1. Una sabateria puja el preu del calçat un 5%. Si un parell de sabates valen 75.6 euros, quin preu tenien abans de la pujada?

Un valor de 100 unitats es converteix, després de la pujada, en un valor de 105 unitats. Per tant, si considerem

$$x = \text{preu abans de la pujada},$$

només cal imposar la relació de proporcionalitat entre preus antics i nous:

$$\frac{100}{105} = \frac{x}{75.6} \Longleftrightarrow x = \frac{75.6 \cdot 100}{105} = \boxed{72 \text{ euros}}.$$

2. Sense calculadora, justifiqueu que $x = \sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}$ és un nombre enter. Indicació: Pot ser una bona idea trobar el valor de x^2.

$$\begin{aligned} x^2 &= 7+4\sqrt{3}+7-4\sqrt{3}+2\sqrt{7+4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{7-4\sqrt{3}} = \\ &= 14+2\sqrt{49-48} = 14+2 = 16. \end{aligned}$$

Per tant, $\boxed{x=4}$. La solució $x=-4$ no és bona perquè es tracta amb les arrels quadrades positives.

3. Ens hem trobat moltes vegades amb polinomis de grau 2 que no tenen arrels reals. Raoneu si existeixen polinomis de grau 3 sense arrels reals. Podeu utilitzar arguments gràfics o algebraics.

Sabem que tot polinomi admet descomposició factorial en factors primers de grau 2 com a màxim. Per tant, es presenten dues possibilitats:

1) Si hi ha un factor de grau 2 irreductible, hi ha d'haver un factor de grau 3-2=1. En aquest cas, el factor de grau 1 determina una arrel real.
2) Si no hi ha factors de grau 2, tots els factors són de grau 1. Cadascun d'ells determina una arrel real i, depenent de que els factors siguin repetits o no ho siguin hi haurà una o dues o tres arrels reals.

Conseqüentment, $\boxed{\text{no existeixen polinomis de grau 3 sense arrels reals}}$.

4. Quina és la probabilitat que en tirar 6 vegades una moneda surtin 3 cares i 3 creus?

Els esdeveniments possibles equiprobables que poden resultar de tirar 6 vegades una moneda consisteixen en totes les possibles col·leccions ordenades de 6 elements els quals poden ser cares o creus. Cal fer-ne el recompte i considerar, entre ells, els favorables, els quals estan formats per tres cares i tres creus. Llavors, la probabilitat vindrà donada per

$$\text{probabilitat} = \frac{\text{nombre d'esdeveniments favorables}}{\text{nombre d'esdeveniments possibles}}.$$

Esdeveniments possibles:
Estan constituïts per totes les col·leccions ordenades de 6 elements triats entre dos elements diferents (cares o creus). Per tant, es tracta de comptar el nombre de **variacions amb repetició de 2 elements agafats de 6 en 6**.

Esdeveniments favorables:
Estan constituïts per totes les col·leccions ordenades de 6 elements en entre dos elements diferents (cares o creus), en què n'hi ha 3 que són cares i 3 que són creus. Per tant, es tracta de comptar el nombre de **permutacions amb repetició de 6 elements en què trobem dos grups de tres elements repetits**.

$$\text{probabilitat} = \frac{\text{PR}_6^{3,3}}{\text{VR}_2^6} = \frac{\frac{6!}{3!\,3!}}{2^6} = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{3\cdot 2\cdot 3\cdot 2\cdot 2^6} = \frac{20}{64} = \boxed{\frac{5}{16} = 0.3125}\,.$$

5. Trobeu tots els triangles rectangles de costats $a > b > c$ enters, tals que $a - b = b - c$. Un cop trobats raoneu perquè no n'hi ha cap més.

En ser la diferència $a - b = b - c$, podem presentar la longitud dels costats de la manera següent:

$$x + k,\ x,\ x - k,\quad \text{en què } x \text{ i } k \text{ són nombres enters positius que hem de trobar.}$$

En ser els triangles rectangles, **tots els possibles triangles** amb la propietat donada que cerquem, han de satisfer necessàriament el teorema de Pitàgoras. Llavors x i k han de complir:

$$\begin{aligned}(x+k)^2 = x^2 + (x-k)^2 &\iff x^2 + 2kx + k^2 = x^2 + x^2 - 2kx + k^2 \iff x^2 - 4kx = 0 \iff \\ &\iff x(x-4k) = 0 \iff x = 4k,\ \text{perquè } x \neq 0.\end{aligned}$$

Els triangles cercats són aquells tals que els seus costats tenen valors

$$x - k = \boxed{3k},\ x = \boxed{4k},\ x + k = \boxed{5k},\ \text{en què } k \text{ és un nombre enter positiu.}$$

Dit d'una altra manera, els triangles són els que tenen els seus **costats múltiples positius de 3, de 4 i de 5**, respectivament. No n'hi pot haver cap més perquè són els únics que compleixen el teorema de Pitàgoras. Per exemple, si considerem un triangle de costats 5, 7, 9, la diferència entre costats consecutius es manté igual, però no satisfà la relació de Pitàgoras ($9^2 \neq 7^2 + 5^2$) i, per tant, no és rectangle i no és solució.

6. Resoleu l'equació:

$$254 + \sqrt{x^2 - x + 52} = x^2 - x$$

Indicació: Considereu la incògnita $z = x^2 - x$.

Si utilitzem la indicació tenim:

$$\begin{aligned}254 + \sqrt{z + 52} = z &\implies z + 52 = (z - 254)^2 \iff \\ &\iff z + 52 = z^2 - 508z + 64516 \iff z^2 - 509z + 64464 = 0 \iff \\ &\iff z = \frac{509 \pm \sqrt{509^2 - 4\cdot 64464}}{2} = \frac{509 \pm \sqrt{1225}}{2} = \begin{cases} 272 \\ 237\,. \end{cases}\end{aligned}$$

La solució $z = 237$ no és bona perquè $254 + \text{nombre positiu} = 237$ no pot ser. Per tant, les solucions han de sortir de $z = 272$, és a dir de $x^2 - x = 272$. Llavors,

$$x^2 - x - 272 = 0 \iff x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4\cdot 272}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1089}}{2} = \begin{cases} \boxed{17} \\ \boxed{-16}\,. \end{cases}$$