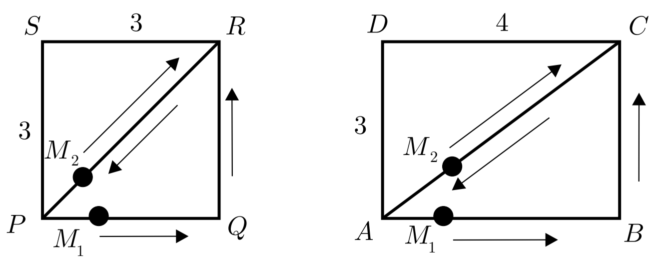
IES Pons d'Icart
MATEMÀTIQUES – 1R BAT C — 21/X/2003
Nombres i equacions — 1.5+3+1.5+2.6+1.4

1. Resoleu una de les dues qüestions següents:

a) Demostreu que la fracció de numerador racional i denominador no nul racional, és un nombre racional i que el producte d'un nombre racional diferent de zero, per un nombre irracional és un nombre irracional.

b) Un punt M_1 dóna voltes sobre el perímetre d'un quadrat $PQRS$. Un punt M_2 es mou sobre la diagonal d'aquest quadrat en trajectes d'anada i tornada. Els dos punts porten la mateixa velocitat constant i surten al mateix temps de P. Esbrineu raonadament si es trobaran alguna vegada en el vèrtex R. I si es moguessin de la mateixa manera sobre el rectangle $ABCD$, sortint de A, es trobarien alguna vegada sobre el vèrtex C?



a) La primera demostració serà directa i la segona per reducció a l'absurd.

- Siguin $\dfrac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ i $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, tals que $s, p, q \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Llavors,

$$\frac{r/s}{p/q} = \frac{r \cdot q}{p \cdot s}\,, \text{ tals que } r \cdot q \in \mathbb{Z} \text{ i } p \cdot s \in \mathbb{Z} - \{0\} \Longrightarrow \frac{r/s}{p/q} \in \mathbb{Q}\,.$$

- Siguin $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ i $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, tal que $p, q \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Suposem que $a \cdot \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$; llavors tindríem

$$a \cdot \frac{p}{q} = \frac{r}{s}\,, \text{ en què } r \in \mathbb{Z}, s \in \mathbb{Z} - \{0\} \Longrightarrow a = \frac{r/s}{p/q} = \frac{r \cdot q}{p \cdot s} \text{ i } p \cdot s \neq 0.$$

O sigui que a es podria presentar com una fracció d'enters amb denominador diferent de zero. Això és una contradicció amb el fet que a és irracional. Per tant, $a \cdot \dfrac{p}{q} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

b) La diagonal del quadrat mesura $\sqrt{18}$. Si es trobessin sobre el vèrtex R del quadrat, els punts M_1 i M_2 haurien recorregut $6(2p-1)$ i $(2n-1)\sqrt{18}$ unitats de longitud respectivament, en què $n, p \in \mathbb{N}$. Llavors, si v és la velocitat, en ser el temps que portessin corrent igual per als dos, s'obtindria

$$\frac{(2n-1)\,3\sqrt{2}}{v} = \frac{6(2p-1)}{v} \Longleftrightarrow \sqrt{2} = \frac{12p-6}{6n-3} \in \mathbb{Q}\,.$$

Però $\sqrt{2}$ és irracional. Per tant, això no pot ser i no es troben mai sobre el vèrtex R del quadrat.

En el cas del rectangle, la diagonal mesura 5. Si es trobessin sobre el vèrtex C del rectangle, els punts M_1 i M_2 haurien recorregut $7(2p-1)$ i $5(2n-1)$ unitats de longitud respectivament, en què $n, p \in \mathbb{N}$. Llavors, si v és la velocitat, s'obtindria

$$\frac{5(2n-1)}{v} = \frac{7(2p-1)}{v} \iff 7p - 5n = 1 \iff p = \frac{1+5n}{7}\,.$$

Temptegem valors de n, i el primer que dóna $p \in \mathbb{Z}$ és $n = 4, p = 3$. És a dir, després que M_1 hagi recorregut dues voltes i mitja i M_2 hagi recorregut set diagonals es trobaran a C.

