IES Pons d'Icart
MATEMÀTIQUES – 1R BAT C 21/XI/2003
Nombres, equacions i polinomis 2+(0.5+0.75+0.75)+3+0.5+1.5

1. Resoleu una de les dues qüestions següents:

a) Demostreu que si $a \neq 0$, $b \neq 0$ i $a \neq -b$ llavors, $\sqrt[3]{a+b} \neq \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$.

b) Enuncieu i demostreu el teorema del residu. Expliqueu, també, el seu funcionament sobre un exemple concret i de quina manera s'utilitza per trobar arrels d'un polinomi.

a) Actuarem cercant una cadena d'equivalències que ens portin a la condició de l'enunciat.

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{a+b} \neq \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} &\iff a+b \neq a + 3\sqrt[3]{a^2b} + 3\sqrt[3]{ab^2} + b \iff 3\sqrt[3]{a^2b} + 3\sqrt[3]{ab^2} \neq 0 \iff \\ &\iff \sqrt[3]{ab}\left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}\right) \neq 0 \iff \sqrt[3]{ab} \neq 0 \text{ i } \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} \neq 0 \iff \\ &\iff a \neq 0 \text{ i } b \neq 0 \text{ i } \sqrt[3]{a} \neq -\sqrt[3]{b} \iff a \neq 0 \text{ i } b \neq 0 \text{ i } a \neq -b\end{aligned}$$

b) Teorema del residu:

> El residu r de la divisió entre el polinomi $p(x)$ i el polinomi $x-a$ és igual al valor numèric $p(a)$ que resulta de considerar $x=a$ en el polinomi $p(x)$.

Demostració: Siguin $q(x)$ el quocient de la divisió i r el seu residu. Llavors,

$$\begin{aligned}p(x) = (x-a)\cdot q(x) + r &\implies p(a) = (a-a)\cdot q(a) + r = 0 \cdot q(a) + r = 0 + r \implies \\ &\implies p(a) = r.\end{aligned}$$

Les arrels d'un polinomi $p(x)$ són els nombres a tals que $p(a)=0$. Per trobar-les es poden assajar divisions entre $p(x)$ i $x-a$ de manera que el residu $p(a)$ sigui 0. Els candidats enters a ser arrels són els divisors dels termes de grau 0 de $p(x)$. Els candidats racionals són les fraccions tals que el numerador és divisor del terme de grau 0 de $p(x)$ i el denominador és divisor del terme de major grau de $p(x)$.

2. Simplifiqueu i racionalitzeu quan calgui (sense utilitzar els nombres decimals ni la calculadora):

$$\text{a)}\left(\sqrt[3]{0,008}\right)^{-5} \qquad \text{b)}\frac{\sqrt[6]{a^{11}}\,\sqrt{b^5}}{\sqrt[4]{a^5b^3}} \qquad \text{c)}\sqrt{396} + \sqrt{\frac{36}{11}} - \frac{2\sqrt{99}}{18}$$

a) $\left(\sqrt[3]{0,008}\right)^{-5} = \left(\dfrac{8}{1000}\right)^{-\frac{5}{3}} = \left(\left(\dfrac{10}{2}\right)^3\right)^{\frac{5}{3}} = 5^5 = \boxed{3125}$.

b) $\dfrac{\sqrt[6]{a^{11}}\,\sqrt{b^5}}{\sqrt[4]{a^5b^3}} = a^{\frac{11}{6}-\frac{5}{4}} \cdot b^{\frac{5}{2}-\frac{3}{4}} = a^{\frac{22-15}{12}} \cdot b^{\frac{10-3}{4}} = a^{\frac{7}{12}} \cdot b^{\frac{7}{4}} = \sqrt[12]{a^7}\,\sqrt[4]{b^7} = \sqrt[12]{a^7\,b^{21}} = \boxed{b\,\sqrt[12]{a^7\,b^9}}$.

c) $\sqrt{396}+\sqrt{\dfrac{36}{11}}-\dfrac{2\sqrt{99}}{18}=6\sqrt{11}+\dfrac{6}{\sqrt{11}}-\dfrac{6\sqrt{11}}{18}=\left(6+\dfrac{6}{11}-\dfrac{1}{3}\right)\sqrt{11}$

$$=\frac{198+18-11}{33}\sqrt{11}=\boxed{\frac{205\sqrt{11}}{33}}.$$

> **3.** Donat el polinomi $p(x)=x^3+2x^2-5x-6$,
>
> a) Trobeu les seves arrels i la seva descomposició factorial.
>
> b) Resoleu la inequació $p(x)\geq 0$, amb l'ajut dels gràfics de rectes i/o paràboles.
>
> c) Simplifiqueu $\dfrac{3x}{x^2-x-2}+\dfrac{6}{p(x)}$.

