1. Simplifiqueu i racionalitzeu quan calgui (sense utilitzar els nombres decimals ni la calculadora):

a) $\dfrac{1}{\sqrt[8]{25.6\cdot 10^{-7}}}$ b) $\dfrac{\sqrt[5]{a^{11}\,b}\ \sqrt[12]{b^{-3}\,a^{3}}}{\sqrt[15]{a^{39}b^{3}}}$ c) $\sqrt{\dfrac{25}{24}}+\sqrt{216}-\dfrac{5\sqrt{150}}{10}$

a) $\dfrac{1}{\sqrt[8]{25.6\cdot 10^{-7}}}=(256\cdot 10^{-8})^{-\frac{1}{8}}=(2^8\cdot 10^{-8})^{-\frac{1}{8}}=2^{-1}\cdot 10=\dfrac{10}{2}=\boxed{5}.$

b) $\dfrac{\sqrt[5]{a^{11}\,b}\ \sqrt[12]{b^{-3}\,a^{3}}}{\sqrt[15]{a^{39}b^{3}}}==a^{\frac{11}{5}+\frac{3}{12}-\frac{39}{15}}\cdot b^{\frac{1}{5}-\frac{3}{12}-\frac{3}{15}}=a^{\frac{132+15-156}{60}}\cdot b^{\frac{112-15-12}{60}}=$

$$=a^{-\frac{9}{60}}\cdot b^{-\frac{15}{60}}=a^{-\frac{3}{20}}\cdot b^{-\frac{5}{20}}=\frac{1}{\sqrt[20]{a^3\,b^5}}\cdot\frac{\sqrt[20]{a^{17}\,b^{15}}}{\sqrt[20]{a^{17}\,b^{15}}}=\boxed{\frac{\sqrt[20]{a^{17}\,b^{15}}}{a\,b}}.$$

c) $\sqrt{\dfrac{25}{24}}+\sqrt{216}-\dfrac{5\sqrt{150}}{10}=\dfrac{5}{2\sqrt{6}}+6\sqrt{6}-\dfrac{25\sqrt{6}}{10}=\left(\dfrac{5}{12}+6-\dfrac{5}{2}\right)\sqrt{6}=$

$$=\frac{5+72-30}{12}\sqrt{6}=\boxed{\frac{47\sqrt{6}}{12}}.$$

2. Donat el polinomi $p(x)=3x^3-4x^2-76x-48$,

a) Trobeu les seves arrels i la seva descomposició factorial.
b) Resoleu la inequació $p(x)<0$, amb l'ajut dels gràfics de rectes i/o paràboles.

Apliquem la regla de Ruffini, per trobar una arrel i els primers factors.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & -4 & -76 & -48 \\ -4 & & -12 & 64 & 48 \\ \hline & 3 & -16 & -12 & 0 \end{array}$$

Una arrel del polinomi és $x=-4$. En resulta la descomposició

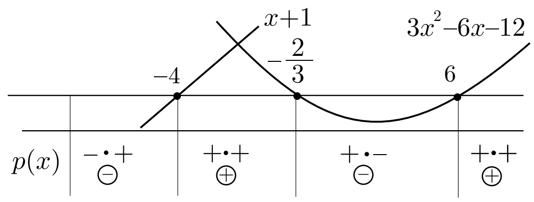
$$p(x)=(x+4)(3x^2-16x-12).$$

Per descompondre el segon factor, cerquem les seves arrels:

$$x=\frac{8\pm\sqrt{64+36}}{3}=\frac{8\pm 10}{3}=\left.\begin{matrix}\nearrow\ 6\\ \searrow\ -\dfrac{2}{3}\end{matrix}\right\}\Longrightarrow 3x^2-16x-12=3(x-6)\left(x+\frac{2}{3}\right).$$

Consegüentment, tenim $\boxed{\text{Arrels: } -4,\ -\dfrac{2}{3},6}$ i $\boxed{p(x)=(x+4)(x-6)(3x+2)}$.

b) Presentem l'estudi del signe mitjançant l'estudi dels dos factors per separat:



D'aquí en resulta

$$p(x) < 0 \Longleftrightarrow \boxed{x \in]-\infty, -4[\cup \left] -\frac{2}{3}, 6 \right[}$$

3. Sigui $a \neq 0$. Cerqueu raonadament, en cada cas, els valors de $n \in \mathbb{N}$ per als quals és certa l'afirmació que es proposa:

a) $x^n + a^n$ és múltiple de $x + a$.

b) $x^n + a^n$ és múltiple de $x - a$.

c) $x^n - a^n$ és múltiple de $x + a$.

d) $x^n - a^n$ és múltiple de $x - a$.

