1. Sabem que $5.1\overset{\frown}{32} = 5.1 + 0.032 + 0.00032 + 0.0000032 + \cdots$
Utilitzeu els vostres coneixements sobre progressions geomètriques per expressar $5.1\overset{\frown}{32}$ en forma de fracció racional.

Observem que el nombre $5.1\overset{\frown}{32}$ es pot presentar com la suma de la fracció $\dfrac{51}{10}$ més la suma d'una progressió geomètrica il·limitada de raó $\dfrac{1}{10^2}$. Efectivament,

$$5.1\overset{\frown}{32} = 5.1 + \overbrace{0.032 + 0.00032 + 0.0000032 + \cdots}^{\text{progressió geomètrica}} = \frac{51}{10} + \frac{32}{10^3} + \frac{32}{10^5} + \frac{32}{10^7} + \cdots$$

Llavors, si utilitzem la fórmula per sumar aquests tipus de progressions, obtenim

$$5.1\overset{\frown}{32} = \frac{51}{10} + \frac{\frac{32}{1000}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{51}{10} + \frac{32}{990} = \boxed{\frac{5081}{990}}.$$

2. Un capital està sotmès a un règim d'interès compost de taxa nominal anual del 5%, amb liquidació d'interessos mensual.

a) Calculeu la T.A.E.

b) Raoneu si aquest capital dóna més o menys interessos amb una taxa nominal anual del 5.1% amb liquidació d'interessos trimestral.

c) Quants mesos han de passar per tal que, quan es treballa al 5%, un capital es dupliqui.

a) $\left(1 + \dfrac{0.05}{12}\right)^{12} - 1 = 0.05116 \Longrightarrow \text{T.A.E.} = \boxed{5.12\%}$.

b) Els interessos reals venen donats per la T.A.E. Llavors, en ser

$$\left(1 + \frac{0.05}{4}\right)^{4} - 1 = 0.05198 \Longrightarrow \text{T.A.E.} = 5.20\%,$$

dóna més interessos amb la taxa nominal del 5.1%.

c) Segons l'enunciat, C_0 és el capital inicial, $2C_0$ és el capital final i t el nombre d'anys d'imposició. Llavors,

$$2C_0 = C_0\left(1 + \frac{0.05}{12}\right)^{12\,t} \Longrightarrow 2 = \left(1 + \frac{0.05}{12}\right)^{12\,t} \Longrightarrow 12\,t = \frac{\log 2}{\log\left(1 + \frac{0.05}{12}\right)} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow t = \frac{\log 2}{12\,\log\left(1 + \frac{0.05}{12}\right)} \Longrightarrow t \approx 13.89180472 \text{ anys} \approx$$

$$\approx 13 \text{ anys i } 10.7 \text{ mesos}$$

Conseqüentment, han de passar $\boxed{13 \text{ anys i } 11 \text{ mesos} = 167 \text{ mesos}}$.

3. El preu d'un cotxe és de 12000 euros. El pagament es fa mitjançant ingressos trimestrals al 6% anual durant 1 any i mig.

a) Quina quantitat pagarem cada trimestre.

b) Elaboreu el quadre d'amortització.

c) Quin tant per cent del preu s'ha amortitzat en un any.

d) Si en el cinquè pagament volguéssim liquidar el deute, quants euros hauríem d'ingressar.

a)

$$a = \frac{D \cdot \frac{i}{n}}{1 - \left(1 + \frac{i}{n}\right)^{-nt}} = \frac{12000 \cdot 0.015}{1 - (1 + 0.015)^{-6}} = \frac{180}{1 - 1.015^{-6}} \approx 2106.30 \text{ euros.}$$

b)

Final trimestre	Pagament trimestral	Quota d'interès	Quota d'amortització	Deute amortitzat	Deute pendent
					12000.00
1	2106.30	180.00	1926.30	1926.30	10073.70
2	2106.30	151.11	1955.19	3881.49	8118.51
3	2106.30	121.78	1984.52	5866.01	6133.99
4	2106.30	92.01	2014.29	7880.30	4119.70
5	2106.30	61.80	2044.50	9924.80	2075.20
6	2106.30	31.13	2075.17	11999.97	0.03

c) Un any consta de quatre trimestres. La taula ens mostra que s'han amortitzat 7880.30 euros del deute. En resulta el percentatge,

$$\frac{7880.30}{12000} \cdot 100 = \boxed{65.67\%}.$$

d) Si volem liquidar el deute en el cinquè pagament, hem d'ingressar la quota trimestral corresponent a aquest pagament més el deute pendent que en resulta. Conseqüentment, l'ingrés serà de

$$2106.30 + 2075.20 = \boxed{4181.50 \text{ euros}}.$$

4. Resoleu raonadament les qüestions següents:

a) Trobeu el domini de la funció $f(x) = \dfrac{x}{x-2} + \sqrt{x-1}$.

