arcs —o angles centrals— d'una circumferència venien donats en funció del radi. Així, si en la circumferència (O, OA) es considera la corda AB i l'arc $\widehat{AB}$, subtendits per l'angle central $\alpha = \widehat{AOB}$, la taula proporcionava per a cada valor de α la mesura de la corda $AB = \mathrm{crd}\,(\alpha)$. És a dir, el valor de la corda de l'angle α que proporcionava la taula era $2R\sin(\alpha/2)$, en què R era el radi de la circumferència.



$AB = \mathrm{crd}(\alpha) = 2R\,\sin(\alpha/2)$

Per estudiar l'evolució de la trigonometria, a partir de Ptolemeu, hem de traslladar-nos a l'Índia i, més tard, a la civilització àrab. De la mateixa manera que entre els grecs, està lligada amb l'interès per resoldre els problemes pràctics originats per l'astronomia. Però, també, el fet de ser útil per solucionar problemes originats en altres disciplines com la topografia i l'òptica la converteix cada cop en una disciplina més independent i abstracta.[8] A l'Índia trobem una primera innovació en els conceptes bàsics de la disciplina. Això passa a partir del segle IV, en què en els Siddhanta es presenta per primera vegada l'estudi de la relació entre la meitat d'un arc 2α donat i la meitat de la corda d'aquest arc. Aquesta semicorda rebia el nom de *jya–ardha* o "corda meitat", el qual s'abreujà a *jya* o també *jiva*.

Aquesta nova relació és equivalent a la que ofereix la funció sinus, amb la correcció del factor R igual al radi de la circumferència. Així tenim la nova relació

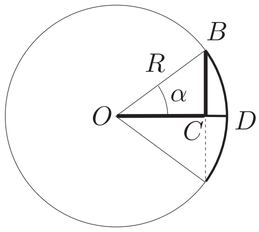
$$\mathrm{semicorda}\,(\alpha) = R \cdot \sin\alpha\,.$$

Posteriorment els àrabs, per anomenar la semicorda, conservaren la forma "jiba". Els traductors Gerard de Cremona i Robert de Chester, en el segle XII, van identificar o confondre el terme amb "jaib" que indica una forma de badia, cavitat, plec o pit, i el van convertir en la paraula, de significat equivalent en llatí, *sinus*. Finalment, Edmund Gunter [1581–1621] professor d'astronomia a Londres li va assignar la notació *sin*. A la trigonometria índia, també trobem les noves relacions

- *kojya* (α), equivalent a $R\cos\alpha$.
- *ukramajya* (α), equivalent a $R(1-\cos\alpha)$.

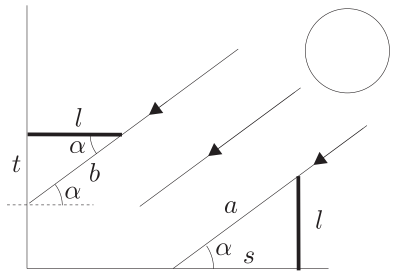
Els matemàtics àrabs begueren de les fonts índies, —els Siddantha havien estat traduïts a l'àrab en el segle VIII—, i de les fonts gregues, —existien traduccions de l'*Almagest*, en el segle IX, i de les *Esfèriques* de Menelau—. Així, dels primers incorporaren les noves relacions trigonomètriques. La relació *kojya* (α) rebia el nom de "sinus del complement de l'arc", i *ukramajya* (α) el de "sinus inclinat" en la direcció de la fletxa entre l'arc i la corda. La traducció llatina d'aquesta última era *sinus versus*, o sinus vers o inclinat. Moltes vegades per distingir-los clarament, escrivien *sinus rectus*, o sinus recte, per designar el sinus.

[8] El breu apunt que presentem en aquesta secció pot ser ampliat a partir, entre d'altres, de (BAG) [1979], 229-285, (BERGGREN) [1986], 127-156, (CAJORI) [1928–29], 142-179, (GHEVERGHESE) [1991], 379-388 i 453-462 de l'edició de 1996, i (YOUSCHKEVITCH) [1976], 131-150.



BC = sinus recte(α) = $R \cdot$ sinus(α)
CD = sinus vers(α) = $R \cdot$ (1− cosinus(α))
OC = sinus del complement(α) = $R \cdot$ cosinus (α)

Els àrabs adquiriren dels grecs tots els coneixements sobre triangles plans i esfèrics, i els ampliaren. També introduïren noves relacions trigonomètriques. En temps d'Al-Huwarizmi trobem l'"ombra" i l'"ombra invertida" d'un angle α, traduïdes al llatí com *umbra recta* i *umbra versa.* La primera era la longitud de l'ombra s d'un gnòmon l situat perpendicularment al terra horitzontal, i la segona era l'ombra t, sobre una paret vertical, d'un gnòmon l situat perpendicularment sobre aquesta. L'angle α era l'angle d'inclinació dels raigs del Sol respecte del pla horitzontal.



