IES Pons d'Icart

MATEMÀTIQUES – 1R BAT D 8/I/2004

Recuperació 1a. Avaluació (0.5+0.75+0.75)+2+2+1+1.5+1.5

---

1. Simplifiqueu i racionalitzeu quan calgui (sense utilitzar els nombres decimals ni la calculadora):

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[6]{0.08\cdot 10^{-10}}}$ b) $\dfrac{b^2\,\sqrt{a^{11}}\ \sqrt[10]{a^{21}\,b^7}}{\sqrt[14]{a^{11}b^{31}}}$ c) $\sqrt{\dfrac{144}{108}}+2\sqrt{27}-\dfrac{\sqrt{432}}{27}$

a) $$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[6]{0.08\cdot 10^{-10}}}=\sqrt[6]{\frac{2^3}{2^3\cdot 10^{-2}\cdot 10^{-10}}}=\frac{1}{\sqrt[6]{10^{-12}}}=\frac{1}{10^{-2}}=10^2=\boxed{100}.$$

b) $$\frac{b^2\,\sqrt{a^{11}}\ \sqrt[10]{a^{21}\,b^7}}{\sqrt[14]{a^{11}b^{31}}}==a^{\frac{11}{2}+\frac{21}{10}-\frac{11}{14}}\cdot b^{2+\frac{7}{10}-\frac{31}{14}}=a^{\frac{385+147-55}{70}}\cdot b^{\frac{140+49-155}{70}}=$$
$$=a^{\frac{477}{70}}\cdot b^{\frac{34}{70}}=\sqrt[70]{a^{477}\,b^{34}}=\boxed{a^6\,\sqrt[70]{a^{57}\,b^{34}}}.$$

c) $$\sqrt{\frac{144}{108}}+2\sqrt{27}-\frac{\sqrt{432}}{27}=\frac{12}{6\sqrt{3}}+6\sqrt{3}-\frac{12\sqrt{3}}{27}=\left(\frac{2}{3}+6-\frac{4}{9}\right)\sqrt{3}$$
$$=\frac{6+54-4}{9}\sqrt{3}=\boxed{\frac{56\sqrt{3}}{9}}.$$

2. Donat el polinomi $p(x)=x^4+5x^2-36$,

a) Trobeu les seves arrels i la seva descomposició factorial.

b) Resoleu la inequació $p(x)\le 0$, amb l'ajut dels gràfics de rectes i/o paràboles.

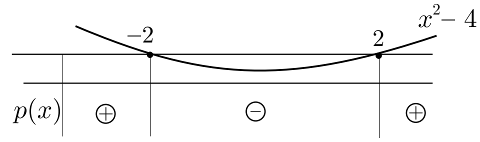
a) Cerquem les arrels de $p(x)$, resolent l'equació biquadrada $p(x)=0$:

$$x^2=\frac{-5\pm\sqrt{25+144}}{2}=\frac{-5\pm 13}{2}=\left.\begin{matrix}\nearrow\ 4\\ \searrow\ -9\end{matrix}\right\}\Longrightarrow p(x)=(x^2-4)(x^2+9).$$

En ser $x^2-4=(x-2)(x+2)$ i $x^2+9>0$, obtenim

$$\boxed{p(x)=(x-2)(x+2)(x^2+9)}\quad \text{i}\quad \boxed{\text{Arrels: } 2,-2}.$$

b) En ser $x^2 + 9 > 0$, només cal efectuar l'estudi de $x^2 - 4 \le 0$:



D'aquí en resulta $\quad p(x) \le 0 \Longleftrightarrow -2 \le x \le 2$, és a dir $\boxed{x \in [-2, 2]}$.

3. Sigui $a \neq 0$. Cerqueu raonadament, en cada cas, els valors de $n \in \mathbb{N}$ per als quals és certa l'afirmació que es proposa:

a) $x - a$ és divisor de $x^n + a^n$.

b) $x + a$ és divisor de $x^n + a^n$.

c) $x - a$ és divisor de $x^n - a^n$.

d) $x + a$ és divisor de $x^n - a^n$.

