Vectors del pla i geometria afí

Ramon Nolla
Departament de Matemàtiques
IES Pons d'Icart

1 Vectors fixos i vectors lliures del pla

1.1 Vectors fixos

Donats dos punts A i B del pla, anomenem *vector fix d'origen A i extrem B*, la parella ordenada de punts (A, B). Normalment adoptarem per a la seva presentació la notació $\overrightarrow{AB}$. Per a la seva representació gràfica utilitzarem el segment AB amb una punta de fletxa a l'extrem B, la qual recordarà l'ordre en què s'ha donat la parella (A, B) i suggereix una idea d'"orientació". A partir de la definició observem que "quasi" tots els vectors fixos $\overrightarrow{AB}$ queden caracteritzats per:

– La seva *posició* en el pla.

– La distància entre el seu origen A i el seu extrem B, la qual anomenem *mòdul* i representem mitjançant la notació $|\overrightarrow{AB}|$.

– La *direcció* determinada per la direcció de la recta suport de A i B.[1]

– El *sentit* —o orientació— determinat per l'ordre de la parella (A, B).

Observacions:

– Existeixen uns vectors fixos que no comparteixen aquesta caracterització, són els del tipus $\overrightarrow{AA}$, en què l'origen i l'extrem coincideixen. Aquests reben el nom de *vectors fixos nuls*. Es caracteritzen per la seva posició en el pla i tenir el mòdul igual a zero.

– Per a cada parella de punts A i B es poden definir dos vectors: $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BA}$. Aquests tenen el mateix mòdul i direcció, però diferent sentit, i es diu que tenen *sentit oposat*.

L'aplicació que farem dels vectors a la geometria és independent de la seva posició en el pla. Amb aquesta finalitat farem una classificació dels vectors fixos que proporcionarà un nou tipus de vectors, els quals anomenarem *vectors lliures del pla*.

1.2 Vectors lliures

En el conjunt de vectors fixos definim la següent relació $\mathcal{R}$:

$$\boxed{\overrightarrow{AB}\ \mathcal{R}\ \overrightarrow{CD} \iff \overrightarrow{AB} \text{ i } \overrightarrow{CD} \quad \text{tenen igual mòdul, direcció i sentit, o bé són nuls.}}$$

Aquesta és una *relació d'equivalència*, la qual cosa vol dir que satisfà les tres propietats següents:

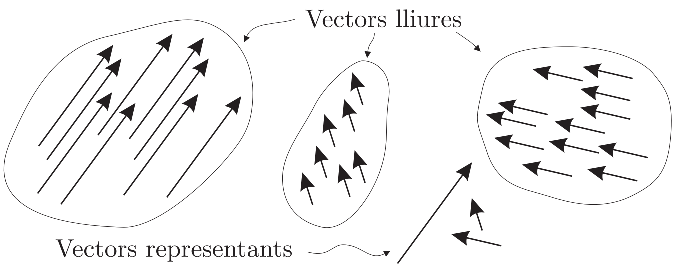
[1] Entenem que totes les rectes paral·leles a una recta donada determinen una mateixa direcció. Així podem definir la direcció d'una recta com aquella propietat que comparteix amb les rectes que li són paral·leles i només amb elles.

– Reflexiva: Per a qualsevol $\overrightarrow{AB}$ es compleix $\overrightarrow{AB}\ \mathcal{R}\ \overrightarrow{AB}$.

– Simètrica: Si $\overrightarrow{AB}\ \mathcal{R}\ \overrightarrow{CD}$ llavors, $\overrightarrow{CD}\ \mathcal{R}\ \overrightarrow{AB}$.

– Transitiva: Si $\overrightarrow{AB}\ \mathcal{R}\ \overrightarrow{CD}$ i $\overrightarrow{CD}\ \mathcal{R}\ \overrightarrow{EF}$ llavors, $\overrightarrow{AB}\ \mathcal{R}\ \overrightarrow{EF}$.

Aquest tipus de relació permet "partir" el conjunt sobre el que està definida, —és a dir, permet classificar els elements del conjunt—, en subconjunts que anomenem *classes d'equivalència*. Cada element del conjunt pertany a una i només una de les classes, en què es troben tots els elements relacionats amb ell. En el nostre cas, cadascuna d'aquestes classes o subconjunts de la partició rep el nom de *vector lliure*, el qual es caracteritza pel mòdul, direcció i sentit dels vectors fixos que el conformen, però mai per la seva posició.



