1. Calculeu el valor numèric de la suma de tots els nombres de quatre xifres que acaben en 0 o en 5.

Els nombres que acaben en 0 o 5 són els múltiples de 5. Aquests formen una progressió aritmètica de terme general $a_n = 5n$. A partir de l'enunciat,

$$1000 \leq 5n \leq 9995 \Longleftrightarrow \frac{1000}{5} \leq n \leq \frac{9995}{5} \Longleftrightarrow 200 \leq n \leq 1999.$$

Per tant, els múltiples de cinc de quatre xifres venen representats per $a_{200}, a_{201}, a_{202}, \ldots, a_{1999}$. En total hi ha $(1999 - 200) + 1 = 1800$ múltiples de 7 , i la seva suma és

$$S = \frac{1000 + 9995}{2} \cdot 1800 = 10995 \cdot 900 = \boxed{98955000}.$$

2. Considereu la suma $\quad S_n = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^n.$

a) Quin és el mínim valor de n tal que $S_n > 2.999999$?

b) Justifiqueu que $S_n < 3$ per a qualsevol $n \in \mathbb{N}$.

a) Observem que es tracta de la suma de $n+1$ termes d'una progressió geomètrica de raó $2/3$. Calcularem per a quin valor de n es compleix $S_n = 2.999999$. Llavors, si n no és enter, en ser la suma creixent quan n creix, només caldrà aproximar el seu valor per excés.

$$S_n = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 1}{\frac{2}{3} - 1} \Longrightarrow 3 \cdot \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right] = 2.999999 \Longrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 1 - \frac{2.999999}{3} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = \frac{0.000001}{3} \Longrightarrow n + 1 = \frac{\log \frac{0.000001}{3}}{\log \frac{2}{3}} \approx 36.7827 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow n \approx 35.8 \Longrightarrow \boxed{n = 36}.$$

b) Quan n creix la suma S_n també creix. Per tant, $S_n < S_\infty = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3.$

3. Un capital està sotmès a un règim d'interès compost amb liquidació d'interessos trimestral i la T.A.E. és 7.4%.

a) Calculeu la taxa nominal anual.

b) Quants trimestres han de passar perquè un capital de 1000 euros es converteixi en un capital de 1500 euros?

a) Anomenem i la taxa nominal en tant per u. Llavors,

$$\left(1 + \frac{i}{4}\right)^4 - 1 = 0.0740 \Longrightarrow \left(1 + \frac{i}{4}\right)^4 = 1.0740 \Longrightarrow 1 + \frac{i}{4} = \sqrt[4]{1.0740} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow i = 4 \cdot \left(\sqrt[4]{1.0740} - 1\right) = 0.07203 \Longrightarrow \boxed{7.20\%}.$$

b) En ser $C_0 = 1000$ i $C_t = 1500$, en què t és el nombre d'anys d'imposició, tenim

$$1500 = 1000\,(1+0.0740)^t \implies 1.5 = 1.0740^t \implies t = \frac{\log 1.5}{\log 1.0740} \implies$$
$$\implies t \approx 5.679578797 \text{ anys} \approx 5 \text{ anys i } 2.718 \text{ trimestres.}$$

Conseqüentment, han de passar 5 anys i 3 trimestres = $\boxed{23 \text{ trimestres}}$.

4. Volem tornar un préstec D sotmès a un règim d'interès compost de taxa anual i, (en tant per u), amb n pagaments a l'any, durant t anys.

a) Escriviu les fórmules per al càlcul de l'import de cada pagament a i la T.A.E.

