IES Pons d'Icart

MATEMÀTIQUES – 1R BAT D 20/XI/2003

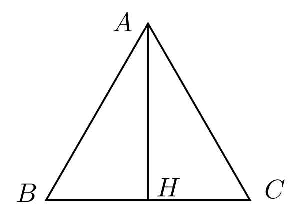
Nombres, equacions i polinomis 2+(0.5+0.75+0.75)+3+0.5+1.5

1. Resoleu una de les dues qüestions següents:

a) Esbrineu l'existència de dos nombres naturals que puguin expressar la relació entre l'altura i el costat d'un triangle equilàter qualsevol. Per exemple, es tracta d'esbrinar l'existència d'una relació del tipus:

L'altura AH és al costat BC com el nombre natural a és al nombre natural b.

O bé, expressat d'una altra manera, $\dfrac{AH}{BC} = \dfrac{a}{b}$, en què $a, b \in \mathbb{N}$.



b) Demostreu que $\sqrt{5}$ és un nombre irracional. Expliqueu, també, de quina manera es podria fer una construcció d'un segment de longitud $\sqrt{5}$, amb un regle sense marques i un compàs.

a) Si anomenem $x = AH$, $y = BC$, apliquem el teorema de Pitàgoras i obtenim

$$x = \sqrt{y^2 - \frac{y^2}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}y^2} = \frac{y\sqrt{3}}{2} \Longleftrightarrow \frac{AH}{BC} = \frac{\frac{y\sqrt{3}}{2}}{y} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Llavors, si existissin els nombres naturals a i b tals que $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ tindríem

$$\frac{2a}{b} = \sqrt{3} \quad \text{i això no pot ser, en ser } \frac{2a}{b} \in \mathbb{Q} \text{ i } \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}.$$

Conclusió: $\boxed{\text{No existeixen } a \text{ i } b \text{ amb les condicions de l'enunciat}}$.

b) Suposem que $\sqrt{5}$ és racional. Llavors,

$$\sqrt{5} = \frac{p}{q}, \text{ tal que } p \in \mathbb{Z} \text{ i } q \in \mathbb{Z} - \{0\} \text{ i } \operatorname{mcd}(p,q) = 1.$$

Per tant, $p^2 = 5q^2 \Longrightarrow p = 5 \cdot t, t \in \mathbb{Z} \Longrightarrow 25t^2 = 5q^2 \Longrightarrow 5t^2 = q^2 \Longrightarrow q = 5 \cdot s \Longrightarrow \operatorname{mcd}(p,q) \geq 5$. Això es contradiu amb que $\operatorname{mcd}(p,q) = 1$ i, per tant, el punt de partida és fals. Consegüentment, $\sqrt{5}$ és racional.

Per fer-ne la construcció, només cal considerar un segment com a unitat de longitud i dibuixar un triangle rectangle de catets de longituds 1 i 2. Llavors, pel teorema de Pitàgoras, la hipotenusa mesura $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.

2. Simplifiqueu i racionalitzeu quan calgui (sense utilitzar els nombres decimals ni la calculadora):

$$\text{a) } \left(\sqrt[4]{0,0001}\right)^{-3} \qquad \text{b) } \frac{\sqrt{b^3}\;\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[6]{a^3b^5}} \qquad \text{c) } \sqrt{28}+\sqrt{\frac{25}{7}}-\frac{5\sqrt{112}}{18}$$

a) $\left(\sqrt[4]{0,0001}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{10000}\right)^{-\frac{3}{4}} = 10000^{\frac{3}{4}} = \left(10^4\right)^{\frac{3}{4}} = 10^3 = \boxed{1000}.$

b) $\dfrac{\sqrt{b^3}\;\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[6]{a^3b^5}} = a^{\frac{3}{4}-\frac{3}{6}} \cdot b^{\frac{3}{2}-\frac{5}{6}} = a^{\frac{3-2}{4}} \cdot b^{\frac{9-5}{6}} = a^{\frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{4}{6}} = \sqrt[4]{a}\,\sqrt[6]{b^4} = \boxed{\sqrt[12]{a^3\,b^8}}.$

c)
$$\sqrt{28}+\sqrt{\frac{25}{7}}-\frac{5\sqrt{112}}{18} = 2\sqrt{7}+\frac{5}{\sqrt{7}}-\frac{20\sqrt{7}}{18} = \left(2+\frac{5}{7}-\frac{10}{9}\right)\sqrt{7}$$
$$= \frac{126+45-70}{63}\sqrt{7} = \boxed{\frac{101\sqrt{7}}{63}}.$$