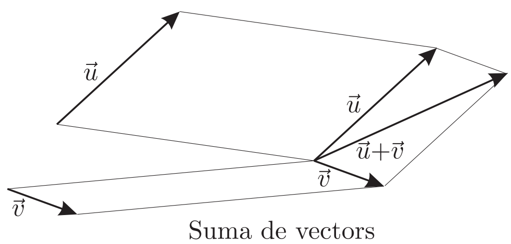
A partir d'ara treballarem amb els vectors lliures, la qual cosa significa que treballarem amb vectors sense donar rellevància a la seva posició en el pla. A la pràctica escollirem un vector fix d'entre tots els que es relacionen entre si, el que més ens interessi en cada qüestió plantejada; aquest "representarà" a tots els vectors de la seva classe, és a dir al vector lliure del qual és un element. Per presentar els vectors lliures utilitzarem la notació $\vec{v}$, o bé $\overrightarrow{AB}$ en què $\overrightarrow{AB}$ és un representant de $\vec{v}$. Finalment, representarem la classe dels vectors nuls amb la notació $\vec{0}$ i l'anomenarem *vector zero*.

2 Estructura dels vectors lliures del pla

En el conjunt de vectors lliures definirem dues operacions: una interna, —entre vectors—, i una externa, —entre nombres reals i vectors—. Aquestes operacions permetran expressar o generar vectors a partir d'altres vectors, la qual cosa s'interpreta com l'existència d'una estructura en el conjunt de vectors. Aquesta permetrà l'ús dels vectors en el tractament de qüestions geomètriques en què estiguin implicats els conceptes de paral·lelisme i incidència. Més endavant afegirem elements a aquesta estructura, de manera que podran ser tractats problemes relacionats amb la mesura de distàncies i angles.

2.1 Operació interna: Suma de vectors

Donats dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$, la seva suma es representa per $\vec{u}+\vec{v}$, i es pot definir, en primera instància, per un vector representant obtingut pel procediment següent:



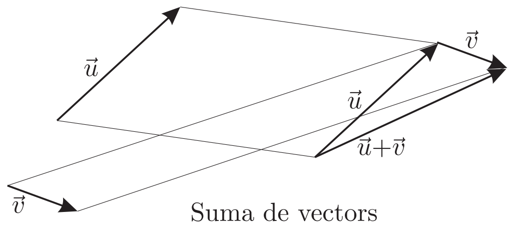
Suma de vectors

– Escollim un representant de cadascun dels vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ amb l'origen comú.

– Completem el paral·lelogram determinat pels segments suport de $\vec{u}$ i $\vec{v}$.

– Considerem com a vector $\vec{u}+\vec{v}$, el representat pel vector que té l'origen en l'origen comú de $\vec{u}$ i $\vec{v}$, i extrem en l'extrem oposat de la diagonal que parteix d'aquest origen.

Una ullada ràpida a aquesta definició descobreix les seves mancances. Concretament, no queda definida la suma de vectors que tenen la mateixa direcció, ni la suma d'un vector amb el vector zero. Això es pot solucionar amb la definició següent, la qual coincideix amb l'anterior per als vectors $\vec{v} \neq \vec{0}$ de direcció diferent:



Suma de vectors

– Escollim un representant de cadascun dels vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$, de manera que l'extrem de $\vec{u}$ coincideixi amb l'origen de $\vec{v}$.

– Considerem com a vector $\vec{u}+\vec{v}$, el representat pel vector que té l'origen en l'origen de $\vec{u}$, i l'extrem en l'extrem de $\vec{v}$.

Propietats de la suma de vectors

i) Associativa: $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ es compleix $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$.

ii) Commutativa: $\forall \vec{u}, \vec{v}$ es compleix $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$.

iii) Existència d'element neutre: Efectivament, el vector $\vec{0}$ compleix $\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}, \ \forall \vec{u}$.

iv) Existència d'element simètric o oposat: Efectivament, $\forall \vec{u}$ el vector $\vec{x}$ que té iguals mòdul i direcció que $\vec{u}$ i sentit oposat, compleix $\vec{u}+\vec{x}=\vec{0}$. Representarem l'element simètric $\vec{x}$ de $\vec{u}$ amb la notació $-\vec{u}$.

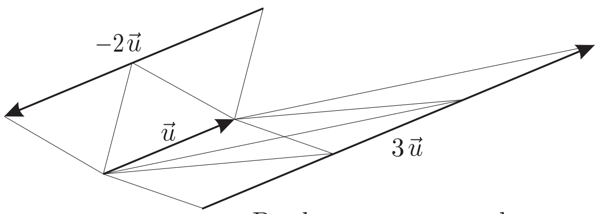
2.2 Operació externa: Producte d'un nombre real o escalar per un vector

Donats $\lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$ i un vector $\vec{u} \neq 0$, es defineix el producte de λ per $\vec{u}$, el qual es representa amb la notació $\lambda \cdot \vec{u}$ o $\lambda\, \vec{u}$, com un vector lliure tal que:

– direcció $(\lambda \cdot \vec{u})$ = direcció $(\vec{u})$.

