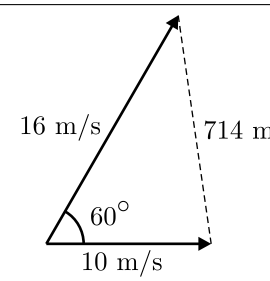
IES Pons d'Icart
Matemàtiques – 1r BAT AB/2 4/III/2005
Trigonometria i geometria $(1.5+1.5+1)+(2+2+2)$

1. Resoleu l'equació
$$\cos(6x)-\cos(2x)+\sin(2x)=0.$$

Si transformem la diferència de cosinus en un producte tenim

$$-2\sin(4x)\sin(2x)+\sin(2x)=0 \Longleftrightarrow \sin(2x)(-2\sin(4x)+1)=0 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\sin(4x)=\frac{1}{2}\\ \text{o bé}\\ \sin(2x)=0\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}2x=n\cdot\pi\\ 4x=\dfrac{\pi}{6}+2n\cdot\pi\\ 4x=\dfrac{5\,\pi}{6}+2n\cdot\pi\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\boxed{\begin{array}{l}x=n\cdot\dfrac{\pi}{2}\\ x=\dfrac{\pi}{24}+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\\ x=\dfrac{5\,\pi}{24}+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\end{array}}\right. .$$

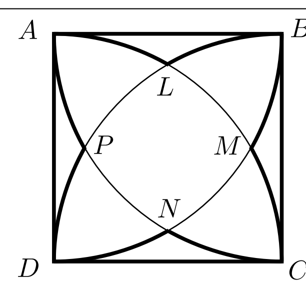
2. Dos mòbils surten des d'un mateix punt, al mateix instant, en direccions rectilínies que formen un angle de 60°. Un d'ells porta porta una velocitat de 10 m/s i l'altre de 16 m/s. Quant de temps ha de passar perquè la seva separació sigui de 714 m ?



Sigui t el temps transcorregut des de que surten fins que es troben. Llavors, les distàncies recorregudes pels mòbils són $16t$ i $10t$. Si apliquem el teorema del cosinus al triangle,que resulta tenim

$$714^2 = (16t)^2+(10t)^2-2\cdot 16t\cdot 10t\cdot\cos 60^\circ=(256+100-160)t^2 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow t^2=\frac{714^2}{196}\Longrightarrow t=\frac{714}{14}=\boxed{51\text{ s}}.$$

3. A la figura de la dreta el valor del costat del quadrat és a. Si els quatre arcs tenen el seu centre en cadascun dels vèrtexs dels quadrats, trobeu el perímetre de la figura $ALBMCNDP$.



Si ens centrem en l'arc $ALMC$ veiem que, en ser $\triangle ADM$ equilàter, l'arc AM té una obertura de 60° i, per tant, l'arc MC també. Per un raonament igual, a partir de $\triangle DCN$, l'arc AL s'obre 30°. Si fem el mateix raonament sobre els arcs $APNC$, $DPLB$ i $BMND$ obtenim per a les longituds dels arcs implicats en el perímetre $\widehat{AP}=\widehat{NC}=\widehat{DP}=\widehat{LB}=\widehat{BM}=\widehat{ND}=\dfrac{\pi}{6}\cdot a$ i, per tant,

$$\text{Perímetre}(ALBMCNDP)=8\cdot\widehat{AL}=8\cdot\frac{\pi}{6}\cdot a=\boxed{\frac{4\pi a}{3}}.$$

4. Qüestions curtes, —resoleu-ne quatre—:

a) Expresseu el vector $\vec{a} = (-2, 10)$, com a combinació lineal dels vectors $\vec{u} = (6, 12)$ i $\vec{v} = (2, -3)$.

b) Siguin els punts $A(3, 1)$ i $B(-1, 4)$. Trobeu el punt P del segment AB tal que la relació entre les distàncies PA i PB sigui $1/4$.

c) En una base ortonormal, trobeu les coordenades d'un vector unitari i perpendicular al vector $(-12, 5)$.

d) Trobeu les equacions contínua i canònica de la recta que passa per $A(4, 0)$ i $B(0, 1)$.

e) Sabem que les rectes $ax + 9y - 9 = 0$ i $x + ay - 3 = 0$, són paral·leles. Trobeu a.

a) Hem de trobar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tals que $\vec{a} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.

