IES Pons d'Icart

MATEMÀTIQUES – 1R BAT AB/2 — 10/II/2005

Trigonometria i geometria afí — $(3+1.5+1.5)+(1.5+2.5)$

Heu de resoldre les qüestions 1, 2, 3, 6 i una escollida entre la 4 i la 5.

1. Demostreu que $\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$, i utilitzeu aquesta identitat per resoldre l'equació $\cos(3x) = 4\cos^2 x$.

$$
\begin{aligned}
\cos(3x) &= \cos(2x+x) = \cos(2x)\cos x - \sin(2x)\sin x = \\
&= (\cos^2 x - \sin^2 x)\cos x - 2\sin^2 x\cos x = \cos^3 x - 3\sin^2 x\cos x = \\
&= \cos^3 x - 3(1-\cos^2 x)\cos x = 4\cos^3 x - 3\cos x.
\end{aligned}
$$

Amb aquesta identitat transformem l'equació i obtenim:

$$
4\cos^3 x - 3\cos x = 4\cos^2 x \iff \cos x(4\cos^2 x - 4\cos x - 3) = 0 \iff
$$

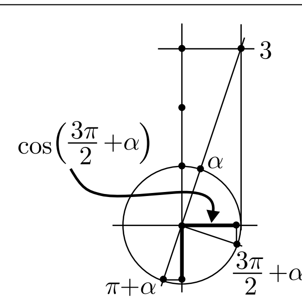
$$
\iff \left\{ \begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \qquad \text{o bé} \\ 4\cos^2 x - 4\cos x - 3 = 0 \end{array} \right.
$$

$$
\iff \left\{ \begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \qquad \text{o bé} \\ \cos x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+12}}{4} = \dfrac{2 \pm 4}{4} = \begin{array}{l} \nearrow \ \dfrac{3}{2} \\ \searrow \ -\dfrac{1}{2} \end{array} \end{array} \right. \iff
$$

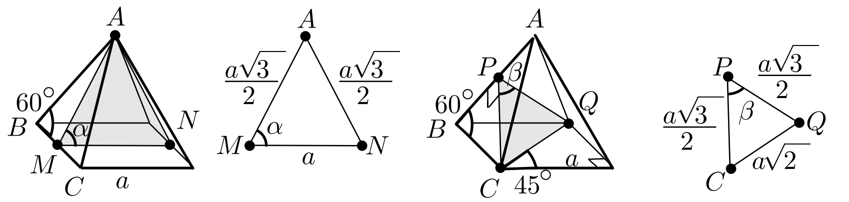
$$
\iff \boxed{x = \frac{\pi}{2} + n\cdot\pi, \quad x = \frac{2\pi}{3} + 2n\cdot\pi, \quad x = \frac{4\pi}{3} + 2n\cdot\pi}.
$$

2. Si $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ i $\tan(\pi+\alpha) = 3$, trobeu sense calculadora el valor de $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + \alpha\right)$.

$$
\begin{aligned}
\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) &= -\sin(\pi+\alpha) = -\frac{1}{-\sqrt{1+\cot\text{an}^2\alpha}} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{3}\right)^2}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{10}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{10}}
\end{aligned}
$$



3. Una piràmide té la base quadrada i les cares laterals són triangles equilàters. Calculeu l'angle que forma la base amb qualsevol cara lateral i l'angle entre dues cares laterals.



Els angles α i β entre les cares estan determinats pels segments AM i CP perpendiculars a les arestes BC i AB. Per tant, per trigonometria de triangles rectangles, si les arestes de la piràmide mesuren a, llavors

$$AM = AN = CP = QP = a \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \qquad CQ = a \cdot \cos 45^\circ = a\sqrt{2}.$$

Si apliquem el teorema del cosinus als triangles $\triangle MAN$ i $\triangle CPQ$, s'obté

$$\boxed{\triangle MAN} : \quad \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + a^2 - 2a^2\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha \Longrightarrow \frac{a^2}{a^2\sqrt{3}} = \cos\alpha \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Longrightarrow \boxed{\alpha = 54^\circ 44'\, 8.2''}.$$

$$\boxed{\triangle CPQ} : \quad (a\sqrt{2})^2 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,a\right)^2 - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,a\right)^2 \cos\beta \Longrightarrow$$

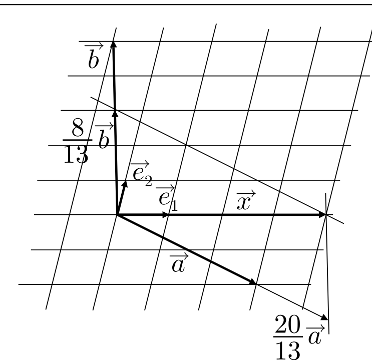
$$2a^2 = \frac{3}{2}\,a^2 - \frac{3}{2}\,a^2\cos\beta \Longrightarrow$$

$$\cos\beta = \frac{\frac{a^2}{2}}{-\frac{3a^2}{2}} = -\frac{1}{3} \Longrightarrow \boxed{\beta = 109^\circ 28'\, 16.3''}.$$