– sentit $(\lambda \cdot \vec{u}) = \begin{cases} \text{sentit } (\vec{u}), & \text{si } \lambda > 0 \\ \text{sentit } (-\vec{u}), & \text{si } \lambda < 0. \end{cases}$

– mòdul $(\lambda \cdot \vec{u}) = |\lambda| \cdot$ mòdul $(\vec{u})$.



Producte per un escalar

Si $\lambda=0$, es defineix $0 \cdot \vec{u}=\vec{0}$, i si $\vec{u}=\vec{0}$ es defineix $\lambda \cdot \vec{0}=\vec{0}$.

Propietats del producte per un escalar

i) $\forall\lambda \in \mathbb{R}$, i $\forall\vec{u},\vec{v}$ es compleix $\lambda\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \lambda\cdot\vec{u}+\lambda\cdot\vec{v}$.

ii) $\forall\lambda,\mu \in \mathbb{R}$, i $\forall\vec{v}$, es compleix $(\lambda+\mu)\cdot\vec{v} = \lambda\cdot\vec{v}+\mu\cdot\vec{v}$.

iii) $\forall\lambda,\mu \in \mathbb{R}$, i $\forall\vec{v}$, es compleix $(\lambda\cdot\mu)\cdot\vec{v} = \lambda\cdot(\mu\cdot\vec{v})$.

iv) $\forall\vec{v}$ es compleix $1\cdot\vec{v} = \vec{v}$.

2.3 Sobre l'estructura d'espai vectorial

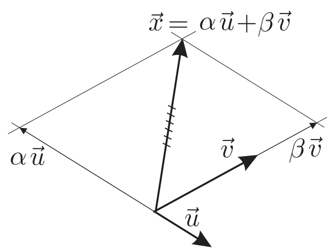
Existeixen d'altres conjunts d'objectes matemàtics en què es defineixen una operació interna i una d'externa, les quals satisfan les propietats anteriors. Per exemple, en el conjunt dels polinomis podem considerar les operacions de sumar polinomis i de multiplicar-los per un nombre. Si les observem satisfan les mateixes propietats que les operacions interna i externa en els vectors. És a dir, els vectors i els polinomis amb les operacions esmentades tenen quelcom en comú. Llavors, es diu que tenen la mateixa estructura. De la mateixa manera direm que qualsevol conjunt en què es puguin definir una operació interna i una d'externa amb els reals, tals que es compleixin les vuit propietats anteriors, té la mateixa estructura que els vectors. Aquesta estructura rep el nom d'*espai vectorial real* i qualsevol propietat que se'n pugui demostrar és compartida per tots els conjunts que la tenen definida.

3 Generació de vectors

L'estructura d'espai vectorial dona pas a la presentació de vectors a partir d'altres vectors.

- Anomenarem *combinació lineal* dels vectors $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n$, al vector $\lambda_1\vec{v}_1+\lambda_2\vec{v}_2+\cdots+\lambda_n\vec{v}_n$.

Es pot observar que si considerem dos vectors $\vec{u},\vec{v}$ diferents de $\vec{0}$, i de diferent direcció, qualsevol altre vector $\vec{x}$ es pot expressar com a combinació lineal de $\vec{u}$ i $\vec{v}$.



Efectivament, només cal traçar dues rectes, per l'extrem de $\vec{x}$, d'igual direcció que els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$. Aquestes rectes determinen, amb les rectes suport de $\vec{u}$ i $\vec{v}$, un paral·lelogram que indica l'existència de $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tals que $\vec{x}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$.

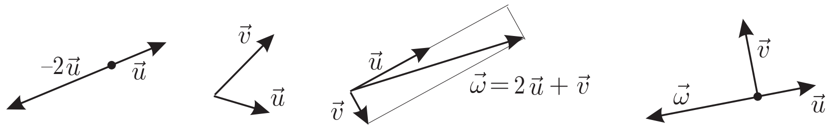
- Direm que els vectors $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n$ són *generadors* del conjunt de vectors del pla, si qualsevol vector del pla es pot expressar com a combinació lineal d'ells.

És immediat establir que dos o més vectors no nuls, tals que com a mínim dos d'ells siguin de diferent direcció, generen els vectors del pla. Un vector diferent de $\vec{0}$ mai pot generar tots els vectors del pla, només genera els vectors amb la seva direcció.

- Quan en un conjunt de vectors $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n$, no n'hi ha cap que es pugui escriure com a combinació lineal dels altres, diem que aquests vectors són *linealment independents*. En cas contrari, es diu que són *linealment dependents*.
- Un conjunt de vectors linealment independents i generadors rep el nom de *base*.

