1. Resoleu una de les dues qüestions següents:

a) Demostreu per reducció a l'absurd que $\sqrt{3}$ és un nombre irracional.

b) Esbrineu raonadament si és certa la desigualtat

$$\sqrt{x\,y} \leq \frac{x+y}{2}, \text{ per a qualssevol nombres positius } x, y \in \mathbb{R}.$$

a) Suposem que $\sqrt{3}$ és racional. Llavors,

$$\sqrt{3} = \frac{p}{q}, \text{ tal que } p \in \mathbb{Z} \text{ i } q \in \mathbb{Z} - \{0\} \text{ i } \operatorname{mcd}(p,q) = 1.$$

D'aquí obtenim $p^2 = 3q^2 \Longrightarrow p = 3 \cdot t, t \in \mathbb{Z} \Longrightarrow 9t^2 = 3q^2 \Longrightarrow 3t^2 = q^2 \Longrightarrow q = 3 \cdot s \Longrightarrow$ $\operatorname{mcd}(p,q) \geq 3$. Això es contradiu amb que $\operatorname{mcd}(p,q) = 1$ i, per tant, el punt de partida és fals. Conseguentment, $\sqrt{3}$ és racional.

b) Recordem que treballem amb la condició $x, y \geq 0$. Es compleix,

$$\begin{aligned}\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} &\iff xy \leq \frac{(x+y)^2}{4} \iff 4xy \leq x^2 + y^2 + 2xy \iff \\ &\iff 0 \leq x^2 + y^2 - 2xy \iff 0 \leq (x-y)^2.\end{aligned}$$

En ser la última desigualtat certa i equivalent a l'enunciat, aquest és cert.

2. Simplifiqueu i racionalitzeu quan calgui (sense utilitzar els nombres decimals):

$$\frac{5\sqrt{44} - 2\sqrt{1331} - \sqrt{275}}{\sqrt{77}}, \qquad \frac{\sqrt{x^3\,\sqrt[3]{y^{-7}}\,\sqrt[4]{x\,\sqrt{y^3}}}}{\sqrt[3]{x\,y^{11}}}, \qquad \frac{2+\sqrt{6}}{2-\sqrt{6}}.$$

$$\begin{aligned}\frac{5\sqrt{44} - 2\sqrt{1331} - \sqrt{275}}{\sqrt{77}} &= \frac{5 \cdot 2\sqrt{11} - 2 \cdot 11\sqrt{11} - 5\sqrt{11}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{11}} = \frac{(10 - 22 - 5)\sqrt{11}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{11}} = \\ &= \frac{-17}{\sqrt{7}} = -\frac{17}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \boxed{-\frac{17\sqrt{7}}{7}}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x^3\,\sqrt[3]{y^{-7}}\,\sqrt[4]{x\,\sqrt{y^3}}}}{\sqrt[3]{x\,y^{11}}} &= x^{\frac{3}{2}+\frac{1}{4}-\frac{5}{4}-\frac{1}{3}} \cdot y^{-\frac{7}{6}+\frac{3}{8}-\frac{11}{3}} = x^{\frac{17}{12}} \cdot y^{-\frac{107}{24}} = \\ &= \frac{\sqrt[12]{x^{17}}}{\sqrt[24]{y^{107}}} \cdot \frac{\sqrt[24]{y^{13}}}{\sqrt[24]{y^{13}}} = \frac{x\,\sqrt[12]{x^5}\,\sqrt[24]{y^{13}}}{y^5} = \boxed{\frac{x\,\sqrt[24]{x^{10}\,y^{13}}}{y^5}}.\end{aligned}$$

$$\frac{2+\sqrt{6}}{2-\sqrt{6}} = \frac{2+\sqrt{6}}{2-\sqrt{6}} \cdot \frac{2+\sqrt{6}}{2+\sqrt{6}} = \frac{(2+\sqrt{6})^2}{4-6} = \frac{4+6+4\sqrt{6}}{-2} = \boxed{-5-2\sqrt{6}}.$$

3. Trobeu sense calculadora i presenteu en forma de fracció irreductible, els valors de

a) $16^{-\frac{3}{2}}$ b) $0.0025^{-1.5}$ c) $16^{0.25}$

$16^{-\frac{3}{2}} = \left(2^4\right)^{-\frac{3}{2}} = 2^{4\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)} = 2^{-6} = \frac{1}{2^6} = \boxed{\frac{1}{64}}$.

$$0.0025^{-1.5} = \left(\frac{25}{10000}\right)^{-1.5} == \left(\left(\frac{5}{100}\right)^2\right)^{-1.5} = \left(\frac{1}{20}\right)^{-3} = 20^3 = \boxed{8000}.$$

$16^{0.25} = \left(2^4\right)^{0.25} = 2^{4\cdot 0.25} = 2^1 = \boxed{2}$.

4. Resoleu:

a) $15x^4 + 11x^3 + 2x^2 = 0$ b) $\begin{cases} 9x + 6y = 4 \\ 18xy \;= 1 \end{cases}$

a) $15x^4 + 11x^3 + 2x^2 = 0 \iff x^2(15x^2 + 11x + 2) = 0 \iff x^2 = 0$ o $15x^2 + 11x + 2 = 0$. O sigui que una solució és $\boxed{x = 0}$, i les altres

$$15x^2 + 11x + 2 = 0 \iff x = \frac{-11 \pm \sqrt{121 - 120}}{30} = \frac{-11 \pm 1}{30} = \begin{cases} \boxed{-\frac{1}{3}} \\ \boxed{-\frac{2}{5}} \end{cases}$$

b) $$\left.\begin{array}{rl} y &= \dfrac{4 - 9x}{6} \\ 18xy = & 1 \end{array}\right\} \iff 18x \cdot \frac{4 - 9x}{6} = 1 \iff 27x^2 - 12x - +1 = 0 \iff$$

$$\iff x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 27}}{27} \iff$$

$$\iff x = \frac{6 \pm 3}{27} = \boxed{\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{3} \Longrightarrow y = \dfrac{1}{6} \\ x = \dfrac{1}{9} \Longrightarrow y = \dfrac{1}{2}. \end{array}}$$

5. En un torneig d'escacs cada jugador juga una i només una partida amb cadascun dels seus contrincants. Es rep una targeta verda, groga o vermella respectivament, segons es guanyi, empati o perdi una partida. Un cop acabat el torneig s'han repartit 1110 targetes verdes, 1110 de vermelles i 1202 de grogues entre tots els jugadors. Quants jugadors participaven en el torneig?

Sigui x el nombre de jugadors. Llavors, el nombre de partides és $\dfrac{x(x-1)}{2}$. En haver-se jugat $1110 + \dfrac{1202}{2} = 1711$ partides, tenim

$$\frac{x(x-1)}{2} = 1711 \Longrightarrow x^2 - x - 3422 = 0 \iff x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 13688}}{2} = \frac{1 \pm 117}{2} = \begin{cases} 59 \\ -58\,. \end{cases}$$

Per tant, participaven $\boxed{\text{59 jugadors}}$.