3. Donat el polinomi $p(x) = x^5+3x^3-4x$,

a) Trobeu les seves arrels i la seva descomposició factorial.

b) Resoleu la inequació $p(x) \leq 0$, amb l'ajut dels gràfics de rectes i/o paràboles.

c) Simplifiqueu $\dfrac{x}{x^2+4}-\dfrac{20}{p(x)}$.

a) Una primera descomposició és

$$p(x) = x(x^4+3x^2-4).$$

Cerquem les arrels del segon factor, resolent l'equació biquadrada que resulta:

$$x^2 = \frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3\pm 5}{2} = \begin{cases} 1 \\ -4 \end{cases} \Longrightarrow p(x) = x(x^4+3x^2-4) = x(x^2-1)(x^2+4).$$

En ser $x^2-1 = (x-1)(x+1)$ i $x^2+4>0$, obtenim

$$\boxed{p(x) = x(x-1)(x+1)(x^2+4)} \quad \text{i} \quad \boxed{\text{Arrels: } 0, 1, -1}.$$

b) Sabem que $x^2+4>0$. Per tant, presentem l'estudi del signe mitjançant l'estudi dels altres factors per separat i, alternativament, dels altres dos factors de la primera descomposició:

D'aquí en resulta $\quad p(x) \leq 0 \Longleftrightarrow x \leq -1 \quad \text{o} \quad 0 \leq x \leq 1$, és a dir

$$\boxed{x \in]-\infty, -1] \cup [0,1]}$$

c) El polinomi x^2+4 no té arrels perquè els seus valors sempre són positius. Per tant,

$$\text{m.c.m.}\big(x^2+4, p(x)\big) = p(x) = x(x-1)(x+1)(x^2+4).$$

Conseqüentment,

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^2+4} - \frac{20}{p(x)} &= \frac{x^2(x-1)(x+1)-20}{x(x-1)(x+1)(x^2+4)} = \frac{x^4-x^2-20}{x(x-1)(x+1)(x^2+4)} \overset{(*)}{=} \\ &= \frac{(x^2-5)(x^2+4)}{x(x-1)(x+1)(x^2+4)} = \boxed{\frac{x^2-5}{x(x-1)(x+1)}}. \end{aligned}$$

$$(*)\ x^4-x^2-20=0 \Longleftrightarrow x^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1+80}}{2} = \frac{1 \pm 9}{2} = \begin{cases} 5 \\ -4 \end{cases}$$

4. Sigui $p(x) = x^3 - ax^2 + ax - 1$. Justifiqueu que $p(x)$ és divisible per $x-1$, sigui quin sigui el valor de a.

És divisible perquè el residu val 0 independentment del valor de a. Efectivament,

$$\text{residu} = 1^3 - a \cdot 1^2 + a \cdot 1 - 1 = 1 - a + a - 1 = 1 + 0 - 1 = 0.$$

5. Completeu la fórmula del desenvolupament de la potència d'un binomi.

$$(a+b)^n = \sum_{k=\square}^{\square} \binom{\square}{\square} a^{\square} \cdot b^{\square}$$

Apliqueu-la a trobar el desenvolupament de $(a+2)^4$.

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k}.$$

$$\begin{aligned} (a+2)^4 &= \binom{4}{0} a^4 + \binom{4}{1} a^3 \cdot 2 + \binom{4}{2} a^2 \cdot 2^2 + \binom{4}{3} a \cdot 2^3 + \binom{4}{4} 2^4 = \\ &= a^4 + \frac{4}{1} \cdot 2a^3 + \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \cdot 4a^2 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 8a + 16 = \\ &= \boxed{a^4 + 8a^3 + 24a^2 + 32a + 16}. \end{aligned}$$