De tot el que hem dit es conclou que dos vectors diferents del $\vec{0}$ i de diferent direcció, són base. També, és immediat que totes les bases estan formades per dos vectors amb aquestes característiques. Això permet definir la *dimensió* de l'espai vectorial de vectors del pla com el nombre de vectors de qualsevol de les seves bases; amb d'altres paraules, el conjunt de vectors del pla té dimensió 2.

Exemple En el gràfic adjunt es presenten les situacions següents:



(a) (b) (c) (d)

(a) Els vectors $\vec{u}$, $\vec{v}$ són linealment dependents i no generadors.

(b) Els vectors $\vec{u}$, $\vec{v}$ són linealment independents i generadors i, per tant, base.

(c) Els vectors $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ són linealment dependents i generadors.

(d) Els vectors $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ són linealment dependents i generadors.

Observem que quan tenim tres o més vectors generadors, —per exemple el cas (d)—, aquest generen la resta de vectors de diferents maneres. Així, si en el cas citat considerem el vector $\vec{x} = 3\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$, aquest es pot presentar amb infinitat de combinacions lineals de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$. Per exemple,

$$\vec{x} = 5\vec{u} + 2\vec{v} + 0\vec{w} = 1\vec{u} + 0\vec{v} + 2\vec{w} = 7\vec{u} + 3\vec{v} - 1\vec{w} = \cdots .$$

• L'expressió de qualsevol vector com a combinació lineal de vectors d'una base és única. Així, donada una base $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, i un vector $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$, els nombres $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ estan determinats i reben el nom de *coordenades* del vector $\vec{x}$ en la base $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$.

Que l'expressió en una base és única és de fàcil demostració. Efectivament, suposem que hi hagués dues expressions pel vector $\vec{x}$,

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2.$$

Llavors,

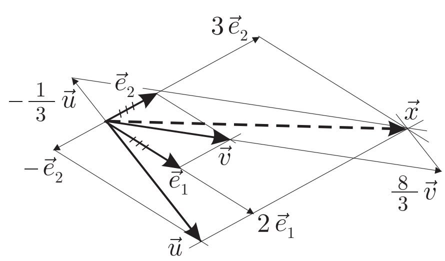
$$(x_1 - y_1)\vec{e}_1 + (x_2 - y_2)\vec{e}_2 = \vec{0}.$$

Això implicaria que $x_1 - y_1 = 0$ i $x_2 - y_2 = 0$, perquè si $x_1 - y_1 \neq 0$ tindríem $\vec{e}_1 = \frac{-x_2+y_2}{x_1-y_1}\,\vec{e}_2$, la qual cosa no pot ser perquè $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ són linealment independents. De la mateixa manera es pot argumentar contra el fet que $x_2 - y_2 \neq 0$. Finalment, tindríem que $x_1 = y_1$ i $x_2 = y_2$, i que les dues expressions de $\vec{x}$ serien iguals.

Exemple Donada la base $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, es tracta de calcular les coordenades de $\vec{x} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$ en la base $\vec{u} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $\vec{v} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$.

Plantejament: $2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 = \vec{x} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.

Resolució:
$$\begin{aligned}
&2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 = \alpha(2\vec{e}_1 - \vec{e}_2) + \beta(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = \\
&= (2\alpha + \beta)\vec{e}_1 + (-\alpha + \beta)\vec{e}_2 \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow \begin{cases} 2 = 2\alpha + \beta \\ 3 = -\alpha + \beta \end{cases} \Longrightarrow 1 = -3\alpha \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{3} \\ \beta = 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3} \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\vec{x} = -\tfrac{1}{3}\vec{u} + \tfrac{8}{3}\vec{v}}.
\end{aligned}$$



• Finalment farem una observació que afectarà a la notació utilitzada en la presentació dels vectors com a combinació lineal dels elements d'una base. Donada la base $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, els vectors $\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2$, $\vec{w} = w_1\vec{e}_1 + w_2\vec{e}_2$ i $\lambda \in \mathbb{R}$, a partir de l'estructura d'espai vectorial podem escriure,

$$\begin{aligned}
\vec{v} + \vec{w} &= (v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2) + (w_1\vec{e}_1 + w_2\vec{e}_2) = (v_1 + w_1)\vec{e}_1 + (v_2 + w_2)\vec{e}_2 \\
\lambda\vec{v} &= \lambda(v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2) = (\lambda v_1)\vec{e}_1 + (\lambda v_2)\vec{e}_2
\end{aligned}$$

Notem que el resultat ha quedat determinat per les operacions entre els coeficients de les combinacions lineals. Llavors, en estar determinat cada vector per aquests coeficients, si fem les identificacions $\vec{v} = (v_1, v_2)$ i $\vec{w} = (w_1, w_2)$ resulta que podem expressar la suma i el producte per un escalar de la manera següent:

$$\begin{aligned} \vec{v} + \vec{w} &= (v_1, v_2) + (w_1, w_2) = (v_1 + w_1, v_2 + w_2) \\ \lambda\vec{v} &= \lambda(v_1, v_2) = (\lambda v_1, \lambda v_2). \end{aligned}$$