2. Simplifiqueu i racionalitzeu quan calgui (sense utilitzar els nombres decimals):

$$\frac{4\sqrt{28}+2\sqrt{343}-\sqrt{175}}{\sqrt{77}}, \qquad \frac{\sqrt[3]{a^2\sqrt{a\,b^{-3}}}\,\sqrt[4]{a^5\,b^2}}{\sqrt[4]{a^{13}b^5}}, \qquad \frac{2\sqrt{6}}{3+\sqrt{3}}\,.$$

$$\frac{4\sqrt{28}+2\sqrt{343}-\sqrt{175}}{\sqrt{77}} = \frac{4\cdot 2\sqrt{7}+2\cdot 7\sqrt{7}-5\sqrt{7}}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{11}} = \frac{(8+14-5)\sqrt{7}}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{11}} =$$

$$= \frac{17}{\sqrt{11}} = \frac{17}{\sqrt{11}}\cdot\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{11}} = \boxed{\frac{17\sqrt{11}}{11}}\,.$$

$$\frac{\sqrt[3]{a^2\sqrt{a\,b^{-3}}}\,\sqrt[4]{a^5\,b^2}}{\sqrt[4]{a^{13}b^5}} = a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{5}{4}-\frac{13}{4}}\cdot b^{-\frac{3}{6}+\frac{2}{4}-\frac{5}{4}} = a^{-\frac{14}{12}}\cdot b^{-\frac{15}{12}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[12]{a^{14}\cdot b^{15}}}\cdot\frac{\sqrt[12]{a^{10}\cdot b^9}}{\sqrt[12]{a^{10}\cdot b^9}} = \boxed{\frac{\sqrt[12]{a^{10}\,b^9}}{a^2\,b^2}}\,.$$

$$\frac{2\sqrt{6}}{3+\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}(3-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})} = \frac{6\sqrt{6}-6\sqrt{2}}{9-3} = \frac{6(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{6} = \boxed{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\,.$$

3. Trobeu, sense calculadora el valor de

a) $9^{\frac{3}{2}}$ b) $0.015625^{-\frac{1}{3}}$ c) $9^{-0.5}$

$9^{\frac{3}{2}} = \left(3^2\right)^{\frac{3}{2}} = 3^{2\cdot\frac{3}{2}} = 3^3 = \boxed{27}\,.$

$$0.015625^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{15625}{100000}\right)^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{5^6}{10^6}\right)^{-\frac{1}{3}} = \left(\left(\frac{5}{10}\right)^6\right)^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 2^2 = \boxed{4}\,.$$

$9^{-0.5} = \left(3^2\right)^{-0.5} = 3^{2\cdot(-0.5)} = 3^{-1} = \boxed{\frac{1}{3}}\,.$

4. Resoleu:

a) $2x^4 - 23x^2 + 45 = 0$ b) $\begin{cases} 4x^2 - 5y^2 = 1 \\ 2x + 3y = 3 \end{cases}$

a) Considerem $x^2 = z$. Llavors $x^4 = z^2$ i, per tant,

$$2z^2 - 23z + 45 = 0 \iff z = \frac{23 \pm \sqrt{529 - 360}}{4} = \frac{23 \pm 13}{4} = \left\langle \begin{array}{l} 9 \\ \dfrac{5}{2} \end{array} \right. \iff$$

$$\iff x = \left\langle \begin{array}{l} \boxed{\pm 3} \\ \pm\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \boxed{\pm\dfrac{\sqrt{10}}{2}} \end{array} \right. .$$

b) $$\left.\begin{array}{r} 4x^2 - 5y^2 = 1 \\ y = \dfrac{3 - 2x}{3} \end{array}\right\} \iff 4x^2 - \frac{45 + 20x^2 - 60x}{9} = 1 \iff 16x^2 + 60x - 54 = 0 \iff$$

$$\iff x = \frac{-30 \pm \sqrt{900 + 864}}{16} \iff$$

$$\iff x = \frac{-30 \pm 42}{16} = \left\langle \boxed{\begin{array}{l} x = \dfrac{3}{4} \implies y = \dfrac{1}{2} \\ x = -\dfrac{9}{2} \implies y = 4\,. \end{array}} \right.$$

5. Si sumem cinc unitats a un nombre, l'arrel quadrada positiva del nombre resultant és igual l'arrel quadrada del nombre inicial, augmentada en dues unitats. Trobeu el nombre inicial.

Sigui x el nombre inicial. Llavors,

$$\sqrt{x+5} = 2 + \sqrt{x} \implies x + 5 = 4 + x + 4\sqrt{x} \implies 1 = 4\sqrt{x} \implies \sqrt{x} = \frac{1}{4} \implies \boxed{x = \frac{1}{16}}.$$

Comprovació:

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{\dfrac{1}{16} + 5} = \sqrt{\dfrac{81}{16}} = \dfrac{9}{4} \\ 2 + \sqrt{\dfrac{1}{16}} = 2 + \dfrac{1}{4} = \dfrac{9}{4} \end{array}\right\} \iff \text{La solució } x = \frac{1}{16} \text{ és bona.}$$