b) Trobeu la antiimatge de 5 en la funció $f(x) = \dfrac{x}{x-3}$.

c) Calculeu $\lim_{x \to -\infty} f(x)$, si $f(x) = 3 + x^2 - 4x^3$.

d) Calculeu $\lim_{x \to 2^+} \left(\dfrac{4 - x^2}{2 - x} \right)^{\frac{1}{2-x}}$.

a) El domini el constitueixen els $x \in \mathbb{R}$ tals que $x - 2 \neq 0$ i $x - 1 \geq 0$. Això equival a dir que $x \neq 2$ i $x \geq 1$. Per tant,

$$\boxed{\operatorname{Dom} f = [\,1, 2\,[\cup]\,2, +\infty\,[}\,.$$

b) $f(x)=5 \iff \dfrac{x}{x-3}=5 \iff x=5x-15 \iff 4x=15 \iff \boxed{x=\dfrac{15}{4}}$.

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} 3+x^2-4x^3 = 3+(-\infty)^2-4(-\infty)^3 = 3+\infty+\infty = \boxed{+\infty}$.

d) Si $f(x)=\left(\dfrac{4-x^2}{2-x}\right)^{\frac{1}{2-x}}$, llavors $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \left(\dfrac{0}{0}\right)^{\frac{1}{0^-}} = (\text{Indeterminació})^{-\infty}$.

Cercarem els factors que anul·len el numerador i el denominador de la fracció per tal de desfer la indeterminació.

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}\left(\frac{(2-x)(2+x)}{2-x}\right)^{\frac{1}{2-x}} = \lim_{x\to 2^+}(2+x)^{\frac{1}{2-x}} = 4^{-\infty} = \frac{1}{4^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = \boxed{0}.$$

5. Donada la funció $f(x)=\dfrac{x^3-x}{x^3+2x^2-x-2}$.

a) Estudieu els tipus de discontinuïtat que presenta en $x=-2$, $x=-1$ i $x=1$.

b) Representeu-la gràficament, amb les seves asímptotes.

a) En primer lloc observem que

$$f(x)=\frac{x^3-x}{x^3+2x^2-x-2}=\frac{x(x^2-1)}{(x+2)(x^2-1)}=\frac{x}{x+2}, \quad \forall x\neq 1 \text{ i } x\neq -1.$$

En els punts $x=1$, $x=-2$, i $x\neq-1$, no existeix $f(x)$, perquè s'anul·la el denominador. Per tant, la funció és discontínua en aquests punts. Estudiem-ne el tipus de discontinuïtat, mitjançant el càlcul de límits:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-2^-} f(x) &= \lim_{x\to-2^-}\frac{x}{x+2}=\frac{-2}{0^-}=+\infty.\\
\lim_{x\to-2^+} f(x) &= \lim_{x\to-2^+}\frac{x}{x+2}=\frac{-2}{0^+}=-\infty.\\
\lim_{x\to-1} f(x) &= \lim_{x\to-1}\frac{x}{x+2}=\frac{-1}{1}=-1.\\
\lim_{x\to1} f(x) &= \lim_{x\to1}\frac{x}{x+2}=\frac{1}{3}=3.
\end{aligned}$$

Consegüentment, f presenta una discontinuïtat

- $\boxed{\text{asimptòtica}}$ en el punt $x=-2$.
- $\boxed{\text{evitable}}$ en el punt $x=-1$.
- $\boxed{\text{evitable}}$ en el punt $x=1$.

b) Segons la informació dels límits en el punt $x=-2$, la recta $\boxed{x=-2 \text{ és asímptota vertical}}$.

Quant a l'asímptota horitzontal calculem

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1+\frac{2}{x}} = \frac{1}{1+0}=1,$$

la qual cosa vol dir que la recta

$$\boxed{y=1 \text{ és asímptota horitzontal}}.$$