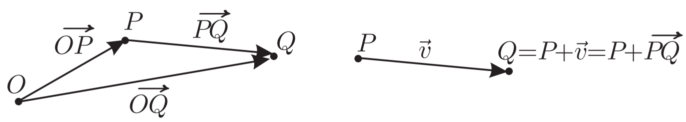
Amb aquesta notació, l'exercici resolt més amunt s'hagués desenvolupat així:

$$\begin{aligned} (2,3) \quad &= \quad \vec{x} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \alpha(2,-1) + \beta(1,1) = (2\alpha + \beta, -\alpha + \beta) \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 = 2\alpha + \beta \\ 3 = -\alpha + \beta \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = -\frac{1}{3} \\ \beta = \frac{8}{3} \end{array} \right. \Longrightarrow \vec{x} = -\tfrac{1}{3}\vec{u} + \tfrac{8}{3}\vec{v}. \end{aligned}$$

4 El pla afí. Sistemes de referència

Donat un punt O del pla qualsevol altre punt X queda determinat pel vector $\overrightarrow{OX}$, de manera que existeix una relació *biunívoca*[2] entre punts del pla i vectors del pla. La biunivocitat de la relació entre vectors i punts permet identificar cada punt X amb el vector $\overrightarrow{OX}$. Llavors, en poder-se relacionar dos punts P i Q del pla mitjançant la suma vectorial $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}$, si utilitzem la identificació anterior podem definir una operació entre punts i vectors de la manera següent:

$$P \in \text{pla i } \vec{v} \in \text{vectors del pla} \Longrightarrow P + \vec{v} = Q \in \text{pla, tal que } \overrightarrow{PQ} = \vec{v}.$$



Aquesta operació proporciona una estructura al pla que s'anomena *pla afí*, i permetrà abordar l'estudi dels problemes d'incidència i paral·lelisme en el pla, després de la introducció dels sistemes de referència afins.

4.1 Sistemes de referència

El fet que, fixat un punt O i una base $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, la posició de qualsevol punt X vingui determinada pel vector $\overrightarrow{OX} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$, en què $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, dóna pas a la definició següent:

Un *sistema de referència* del pla afí és qualsevol conjunt $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ format per un punt O del pla i una base $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$. Qualsevol punt X queda determinat per les coordenades x_1, x_2 del vector $\overrightarrow{OX} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$. Llavors, direm que les *coordenades del punt* X són les coordenades (x_1, x_2) del vector $\overrightarrow{OX}$. El punt O rep el nom d'*origen* de l referència, les rectes que passen per O i tenen la direcció dels vectors de la base reben el nom d'*eixos de coordenades*, *eix d'abscisses* el que té la direcció de $\vec{e}_1$ i *eix d'ordenades* el que té la direcció de $\vec{e}_2$.

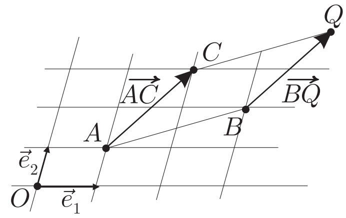
Teorema Si tenim els punts $P(p_1, p_2)$ i $Q(q_1, q_2)$, llavors $\overrightarrow{PQ} = (q_1 - p_1, q_2 - p_2)$.

Efectivament, per la identificació entre $\overrightarrow{OX}$ i X, tenim

$$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} \Longrightarrow \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = Q - P.$$

[2] Cada punt X està relacionat amb un sol vector $\overrightarrow{OX}$, i cada vector $\vec{v}$ està relacionat amb un sol punt X tal que $\vec{v} = \overrightarrow{OX}$.

Exemple Donats els punts $A(1,1)$, $B(3,2)$ i $C(2,3)$ es tracta de trobar les coordenades del vèrtex del paral·lelogram $ABCQ$ tal que Q és el vèrtex oposat al vèrtex A.



Resolució: $Q = B+\overrightarrow{BQ} = B+\overrightarrow{AC} = (3,2)+(2-1,3-1) = (4,4)$.

Teorema El punt mitjà de dos punts $P(p_1,p_2)$ i $Q(q_1,q_2)$ és $M\left(\frac{p_1+q_1}{2}, \frac{p_2+q_2}{2}\right)$.

