1. Quin és el nombre mínim de termes de la progressió geomètrica 9, 6, 4, ..., que hem de sumar per obtenir un resultat més gran que 26.999999 ?

Observem que la raó de la progressió és $r = \dfrac{6}{9} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$,.

Si S_n és el valor de la suma de n termes, calcularem per a quin valor de n es compleix que $S_n = 26.999999$. Llavors, si n no és enter, en ser la suma creixent quan n creix, només caldrà aproximar el seu valor a un enter, per excés.

$$S_n = \frac{9 \cdot \left[\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1\right]}{\frac{2}{3} - 1} \implies 27 \cdot \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right] = 26.999999 \implies \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1 - \frac{26.999999}{27} \implies$$
$$\implies \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{0.000001}{27} \implies n = \frac{\log \frac{0.000001}{27}}{\log \frac{2}{3}} \approx 42.202 \implies \boxed{n = 43}.$$

Efectivament, si fem la comprovació, resulta

$$S_{42} \approx 26.9999989147 < 26.999999, \qquad S_{43} = 26.9999992765 > 26.999999.$$

2. Un capital està sotmès a un règim d'interès compost de taxa nominal anual del 8%, amb liquidació d'interessos trimestral.

a) Calculeu la T.A.E.

b) Raoneu si aquest capital dóna més o menys interessos amb una taxa nominal anual del 7.8% amb liquidació d'interessos mensual.

c) Quan la taxa nominal anual és del 7.8%, quants mesos han de passar per tal que un capital de 12000 euros es transformi en un capital de 15000 euros.

a) $\left(1 + \dfrac{0.08}{4}\right)^4 - 1 = 0.08243 \implies \text{T.A.E.} = \boxed{8.24\%}$.

b) Els interessos venen donats per la T.A.E. Llavors, en ser

$$\left(1 + \frac{0.078}{12}\right)^{12} - 1 = 0.0808498 \implies \text{T.A.E.} = 8.08\%,$$

dóna menys interessos amb la taxa nominal del 7.8%.

c) Tenim $C_0 = 12000$ i $C_t = 15000$, en què t és el nombre d'anys d'imposició. Llavors,

$$15000 = 12000 \left(1 + \frac{0.078}{12}\right)^{12t} \implies \frac{5}{4} = 1.0065^{12t} \implies 12t = \frac{\log 1.25}{\log 1.0065} \implies$$
$$\implies t = \frac{\log 1.25}{12 \cdot \log 1.0065} \implies t \approx 2.870102 \text{ anys} \approx$$
$$\approx 2 \text{ anys i } 10.44 \text{ mesos}$$

Per tant, han de passar $\boxed{2 \text{ anys i } 11 \text{ mesos} = 35 \text{ mesos}}$.

3. Hem d'amortitzar un deute de 2000 euros en sis mesos, mitjançant pagaments mensuals. La taxa d'interès anual és del 4%.

a) Quina quantitat pagarem cada mes.

b) Elaboreu el quadre d'amortització.

c) Quin tant per cent del deute hem amortitzat després del quart pagament?

d) Si en el tercer pagament volguéssim liquidar, a més de la mensualitat, tot el deute, quants euros hauríem d'ingressar?

a)

$$a = \frac{D \cdot \frac{i}{n}}{1 - \left(1 + \frac{i}{n}\right)^{-nt}} = \frac{2000 \cdot \frac{0.04}{12}}{1 - \left(1 + \frac{0.04}{12}\right)^{-6}} = \frac{20/3}{1 - (301/300)^{-6}} \approx 337.23 \text{ euros.}$$

b)

Final mes	Pagament mensual	Quota d'interès	Quota d'amortització	Deute amortitzat	Deute pendent
					2000.00
1	337.23	6.67	330.56	330.56	1669.44
2	337.23	5.56	331.67	662.23	1337.77
3	337.23	4.46	332.77	995.00	1005.00
4	337.23	3.35	333.88	1328.88	671.12
5	337.23	2.24	334.99	1663.87	336.13
6	337.23	1.12	336.11	1999.98	0.02

c) A la línia 4 de la taula trobem que s'han amortitzat 1328.88 euros del deute. En resulta el percentatge,

$$\frac{1328.88}{2000} \cdot 100 = \boxed{66.44\%}.$$

d) A la línia 3 de la taula observem que hem d'ingressar la quota mensual corresponent a aquest pagament més el deute pendent que en resulta. Consegüentment, l'ingrés serà de

$$337.23 + 1005 = \boxed{1342.23 \text{ euros}}.$$

4. Resoleu raonadament les qüestions següents:

a) Trobeu el domini de la funció $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+3}} + \sqrt{x+4}$.