a) Apliquem la regla de Ruffini, per trobar una arrel i els primers factors. Recordem que els candidats enters a ser arrels de $p(x)$ són els divisors del terme independent -6 d'aquest polinomi.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -5 & -6 \\ -1 & & -1 & -1 & 6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

Una arrel del polinomi és $x=-1$ i una primera descomposició és

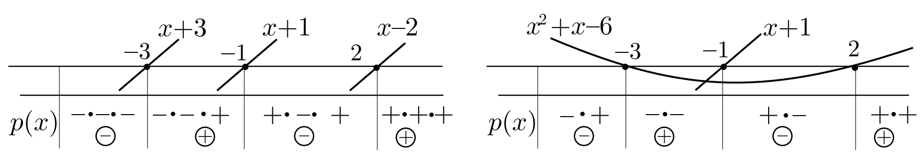
$$p(x)=(x+1)(x^2+x-6).$$

Cerquem les arrels del segon factor, la qual cosa permetrà donar la descomposició final:

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{-1\pm 5}{2}=\left.\begin{array}{l} \nearrow\ 2 \\ \searrow\ -3 \end{array}\right\}\Longrightarrow x^2+x-6=(x-2)(x+3).$$

Consegüentment, $\boxed{\text{Arrels: } -3,-1,2}$ i $\boxed{p(x)=(x+1)(x-2)(x+3)}$.

b) Presentem l'estudi del signe mitjançant l'estudi dels tres factors per separat i, alternativament, dels dos factors de la primera descomposició:



D'aquí en resulta $p(x)\geq 0 \Longleftrightarrow -3\leq x\leq -1$ o $x\geq 2$, és a dir

$$\boxed{x\in[-3,-1]\cup[2,+\infty[}$$

c) Cerquem les arrels de x^2-x-2 i obtindrem la seva descomposició:

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}=\left.\begin{array}{l} \nearrow\ 2 \\ \searrow\ -1 \end{array}\right\}\Longrightarrow x^2-x-2=(x-2)(x+1).$$

Per tant,

$$\text{m.c.m.}\left(x^2-x-2,p(x)\right)=p(x)=(x+1)(x-2)(x+3).$$

Conseqüentment,

$$\begin{aligned}\frac{3x}{x^2-x-2}+\frac{6}{p(x)} &= \frac{3x(x+3)+6}{(x+1)(x-2)(x+3)} = \frac{3x^2+9x+6}{(x+1)(x-2)(x+3)} \overset{(*)}{=} \\ &= \frac{3(x+1)(x+2)}{(x+1)(x-2)(x+3)} = \frac{3(x+2)}{(x-2)(x+3)} = \boxed{\frac{3x+6}{x^2+x-6}}.\end{aligned}$$

$(*)$ $3x^2+9x+6=0 \Longleftrightarrow x^2+3x+2=0 \Longleftrightarrow x=\dfrac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\dfrac{-3\pm 1}{2}= \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases}$

4. Sigui $p(x)=x^3-ax^2+5x+a$. Justifiqueu que el residu de la divisió de $p(x)$ entre $x-1$ no depèn del valor de a.

No depèn de a perquè el residu de la divisió és un valor constant que no depèn de a. Efectivament,

$$\text{residu} = 1^3-a\cdot 1^2+5\cdot 1+a = 1-a+5-a = 6.$$

5. Completeu la fórmula del desenvolupament de la potència d'un binomi.

$$(a+b)^n = \sum_{k=\square}^{\square}\binom{\square}{\square} a^{\square}\cdot b^{\square}$$

Apliqueu-la a trobar el desenvolupament de $(2+x)^5$.

$$\boxed{(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^{n-k}\cdot b^k}.$$

$$\begin{aligned}(2+x)^5 &= \binom{5}{0}2^5+\binom{5}{1}2^4x+\binom{5}{2}2^3x^2+\binom{5}{3}2^2x^3+\binom{5}{4}2x^4+\binom{5}{5}x^5= \\ &= 32+\frac{5}{1}\cdot 16x+\frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}\cdot 8x^2+\frac{5\cdot 4\cdot 3}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot 4x^3+\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\cdot 2x^4+x^5= \\ &= \boxed{32+80x+80x^2+40x^3+10x^4+x^5}\end{aligned}$$