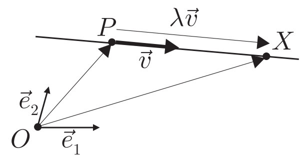
Sigui $M(x,y)$, llavors en ser $\overrightarrow{PM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$,

$$\begin{aligned} M &= P+\overrightarrow{PM} = P+\frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} = (p_1,p_2)+\frac{1}{2}(q_1-p_1, q_2-p_2) = \\ &= \left(\frac{2p_1+q_1-p_1}{2}, \frac{2p_2+q_2-p_2}{2}\right) = \left(\frac{p_1+q_1}{2}, \frac{p_2+q_2}{2}\right). \end{aligned}$$

5 Equacions de la recta en el pla afí

La introducció de sistemes de referència permet presentar, mitjançant el llenguatge algebraic, les rectes com a equacions lineals. Concretament, donats un punt P d'una recta i un vector $\vec{v}$ de la seva direcció, qualsevol punt X de la recta satisfà

$$X = P + \lambda\vec{v}, \quad \text{en què } \lambda \in \mathbb{R}.$$



Aquesta situació també es podria presentar amb l'equació

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda\vec{v}, \quad \text{en què } \lambda \in \mathbb{R},$$

o, en llenguatge de coordenades, si $X=(x,y)$, $P=(p_1,p_2)$ i $\vec{v}=(v_1,v_2)$,

$$(x,y) = (p_1,p_2) + \lambda(v_1,v_2), \quad \text{en què } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Aquestes igualtats constitueixen tres maneres de presentar l'*equació vectorial* de la recta, i $\vec{v}$ s'anomena *vector director* de la recta.

Si efectuem les operacions indicades en aquesta equació en resulten les *equacions paramètriques* de la recta:

$$\left\{\begin{array}{l} x = p_1 + \lambda v_1 \\ y = p_2 + \lambda v_2, \end{array}\right. \quad \text{en què } \lambda \text{ és el paràmetre.}$$

Si aïllem i eliminem el paràmetre obtenim l'*equació contínua* de la recta:

$$\frac{x-p_1}{v_1} = \frac{y-p_2}{v_2}.$$

Si $v_1 \neq 0$, aquesta equació es pot transformar en $y-p_2 = \frac{v_2}{v_1}(x-p_1)$, en què si fem $m = \frac{v_2}{v_1}$ resulta l'*equació punt-pendent*:

$$y - p_2 = m(x-p_1), \quad \text{en què } m \text{ és el pendent.}$$

Si, en l'equació contínua, eliminem els denominadors obtenim $v_2x - v_1y + p_2v_1 - v_2p_1$, la qual presentem abreujadament com

$$Ax + By + C = 0,$$

i anomenem *equació general o implícita.* Si $B \neq 0$ i aïllem la y obtenim l'*equació explícita* $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$, la qual presentem com:

$$y = mx + n.$$

Finalment, si els punts de tall amb els eixos de coordenades són $A(a,0)$ i $B(0,b)$, llavors els punts (x,y) de la recta satisfan

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,$$

la qual anomenem *equació canònica*. Efectivament, podem considerar el vector director $\overrightarrow{AB}=(-a,b)$ i obtenim

$$\frac{x-a}{-a}=\frac{y-0}{b}\iff -\frac{x}{a}+1=\frac{y}{b}\iff \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

- **Observacions:**

– Sigui un sistema de referència tal que $|\vec{e}_1|=|\vec{e}_2|=1$ i $\widehat{\vec{e}_1\vec{e}_2}=90°$. Es immediat comprovar que el pendent m d'una recta coincideix amb $\tan\alpha$, en què α és l'angle d'inclinació de la recta respecte la direcció positiva de l'eix d'abscisses.

– Donada la recta $r: Ax+By+C=0$, dos vectors directors de la recta són $(-B,A)$ i $(B,-A)$.
Efectivament, si $(x_0,y_0)\in r$ llavors $(x_0-B,y_0+A)\in r$, perquè

$$A(x_0-B)+B(y_0+A)+C=Ax_0+By_0+C-AB+BA=Ax_0+By_0+C=0.$$

Això implica que $(-B,A)$ és vector director i, per tant, també ho és $(-1)(-B,A)=(B,-A)$.

– Tres punts P,Q,R estan en línia recta $\iff$ els vectors $\overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{PQ}$ són linealment dependents.
Efectivament,

$$(\Longrightarrow)\quad P,Q,R \text{ alineats} \Longrightarrow \begin{cases} P+\alpha\vec{v}=Q\\ P+\beta\vec{v}=R\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{PQ}=\alpha\vec{v}\\ \overrightarrow{PR}=\beta\vec{v}\end{cases} \Longrightarrow \overrightarrow{PQ}=\frac{\alpha}{\beta}\beta\vec{v}=\frac{\alpha}{\beta}\vec{PR}.$$

$$(\Longleftarrow)\quad \overrightarrow{PR}=\lambda\overrightarrow{PQ}\Longrightarrow\begin{cases}Q=P+\overrightarrow{PQ}\\ R=P+\overrightarrow{PR}=P+\lambda\overrightarrow{PQ}\end{cases}\Longrightarrow P,Q,R \text{ estan alineats.}$$