Aplicarem, en cadascun dels apartats, el teorema del residu. D'aquesta manera esbrinarem si el valor del residu és o no és igual a zero.

a) $x = a \Longrightarrow x^n + a^n = a^n + a^n = 2a^n \neq 0, \ \forall n.$
Per tant, no existeix cap valor de n per al qual $x - a$ sigui divisor de $x^n + a^n$.

b) $x = -a \Longrightarrow x^n + a^n = (-a)^n + a^n = \begin{cases} a^n + a^n = 2a^n \neq 0, & \text{si } n \text{ és parell} \\ -a^n + a^n = 0, & \text{si } n \text{ és senar.} \end{cases}$

Per tant, $x + a$ és divisor de $x^n + a^n$ per a qualsevol n senar.

c) $x = a \Longrightarrow x^n - a^n = a^n - a^n = 0, \ \forall n.$
Per tant, $x - a$ és divisor de $x^n - a^n$ per a qualsevol valor de n.

d) $x = -a \Longrightarrow x^n - a^n = (-a)^n - a^n = \begin{cases} a^n - a^n = 0, & \text{si } n \text{ és parell} \\ -a^n - a^n = -2a^n \neq 0, & \text{si } n \text{ és senar.} \end{cases}$

Per tant, $x + a$ és divisor de $x^n - a^n$ per a qualsevol n parell.

4. Simplifiqueu l'expressió $\qquad \dfrac{5x^3}{x^2 - 2x} - \dfrac{16x^2 + 8x}{x^2 - 4} - \dfrac{2x^2 - 2x}{x + 2}.$

Observem que $\dfrac{5x^3}{x^2 - 2x} = \dfrac{5x^2}{x - 2}$. Llavors, en ser $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$, tenim

$$\text{m.c.m.}\big(x - 2, x^2 - 4, x + 2\big) = (x - 2)(x + 2) = x^2 - 4.$$

Conseqüentment,

$$\frac{5x^2}{x-2}-\frac{16x^2+8x}{x^2-4}-\frac{2x^2-2x}{x+2} = \frac{5x^3+10x^2-16x^2-8x-2x^3+6x^2-4x}{(x-2)(x+2)} =$$
$$= \frac{3x^3-12x}{(x-2)(x+2)} = \frac{3x(x^2-4)}{(x-2)(x+2)} = \boxed{3x}.$$

5. Esbrineu si existeix algun terme de grau cinc en el desenvolupament del binomi

$$\left(\frac{1}{x^5}+x^4\right)^{19}.$$

En cas afirmatiu, digueu el lloc que ocupa i quin és el seu valor.

Cerquem l'expressió general del terme que ocupa el lloc $p+1$, per tal d'imposar-li la condició que sigui de grau 5.

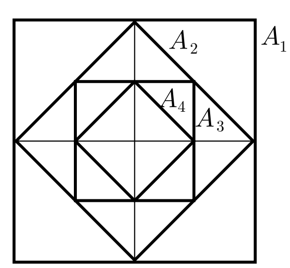
$$T_{p+1} = \binom{19}{p}\frac{1}{(x^5)^{19-p}}\cdot x^{4p} = \binom{19}{p}x^{4p-95+5p} = \binom{19}{p}x^{9p-95}.$$

Llavors, $9p-95=5 \Longrightarrow p=\dfrac{100}{9}$. Per tant, en no ser p un nombre natural, no existeix cap terme de grau 5.

6. En un quadrat de costat 2 cm inscrivim un altre quadrat de vèrtexs els punts mitjans dels costats del primer quadrat. Considerem aquesta operació repetida sobre el segon quadrat, després sobre el tercer i sobre cadascun dels successius quadrats resultants. Calculeu la suma de les àrees de la successió d'infinits quadrats considerats.

En la figura adjunta observem que la successió d'àrees $A_1, A_2, A_3, \ldots$, és una progressió geomètrica en què

$$A_1 = 2^2 = 4,\ A_n = \frac{1}{2}\cdot A_{n-1}.$$



Per tant: $\quad \text{Suma} = \dfrac{A_1}{1-\text{raó}} = \dfrac{4}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{4}{\frac{1}{2}} = \boxed{8}.$