b) Utilitzeu-les per demostrar que si la T.A.E. està expressada en tant per u, llavors

$$\frac{D \cdot \left[(1+\text{T.A.E.})^{\frac{1}{n}} - 1\right]}{1-(1+\text{T.A.E.})^{-t}} = a.$$

a) $a = \dfrac{D \cdot \frac{i}{n}}{1-\left(1+\frac{i}{n}\right)^{-n\cdot t}}$; $\qquad \text{T.A.E.} = \left(1+\dfrac{i}{n}\right)^n - 1.$

b) Substituïm en el primer membre de la igualtat la T.A.E. pel seu valor i tenim

$$\frac{D \cdot \left[\left(1+\left(1+\frac{i}{n}\right)^n - 1\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right]}{1-\left(1+\left(1+\frac{i}{n}\right)^n - 1\right)^{-t}} = \frac{D \cdot \left[\left(1+\frac{i}{n}\right)^{\frac{n}{n}} - 1\right]}{1-\left(1+\frac{i}{n}\right)^{-nt}} = \frac{D \cdot \frac{i}{n}}{1-\left(1+\frac{i}{n}\right)^{-nt}} = a\,.$$

5. S'ha de tornar un préstec de 4000 euros en un termini de dos anys. Es tenen dues ofertes:

Oferta A: Tornar-lo amb pagaments anuals al 8% d'interès compost anual.

Oferta B: Tornar-lo amb pagaments semestrals al 9% d'interès compost anual.

a) Calculeu amb quina de les dues ofertes es paguen més interessos.

b) Elaboreu el quadre d'amortització de les dues ofertes i esbrineu:

(1) Quin tant per cent de deute s'ha amortitzat en un any, en cadascun dels dos casos?

(2) Quin tant per cent d'interessos s'ha pagat després d'un any, en cadascun dels dos casos?

a) Calculem les anualitats respectives i allò que sobrepassi els 4000 euros, després de pagar-les totes, serà el total d'interessos pagats.

Oferta A: $\quad a = \dfrac{4000 \cdot 0.08}{1-(1+0.08)^{-2}} = 2243.0769 \implies$

Interessos $= 2243.0769 \cdot 2 - 4000 = 4486.1538 - 4000 = 486.15$ euros.

Oferta B: $\quad a = \dfrac{4000 \cdot \frac{0.09}{2}}{1-\left(1+\frac{0.09}{2}\right)^{-4}} = 1114.9746 \implies$

Interessos $= 1114.9746 \cdot 4 - 4000 = 4459.8984 - 4000 = 459.90$ euros.

$$\boxed{\text{Amb l'oferta A es paguen 26.25 euros més d'interessos}}.$$

b) Quadres d'amortització:

- Oferta A:

Final any	Pagament anual	Quota d'interès	Quota d'amortització	Deute amortitzat	Deute pendent
					4000.00
1	2243.08	320.00	1923.08	1923.08	2076.92
2	2243.08	166.15	2076.93	4000.01	−0.01

- Oferta B:

Final semestre	Pagament semestral	Quota d'interès	Quota d'amortització	Deute amortitzat	Deute pendent
					4000.00
1	1114.97	180.00	934.97	934.97	3065.03
2	1114.97	137.93	977.04	1912.01	2087.99
3	1114.97	93.96	1021.01	2933.02	1066.98
4	1114.97	48.01	1066.96	3999.98	0.02

b1) En la columna de deute amortitzat observem que després d'un any s'han amortitzat els percentatges de deute següents:

$$\text{Oferta A:} \quad \frac{\text{Deute amortitzat}}{\text{Deute inicial}} = \frac{1923.08}{4000} = 0.48077 \Longrightarrow \boxed{48.08\%}.$$
$$\text{Oferta B:} \quad \frac{\text{Deute amortitzat}}{\text{Deute inicial}} = \frac{1912.01}{4000} = 0.4780025 \Longrightarrow \boxed{47.80\%}.$$

b2) Després d'un any s'han pagat el total d'interessos que resulten de sumar les quantitats de la columna de quota d'interès fins la fila de l'any complet:

$$\text{Oferta A:} \quad \frac{320}{486.15} = 0.65823 = \boxed{65.82\%}.$$
$$\text{Oferta B:} \quad \frac{317.93}{459.90} = 0.69130 = \boxed{69.13\%}.$$