A partir d'aquest resultat, per verificar si tres punts estan en línia recta, només caldrà comprovar que les coordenades de dos dels vectors que determinen siguin proporcionals. Per exemple, $A(1,3)$, $B(2,1)$ i $C(4,-3)$ estan alineats perquè

$$\begin{cases}\overrightarrow{AC}=(4-1,-3-3)=(3,-6)\\ \overrightarrow{AB}=(2-1,1-3)=(1,-2)\end{cases}\Longrightarrow \overrightarrow{AC}=3(1,-2)=3\overrightarrow{AB}.$$

6 Posicions relatives de dues rectes

Cercarem condicions sobre els coeficients de les equacions implícites de dues rectes que caracteritzin les posicions relatives de dues rectes. Per aconseguir-ho discutirem l'existència de solucions del sistema d'equacions de les dues rectes

$$r_1: a_1x+b_1y+c_1=0 \qquad\qquad r_2: a_2x+b_2y+c_2=0.$$

Utilitzem el mètode de reducció:

$$\begin{array}{lcl} a_1x+b_1y+c_1=0 & \overset{(\times b_2)}{\Longleftrightarrow} & a_1b_2x+b_1b_2y+c_1b_2=0\\ a_2x+b_2y+c_2=0 & \overset{(\times -b_1)}{\Longleftrightarrow} & -a_2b_1x-b_2b_1y-c_2b_1=0\\ \hline & & (a_1b_2-a_2b_1)x \quad = c_2b_1-c_1b_2\end{array}$$

$$
\begin{array}{rcl}
a_1x + b_1y + c_1 = 0 & \overset{(\times a_2)}{\Longleftrightarrow} & a_1a_2x + b_1a_2y + c_1a_2 = 0 \\
a_2x + b_2y + c_2 = 0 & \overset{(\times - a_1)}{\Longleftrightarrow} & -a_2a_1x - b_2a_1y - c_2a_1 = 0 \\
\hline
 & & (b_1a_2 - b_2a_1)y \qquad = c_2a_1 - c_1a_2
\end{array}
$$

Així, hem d'estudiar l'existència de $x, y \in \mathbb{R}$ tals que:

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = c_2b_1 - c_1b_2 \qquad\qquad (a_1b_2 - a_2b_1)y = -c_2a_1 + c_1a_2$$

L'existència d'aquests nombres depèn, en primer lloc, del coeficient $a_1b_2 - a_2b_1$. Casos:

$\boxed{\bullet \quad a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0}$ Existeix solució única i aquesta és

$$x = \frac{c_2b_1 - c_1b_2}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad\qquad y = \frac{-c_2a_1 + c_1a_2}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Per tant, les rectes tenen un sol punt en comú i es diu que són *incidents* o que *es tallen.*

$\boxed{\bullet \quad a_1b_2 - a_2b_1 = 0}$ Es donen dues possibilitats:

$\boxed{\bullet \quad c_2b_1 - c_1b_2 \neq 0 \ \textbf{o} \ -c_2a_1 + c_1a_2 \neq 0}$ No existeixen punts comuns i es diu que les rectes són *paral·leles.*

$\boxed{\bullet \quad c_2b_1 - c_1b_2 = 0 \ \textbf{i} \ -c_2a_1 + c_1a_2 = 0}$ Existeixen infinits punts en comú i es diu que les rectes són *coincidents.*

Si manipulem algebraicament les condicions trobades en resulten les caracteritzacions següents:

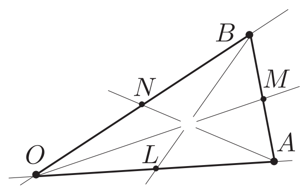
$$
\begin{array}{rcl}
r_1 \text{ i } r_2 \text{ incidents} & \Longleftrightarrow & \dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}. \\
r_1 \text{ i } r_2 \text{ paral·leles} & \Longleftrightarrow & \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}. \\
r_1 \text{ i } r_2 \text{ coincidents} & \Longleftrightarrow & \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}.
\end{array}
$$

Una conseqüència immediata d'aquest resultat és que si dues rectes són paral·leles, els seus vectors directors són linealment dependents, és a dir tenen les coordenades proporcionals. Recíprocament, si tenen les coordenades proporcionals, les rectes poden ser paral·leles o coincidents.

7 Cinc exercicis

Exercici 1: Demostreu que les mitjanes d'un triangle es tallen en un punt.

