IES Pons d'Icart
MATEMÀTIQUES – 1R BAT AB/2 1/IV/2005
Trigonometria i geometria – Recuperació $3 + 2 + (0.75 + 0.75 + 1.5) + (1.5 + 0.5)$

1. a) Demostreu la identitat $\tan(3x) = \dfrac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$.

b) Resoleu l'equació $\tan(3x) + \tan^3 x = 0$.

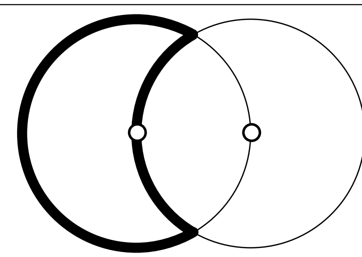
a) Utilitzarem les fórmules de la tangent d'una suma i de la tangent de l'angle doble.

$$\begin{aligned}
\tan(3x) &= \tan(2x + x) = \frac{\tan(2x) + \tan x}{1 - \tan(2x)\cdot\tan x} = \frac{\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x} + \tan x}{1 - \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}\cdot \tan x} = \\
&= \frac{\dfrac{2\tan x + \tan x - \tan^3 x}{1-\tan^2 x}}{\dfrac{1-\tan^2 x - 2\tan^2 x}{1-\tan^2 x}} = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}
\end{aligned}$$

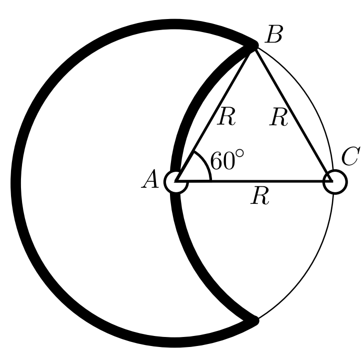
b) Si apliquem la identitat de l'apartat primer resulta

$$\begin{aligned}
&\tan(3x) + \tan^3 x = 0 \iff \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x} + \tan^3 x = 0 \iff \\
&\iff 3\tan x - \tan^3 x + \tan^3 x - 3\tan^5 x = 0 \iff \tan^5 x - \tan x = 0 \iff \\
&\iff \tan x \cdot (\tan^4 x - 1) = 0 \iff \left\{\begin{array}{c} \tan x = 0 \\ \text{o} \\ \tan x = 1 \\ \text{o} \\ \tan x = -1. \end{array}\right. \iff \boxed{\begin{array}{c} x = n\cdot\pi \\ \text{o} \\ x = \dfrac{\pi}{4} + n\cdot\dfrac{\pi}{2} \end{array}}.
\end{aligned}$$

2. Les dues circumferències de la figura adjunta tenen els radis iguals a R. El centre de cadascuna d'elles es troba sobre el perímetre de l'altra. Calculeu l'àrea de la "lluna" remarcada.



$$\begin{aligned}
\text{Àrea(Lluna)} &= \text{Àrea(Cercle)} - 2\cdot\text{Àrea(Sector } ABC) - \\
&\quad -2\cdot\text{Àrea(Segment circular } AB) = \\
&= \text{Àrea(Cercle)} - 4\cdot\text{Àrea(Sector } ABC) + \\
&\quad +2\cdot\text{Àrea(Triangle } ABC) = \\
&= \pi R^2 - 4\,\frac{\pi}{6}\,R^2 + 2\cdot\frac{1}{2}\,R^2\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \\
&= \frac{\pi}{3}\,R^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\,R^2 = \boxed{\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) R^2}.
\end{aligned}$$



3. Considereu els punts $A(-1,0)$, $B(5,0)$ i $C(4,7)$. Trobeu

a) Un vector perpendicular a $\overrightarrow{AC}$ que tingui mòdul igual a 2.

b) L'equació general de la mitjana del triangle $\triangle ABC$ que passa pel vèrtex B.

c) L'equació, el centre i el radi de la circumferència que passa pels punts A, B i C.

a) $\overrightarrow{AC} = (4-(-1), 7-0) = (5,7) \Longrightarrow$ vector perpendicular a $\overrightarrow{AC} = (-7,5)$. Llavors, si trobem un vector unitari en aquesta direcció i el multipliquem per 2 obtindrem el vector demanat de mòdul 2:

$$2 \cdot \text{Vector unitari} = 2 \cdot \left(\frac{-7}{\sqrt{(-7)^2+5^2}}, \frac{5}{\sqrt{(-7)^2+5^2}} \right) = \boxed{\left(\frac{-14}{\sqrt{74}}, \frac{10}{\sqrt{74}} \right)}.$$