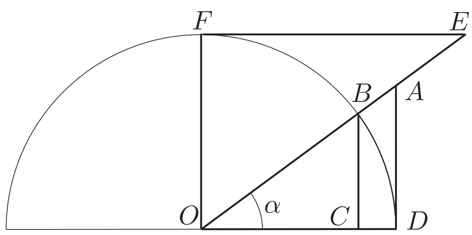
Es pot veure que aquestes eren les relacions equivalents a les nostres cotangent i tangent,

$$\begin{aligned} \text{umbra recta}\,(\alpha) &= s = l \cdot \cot \alpha \\ \text{umbra versa}\,(\alpha) &= t = l \cdot \tan \alpha. \end{aligned}$$

També s'introdueixen en el segle IX, el "diàmetre a de l'ombra" sobre el gnòmon vertical, equivalent a la cosecant, i el "diàmetre b de l'ombra invertida" sobre el gnòmon horitzontal, equivalent a la secant.

$$\begin{aligned} \text{diàmetre de l'ombra}\,(\alpha) &= s = l \cdot \csc \alpha \\ \text{diàmetre de l'ombra invertida}\,(\alpha) &= t = l \cdot \sec \alpha. \end{aligned}$$

Abu'l-Wafa, en el segle X defineix les línies trigonomètriques a partir del cercle, deixant de banda els gnòmons i, per exemple, presenta la tangent trigonomètrica sobre una recta tangent a la circumferència.[9] Així, si representem totes les línies trigonomètriques citades, amb els noms actuals, sobre una circumferència de radi unitat, tenim el gràfic adjunt de fàcil justificació.



BC = sinus(α)
OC = cosinus(α)
DA = tangent(α)
FE = cotangent(α)
OA = secant(α)
OE = cosecant(α)

Abu'l-Wafa també proporciona taules del sinus, cosinus i tangent per al radi igual a 1, les quals consegüentment proporcionen els valors per a les funcions trigonomètriques tal com es consideren actualment, sense necessitat del factor de correcció igual al radi R. Cal destacar la importància de l'existència de taules de tangents i cotangents de cara a la simplificació dels càlculs.

Per acabar aquesta secció citem que els noms tangent i secant són introduïts per Thomas Fincke el 1583, i el terme cotangent per Edmund Gunter el 1620. Quant a les representacions gràfiques

[9]Vegeu (Youschkevitch) [1976], 134.

d'aquestes línies com a funcions de l'angle, sembla que es troben per primera vegada en el treball de Roberval [1602–1675] sobre la determinació de l'àrea sota la cicloide. Allí utilitza una corba auxiliar que no es altra que el gràfic del cosinus, la qual no identifica, però si que identifica en el mateix treball la corba del sinus corresponent al primer quadrant.[10]

Referències

BAG, A. K.
– [1979] *Mathematics in Ancient and Medieval India.* Chaukhamba Orientalia, Varanasi-Delhi.

BERGGREN, J. L.
– [1986] *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam.* Springer, New York.

CAJORI, Florian
– [1928–29] *A History of Mathematical Notations.* Open Court Pub. Co., La Salle, Illinois. [Reeditat per Dover, New York, 1993].

EUCLIDES
– [c.300 aC] *Elements.*
–Traducció al castellà a càrrec de María Luisa Puertas amb introducció de Luís Vega, *Elementos*, en tres volums. Gredos, Madrid, 1994.
–HEATH, Sir Thomas [1908]. *The Thirteen Books of Euclid's Elements.* Cambridge University Press, Cambridge. [Reeditat per Dover, New York, 1956].
–JOYCE, David E. [1996–1998]. *Euclid's Elements.* Department of Mathematics and Computer Science. Clark University. `https://goo.gl/vrtGXa`
–VERA, Francisco [1970]. *Científicos Griegos*, 2 volums. Aguilar, Madrid.

FAUVEL, John, GRAY, Jeremy
– [1987] *The History of Mathematics: A Reader.* MacMillan Press & The Open University.

GHEVERGHESE, George
– [1991] *The Crest of the Peacock: Non-European Roots of Mathematics.* Penguin Books, Harmondsworth, U.K. [Traducció espanyola a càrrec de Jacobo Cárdenas, *La Cresta del Pavo Real. Las Matemàticas y sus Raíces no Europeas.* Ediciones Piràmide, Madrid, 1996].

KATZ, Victor J.
– [1993] *A History of Mathematics.* HarperCollins College Publishers, New York.

NOLLA, Ramon
– [2001] *Estudis i activitats sobre problemes clau de la Història de la Matemàtica.* Departament d'Ensenyament, Barcelona.

PTOLEMEU, Claudi
– [II] *Composition Mathématique* o [*Almagest*]. [Facsímil de la traducció francesa d'Halma dels anys 1813–1816. Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, Paris, 1988]. Web de la traducció d'Halma: `https://goo.gl/mDY6yy`

XAMBÓ, Sebastià
– [2001] «Geometria», *Sessions de preparació per a l'Olimpíada Matemàtica*, 167–213

YOUSCHKEVITCH, Adolf P.
– [1976] *Les Mathématiques arabes.* Vrin, Paris. (És una traducció, a càrrec de Cazenaze i Jaouiche, de la versió en llengua alemanya de la tercera part d'una obra en llengua russa sobre "Les matemàtiques a l'edat mitjana").

[10] Vegeu (KATZ) [1993] 447-448. Tot el text d'aquesta secció ha estat extret de (NOLLA) [2001], 217–219 i 245–247.

Índex