Sigui un triangle qualsevol OAB, i considerem la referència $\{O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$. En aquesta referència els vèrtexs del triangle tenen les coordenades $O(0,0)$, $A(1,0)$ i $B(0,1)$. Els punts mitjans L, M, N de OA, OB, OC, seran:



$$
\begin{aligned}
L &= O + \overrightarrow{OL} = O + \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} = (0,0) + \frac{1}{2}(1,0) = \left(\frac{1}{2}, 0\right). \\
M &= A + \overrightarrow{AM} = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (1,0) + \frac{1}{2}(-1,1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). \\
N &= O + \overrightarrow{ON} = O + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} = (0,0) + \frac{1}{2}(0,1) = \left(0, \frac{1}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Llavors, les equacions de les mitjanes BL, OM, AN seran:

$$\begin{aligned}
BL\colon \quad & \frac{x-0}{\frac{1}{2}-0}=\frac{y-1}{0-1} \quad && \Longleftrightarrow \quad y=-2x+1 \\
OM\colon \quad & \frac{x-0}{\frac{1}{2}-0}=\frac{y-0}{\frac{1}{2}-0} \quad && \Longleftrightarrow \quad y=x \\
AN\colon \quad & \frac{x-1}{1-0}=\frac{y-0}{0-\frac{1}{2}} \quad && \Longleftrightarrow \quad y=-\tfrac{1}{2}\,x+\tfrac{1}{2}
\end{aligned}$$

Si utilitzem el mètode d'igualació obtenim:
Intersecció de BL i OM: $y=x=-2x+1 \Longleftrightarrow x=y=\frac{1}{3}$.
Intersecció de BL i AN: $y=x=-\frac{1}{2}\,x+\frac{1}{2} \Longleftrightarrow x=y=\frac{1}{3}$.
Per tant les tres rectes es tallen en un mateix punt de coordenades $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

Exercici 2: Trobeu els valors de k tals que les rectes $r: kx+y+1=0$ i $s: x+ky+1=0$ són paral·leles.

$$r,s \text{ paral·leles } \Longleftrightarrow \frac{k}{1}=\frac{1}{k}\neq\frac{1}{1} \Longleftrightarrow k^2-1=0 \text{ i } k\neq 1 \Longleftrightarrow k=-1.$$

Exercici 3: Trobeu l'equació canònica d'una recta paral·lela a $r: 3x-y+2=0$ que passi pel punt $P(1,2)$.

La recta buscada, en ser paral·lela a r, serà del tipus $3x-y+k=0$. A més conté el punt P, per tant $3\cdot 1-2+k=0$. És a dir, $k=-1$. Conseqüentment, la recta té equació $3x-y=1$, i la seva equació canònica és:

$$\frac{x}{1/3}+\frac{y}{-1}=1.$$

Exercici 4: Estudieu pels diferents valors de a, les posicions relatives de $(a^2+4a)x-4y+2a=0$ i $(2a-1)x+(a-3)y+a-1=0$.

$$\frac{a^2+4a}{2a-1}\neq\frac{-4}{a-3} \Longleftrightarrow a^3+a^2-4a-4\neq 0.$$

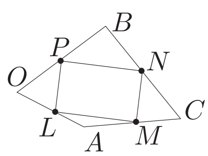
Es pot comprovar que les arrels del polinomi anterior són $a=-1$, $a=2$ i $a=-2$. Per tant, Les rectes es tallen quan $a\neq -1$, $a\neq 2$ i $a\neq -2$. Les rectes seran paral·leles o coincidents en els tres casos citats, per esbrinar-ho haurem de comparar amb la raó $\frac{2a}{a-1}$:

$$\begin{aligned}
a=-1: \quad & \frac{-4}{-1-3}=1=\frac{2\cdot(-1)}{-1-1} \Longleftrightarrow \text{Coincidents} \\
a=2: \quad & \frac{-4}{2-3}=4=\frac{2\cdot 2}{2-1} \Longleftrightarrow \text{Coincidents} \\
a=-2: \quad & \frac{-4}{-2-3}=\frac{4}{5}\neq\frac{4}{3}=\frac{2\cdot(-2)}{-2-1} \Longleftrightarrow \text{Paral·leles}
\end{aligned}$$

Exercici 5: Demostreu que en qualsevol quadrilàter, el polígon que resulta d'unir consecutivament els punts mitjans dels seus costats és un paral·lelogram

En la referència $\{O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\}$ de la figura adjunta tenim $L(\frac{1}{2},0)$, $M(\frac{p+1}{2},\frac{q}{2})$, $N(\frac{p}{2},\frac{q+1}{2})$, $P(0,\frac{1}{2})$. Per tant, $LMNP$ és un paral·lelogram perquè

$$\overrightarrow{PL}=\overrightarrow{NM}=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}) \qquad \text{i} \qquad \overrightarrow{LM}=\overrightarrow{PN}=(\frac{p}{2},-\frac{q}{2})\,.$$



Índex