Aplicarem, en cadascun dels apartats, el teorema del residu. Esbrinarem si el valor del residu de les respectives divisions és o no és igual a zero.

a) $x = -a \Longrightarrow x^n + a^n = (-a)^n + a^n = \begin{cases} a^n + a^n = 2a^n \neq 0, & \text{si } n \text{ és parell} \\ -a^n + a^n = 0, & \text{si } n \text{ és senar.} \end{cases}$

Per tant, $x + a$ és divisor de $x^n + a^n$ per a qualsevol n senar.

b) $x = a \Longrightarrow x^n + a^n = a^n + a^n = 2a^n \neq 0,\ \forall n.$
Per tant, no existeix cap valor de n per al qual $x - a$ sigui divisor de $x^n + a^n$.

c) $x = -a \Longrightarrow x^n - a^n = (-a)^n - a^n = \begin{cases} a^n - a^n = 0, & \text{si } n \text{ és parell} \\ -a^n - a^n = -2a^n \neq 0, & \text{si } n \text{ és senar.} \end{cases}$

Per tant, $x + a$ és divisor de $x^n - a^n$ per a qualsevol n parell.

d) $x = a \Longrightarrow x^n - a^n = a^n - a^n = 0,\ \forall n.$
Per tant, $x - a$ és divisor de $x^n - a^n$ per a qualsevol valor de n.

4. Simplifiqueu l'expressió $\dfrac{x}{x^2+x} + \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{x^3-x}.$

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^2+x} + \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^3-x} &= \frac{x}{x(x+1)} + \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x(x+1)(x-1)} = \frac{x^2-x+x^2+x-2}{x(x-1)(x+1)} = \\ &= \frac{2x^2-2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{2(x-1)(x+1)}{x(x-1)(x+1)} = \boxed{\frac{2}{x}}. \end{aligned}$$

5. Esbrineu si existeix algun terme de grau zero en el desenvolupament del binomi

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^5}\right)^{28}.$$

En cas afirmatiu, digueu el lloc que ocupa i quin és el seu valor numèric.

Un terme qualsevol, que ocupi el lloc $k+1$, del desenvolupament s'escriu

$$T_{k+1} = \binom{28}{k} (x^2)^{28-k} \left(\frac{1}{x^5}\right)^k = \binom{28}{k} x^{56-2k-5k}.$$

Si imposem que sigui de grau zero, obtenim la condició $56 - 7k = 0$, la qual equival a $k = \dfrac{56}{7} = 8$. Conclusió:

Existeix un terme de grau zero. Aquest és el que ocupa el lloc novè, $\boxed{T_9 = \binom{28}{8}}$. El seu valor numèric és

$$\frac{28!}{8!\,20!} = \boxed{3108105}.$$

6. Considereu la progressió geomètrica a_n d'infinit nombre de termes tal que $a_3 = 16$ i $a_6 = \dfrac{128}{27}$. Trobeu els dos primers termes i la suma de tots els seus termes.

$$\left.\begin{array}{l} a_3 = 16 \\ a_6 = \dfrac{128}{27} \end{array}\right\} \Longrightarrow r^3 = \frac{a_6}{a_3} = \frac{\frac{128}{27}}{16} = \frac{2^7}{3^3 \cdot 2^4} = \frac{2^3}{3^3} \Longrightarrow r = \frac{2}{3}.$$

Llavors,

$$a_1 = \frac{a_3}{r^2} = \frac{16}{\frac{4}{9}} = 36 \Longrightarrow a_2 = 36 \cdot \frac{2}{3} = 24, \quad \text{i} \quad S = \frac{36}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{36}{\frac{1}{3}} = 108.$$

Conclusió: $\boxed{a_1 = 36,\ a_2 = 24,\ S = 108}$.