b) Trobeu la antiimatge de 12 en la funció $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 10}$.

c) Calculeu raonadament $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, si $f(x) = 3 + x^2 + 4x^3$.

d) Donada la funció $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - x}$, calculeu

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \qquad \text{i} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x)^{1-x}.$$

a) Els punts del domini són els $x \in \mathbb{R}$ tals que $x + 2 > 0$ i $x + 4 \geq 0$. La qual cosa equival a $x > -3$ i $x \geq -4$, és a dir $x > -3$. Per tant,

$$\boxed{\text{Dom } f =]-3, +\infty[}.$$

b)

$$f(x)=12 \iff \sqrt{x^2+3x-10}=12 \iff x^2+3x-10=144 \iff$$

$$\iff x^2+3x-154=0 \iff x=\frac{-3\pm\sqrt{9+616}}{2}=\frac{-3\pm 25}{2}= \begin{cases}\boxed{11}\\ \boxed{-14}\end{cases}.$$

c) $$\lim_{x\to-\infty} 3+x^2+4x^3=\overbrace{\infty-\infty}^{\text{indeter.}}=\lim_{x\to-\infty} x^3\left(\frac{3}{x^3}+\frac{1}{x}+4\right)=-\infty\cdot(0+0+4)=\boxed{-\infty}.$$

d)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-x} &= \overbrace{\infty-\infty}^{\text{indeter.}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}+x}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x}}=\frac{\infty}{\infty}=(\text{indeter.})=\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}+1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}=\frac{0+1}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}}=\boxed{\frac{1}{2}}.\\ \lim_{x\to+\infty} f(x)^{1-x} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{-\infty}=\frac{1}{0.5^{+\infty}}=\frac{1}{0^{+}}=\boxed{+\infty}.\end{aligned}$$

5. Donada la funció $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{2}{x+1} & , x<0\\ \dfrac{x^2+x-2}{x-1} & , x\geq 0\,.\end{cases}$

a) Estudieu, mitjançant el càlcul de límits, els tipus de discontinuïtat que presenta en $x=-1$, $x=0$ i $x=1$.

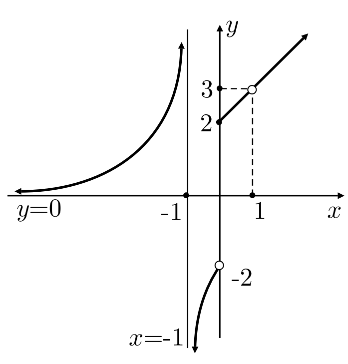
b) Representeu-la gràficament, amb les seves asímptotes.

a) i b) Estudiem els límits en els punts de l'enunciat:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{-2}{x+1}=\dfrac{-2}{0^+}=-\infty.\\ \lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{-2}{x+1}=\dfrac{-2}{0^-}=+\infty.\end{cases}\qquad \begin{cases}\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}=\dfrac{-2}{-1}=2.\\ \lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-2}{x+1}=\dfrac{-2}{1}=-2.\end{cases}$$

$$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x-1}=\frac{0}{0}=(\text{indeter.})=\lim_{x\to1}\frac{(x+2)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+2)=3.$$

Obtenim les discontinuïtats $\begin{cases}\bullet\ \boxed{\text{asimptòtica}}\text{ en } x=-1.\\ \bullet\ \boxed{\text{de salt finit}}\text{ en } x=0.\\ \bullet\ \boxed{\text{evitable}}\text{ en } x=1.\end{cases}$



Per tant, tenim l'asímptota vertical $\boxed{x=-1}$. A més, en ser

$$f(x)=\frac{x^2+x-2}{x-1}=\frac{(x+2)(x-1)}{x-1}=x+2,\ \forall x\geq 0 \text{ i } x\neq 1,$$

obtenim l'asímptota horitzontal mitjançant $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2}{x+1}=\dfrac{-2}{-\infty}=0$. En resulta l'asímptota horitzontal $\boxed{y=0}$ i el gràfic adjunt, —un troç d'hipèrbola i un troç de recta—.