L'altra solució possible s'obté a partir de $(7,-5)$ i és $\boxed{\left(\frac{14}{\sqrt{74}}, \frac{-10}{\sqrt{74}} \right)}$.

b) Es demana la recta que passa pel punt B i el punt mitjà M del segment AC. Llavors,

$$M = \left(\frac{4-1}{2}, \frac{7+0}{2} \right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2} \right). \text{ Vector director } \overrightarrow{MB} = \left(5 - \frac{3}{2}, 0 - \frac{7}{2} \right) = \left(\frac{7}{2}, -\frac{7}{2} \right).$$

Si multipliquem $\overrightarrow{MB}$ per $\frac{2}{7}$ obtenim el vector director $(1,-1)$ i l'equació de la mitjana és

$$\frac{x-5}{1} = \frac{y}{-1} \Longleftrightarrow \boxed{x+y-5=0}.$$

c) Imposarem que les coordenades dels punts A, B i C satisfaguin l'equació

$$x^2+y^2+mx+ny+p=0.$$

En resulta el sistema $\left\{ \begin{array}{c} 1-m+p=0 \\ 25+5m+p=0 \\ 65+4m+7n+p=0. \end{array} \right.$

Si restem la primera equació de la segona obtenim

$$6m+24=0 \Longrightarrow m=-4 \Longrightarrow p=-4-1=-5 \Longrightarrow n = \frac{-65-4\cdot(-4)-(-5)}{7} = -\frac{44}{7}.$$

Per tant, l'equació de la circumferència és:

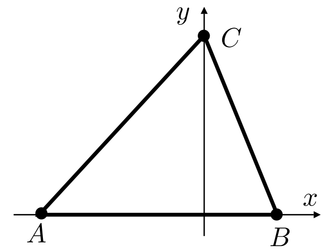
$$\boxed{x^2+y^2-4x-\frac{44}{7}y-5=0 \quad \text{o també} \quad 7x^2+7y^2-28x-44y-35=0}.$$

El centre és: $\left(-\frac{-4}{2}, -\frac{-44/7}{2} \right) = \boxed{\left(2, \frac{22}{7} \right)}$.

El radi és: $\sqrt{a^2+b^2-p} = \sqrt{2^2+\frac{22^2}{7^2}+5} = \sqrt{9+\frac{484}{49}} = \frac{\sqrt{925}}{7} = \boxed{\frac{5\sqrt{37}}{7}}$.

4. Considereu un triangle qualsevol i una referència ortonormal tal que els vèrtexs A, B i C del triangle tenen les coordenades següents:

$$A(a,0),\ \ B(b,0) \text{ i } C(0,c).$$



a) Trobeu les equacions de les seves altures.

b) Demostreu analíticament que aquestes altures tenen un punt en comú.

a) $\overrightarrow{BC} = (-b,c) \Longrightarrow$ Un vector perpendicular a $\overrightarrow{BC}$ és (c,b).

Per tant, l'altura pel punt A té l'equació:

$$\boxed{\frac{x-a}{c} = \frac{y-0}{b} \quad \text{o també} \quad y = \frac{b}{c}(x-a)}\,.$$

$\overrightarrow{AC} = (-a,c) \Longrightarrow$ Un vector perpendicular a $\overrightarrow{AC}$ és (c,a).

Per tant, l'altura pel punt B té l'equació:

$$\boxed{\frac{x-b}{c} = \frac{y-0}{a} \quad \text{o també} \quad y = \frac{a}{c}(x-b)}\,.$$

$\overrightarrow{AB} = (b-a,0) \Longrightarrow$ Un vector perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ és $(0,1)$.

Per tant, l'altura pel punt A té l'equació:

$$\boxed{\frac{x-0}{0} = \frac{y-c}{1} \quad \text{o també} \quad x = 0}\,.$$

b) $x = 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \dfrac{b}{c}(0-a) \\ y = \dfrac{a}{c}(0-b) \end{array} \right. \Longrightarrow y = -\dfrac{ab}{c}\,.$

Per tant, les tres altures tenen un punt en comú i aquest és $\boxed{\left(0\,,\,-\dfrac{ab}{c}\right)}$.