4. Tenim els vectors $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{x}$ que en una base $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ tenen coordenades

$$\vec{a} = (3, -2), \quad \vec{b} = (-1, 5) \qquad \text{i} \qquad \vec{x} = (4, 0).$$

Cerqueu analíticament l'expressió de $\vec{x}$ com a combinació lineal dels vectors $\vec{a}$ i $\vec{b}$, i feu una comprovació gràfica aproximada del resultat.



S'han de trobar dos nombres reals λ i μ tals que

$$(4,0) = \lambda(3,-2) + \mu(-1,5) \Longleftrightarrow \begin{cases} 3\lambda - \mu = 4 \\ -2\lambda + 5\mu = 0. \end{cases}$$

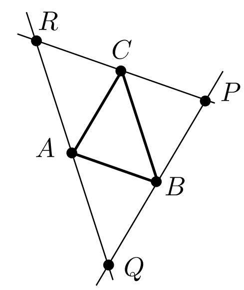
S'obté $\left\{ \begin{array}{l} \lambda = \frac{20}{13} \\ \mu = \frac{8}{13} \end{array} \right\}$. És a dir $\boxed{\vec{x} = \frac{20}{13}\,\vec{a} + \frac{8}{13}\,\vec{b}}$.

5. En una referència qualsevol considereu els punts $A(1,1)$, $B\left(\frac{5}{2},\frac{1}{3}\right)$ i $C\left(2,\frac{9}{4}\right)$. Trobeu el quart vèrtex de tots els paral·lelograms que es poden construir amb els vèrtexs A, B i C.

$$P = C+\overrightarrow{AB} = \left(2,\,\frac{9}{4}\right)+\left(\frac{3}{2},\,-\frac{2}{3}\right) = \boxed{\left(\frac{7}{2},\,\frac{19}{12}\right)}.$$

$$Q = A+\overrightarrow{CB} = (1,\,1)+\left(\frac{1}{2},\,-\frac{23}{12}\right) = \boxed{\left(\frac{3}{2},\,-\frac{11}{12}\right)}.$$

$$R = A+\overrightarrow{BC} = (1,\,1)+\left(-\frac{1}{2},\,\frac{23}{12}\right) = \boxed{\left(\frac{1}{2},\,\frac{35}{12}\right)}.$$



6. Sigui la recta $r:\ \frac{x}{5}+\frac{y}{2}=1$. Trobeu analíticament:

a) Els punts de tall A i B amb els eixos de coordenades, i els punts que parteixen el segment AB en tres parts iguals.
b) Un vector director de r amb coordenades enteres.
c) Les equacions paramètriques de r.
d) L'equació general o implícita de la recta paral·lela a r que passa pel punt $P(1,0)$.
e) Per a quins valors de a i b la recta $x+ay=b$ és paral·lela a r.

a) En haver-nos donat l'equació canònica, els punts de tall són $\boxed{A(5,0),\ B(0,2)}$. Els dos punts que parteixen AB en tres parts iguals són

$$A+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = (5,0)+\frac{1}{3}(-5,2) = \boxed{\left(\frac{10}{3},\frac{2}{3}\right)}.$$

$$A+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = (5,0)+\frac{2}{3}(-5,2) = \boxed{\left(\frac{5}{3},\frac{4}{3}\right)}.$$

b) Un vector director és $\boxed{\overrightarrow{AB}=(-5,2)}$.

c) Les equacions paramètriques s'obtenen a partir d'un punt de la recta i un vector director, per exemple $A(5,0)$ i $\overrightarrow{AB}=(-5,2)$.

$$\boxed{\begin{array}{l} x=5-5\lambda \\ y=2\lambda \end{array}}.$$

d) En ser paral·lela $(-5,2)$ és vector director i la recta cercada és del tipus

$$s: 2x+5y+K=0.$$

Sabem que $P(1,0)\in s$. Per tant, $2\cdot 1+5\cdot 0+K=0$. Llavors, $k=-2$ i la recta és

$$\boxed{s: 2x+5y-2=0}.$$

e) Imposem la condició de paral·lelisme amb la recta $r: 2x+5y-10=0$, i obtenim

$$\frac{1}{2}=\frac{a}{5}\neq\frac{b}{10}\iff \boxed{a=\frac{5}{2}\ \text{ i }\ b\neq 5}.$$