$$(-2, 10) = \alpha(6, 12) + \beta(2, -3) \iff \begin{cases} -2 = 6\alpha + 2\beta \\ 10 = 12\alpha - 3\beta \end{cases} \iff \begin{cases} -2 = 6\alpha + 2\beta \\ 14 = \quad -7\beta \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \beta = -2 \\ \alpha = \dfrac{-2 - 2\cdot(-2)}{6} = \dfrac{1}{3} \end{cases} \implies \boxed{\vec{a} = \frac{1}{3}\vec{u} - 2\vec{v}}.$$

b) Per al punt $P(x, y)$ tenim

$$\overrightarrow{PB} = 4 \cdot \overrightarrow{AP} \iff (-1 - x, 4 - y) = 4(x - 3, y - 1) \iff \begin{cases} -1 - x = 4x - 12 \\ 4 - y = 4y - 4 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 5x = 11 \\ 5y = 8 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{11}{5} \\ y = \dfrac{8}{5} \end{cases} \implies \boxed{P = \left(\frac{11}{5}, \frac{8}{5}\right)}.$$

c) El vector (-12,5) i el vector perpendicular han de tenir producte escalar igual a zero. Per aconseguir-ho només cal canviar les coordenades d'ordre i una d'elles de signe. Així, el vector $(5, 12)$ és perpendicular. Si el volem unitari, hem de dividir pel seu mòdul:

$$\frac{1}{\sqrt{5^2 + 12^2}} \cdot (5, 12) = \boxed{\left(\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right)}.$$

d) En ser els punts A i B els talls amb els eixos de coordenades, l'equació canònica és

$$\boxed{\frac{x}{4} + y = 1}.$$

En ser el vector director $\overrightarrow{AB} = (4, -1)$ i $A(4, 0)$ un punt de la recta l'equació contínua és

$$\boxed{\frac{x - 4}{4} = \frac{y}{-1}}.$$

e) $\dfrac{a}{1} = \dfrac{9}{a} \neq \dfrac{-9}{-3} \implies a^2 = 9$ i $a \neq 3 \implies \boxed{a = -3}$.

5. Siguin els punts $A(-3,0)$ i $B(1,0)$. Comproveu que el lloc geomètric dels punts P tals que $d(P,B) = 3 \cdot d(P,A)$ és una circumferència. Trobeu-ne el centre i el radi.

Per als punts $P(x,y)$ es compleix

$$\begin{aligned} d(P,B) = 3 \cdot d(P,A) &\iff (x-1)^2 + y^2 = 9\left((x+3)^2 + y^2\right) \iff \\ &\iff x^2 - 2x + 1 + y^2 = 9x^2 + 54x + 81 + 9y^2 \iff \\ &\iff 8x^2 + 8y^2 + 56x + 80 = 0 \iff x^2 + y^2 + 7x + 10 = 0 \end{aligned}$$

Això és l'equació d'una circumferència perquè $\boxed{m^2 + n^2 - 4p = 7^2 + 0^2 - 4 \cdot 10 = 9 > 0}$.

$$\text{Centre:} \qquad \left(-\frac{m}{2}, -\frac{n}{2}\right) = \boxed{\left(-\frac{7}{2}, 0\right)}.$$

$$\text{Radi:} \qquad \sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2 + \left(\frac{n}{2}\right)^2 - p} = \sqrt{\left(-\frac{7}{2}\right)^2 + 0^2 - 10} = \boxed{\frac{3}{2}}.$$

6. Trobeu les rectes que passen pel punt $P(-2,17)$ i es troben a distància 13 del punt $A(5,0)$.

Primerament, cercarem les que no són paral·leles a l'eix d'abscisses per facilitar l'àlgebra de les operacions. Si no en surten dues, cercarem la segona entre les rectes $y = k$.

Sigui $x + by + c = 0$ la família d'aquestes rectes. Llavors, en ser $P(-2,17)$ un punt de la recta, es compleix $c = 2 - 17b$. Per tant,

$$\begin{aligned} &13 = d(A, x + by + 2 - 17b = 0) = \frac{|7 - 17b|}{\sqrt{1+b^2}} \iff \\ &\iff 169 + 169b^2 = 49 + 289b^2 - 238b \iff 120b^2 - 238b - 120 = 0 \iff \\ &\iff 60b^2 - 119b - 60 = 0 \iff b = \frac{119 \pm \sqrt{14161 + 14400}}{120} = \frac{119 \pm 169}{120} = \begin{cases} \dfrac{12}{5} \\ -\dfrac{5}{12} \end{cases}. \end{aligned}$$

Així, les rectes tenen equacions $x + \dfrac{12}{5}y + 2 - \dfrac{17 \cdot 12}{5} = 0$ i $x - \dfrac{5}{12}y + 2 + \dfrac{17 \cdot 5}{12} = 0$.

És a dir

$$\boxed{5x + 12y - 194 = 0 \ \text{ i } \ 12x - 5y + 109 = 0}.$$