1. Sigui la funció $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$.

a) Utilitzeu la definició de derivada per demostrar que $f'(x) = -\dfrac{1}{(x+2)^2}$, i deduïu-ne els intervals de monotonia.

b) Calculeu $\lim_{x\to -2^-} f(x)$, $\lim_{x\to -2^+} f(x)$ i $\lim_{x\to \pm\infty} f(x)$, i deduïu-ne les equacions de les asímptotes del gràfic de f.

c) Trobeu l'equació de la recta tangent al gràfic de f, paral·lela a la recta d'equació $4x+9y-18=0$.

d) Representeu gràficament la funció f i la recta tangent de l'apartat anterior.

a)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{x+h+2} - \dfrac{1}{x+2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x+2-x-h-2}{(x+h+2)(x+2)h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{(x+h+2)(x+2)h} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(x+h+2)(x+2)} = \frac{-1}{(x+2)^2}. \end{aligned}$$

Per a tot $x \neq -2$, $f'(x) < 0$ perquè la fracció és positiva i està afectada d'un signe negatiu. A més, en $x=-2$ la funció no existeix. Per tant, f és monòtona decreixent en $(-\infty,-2) \cup (-2,+\infty)$.

b) $\displaystyle\lim_{x\to -2^-} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{0^-} = -\infty$, perquè $x < -2 \Longrightarrow x+2 < 0$.

$\displaystyle\lim_{x\to -2^+} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$, perquè $x > -2 \Longrightarrow x+2 > 0$.

Per tant, hi ha asímptota vertical d'equació $x=-2$.

$\displaystyle\lim_{x\to \pm\infty} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{\pm\infty} = 0$. Per tant, hi ha asímptota horitzontal d'equació $y=0$.

c) La recta tangent cercada ha de tenir el mateix pendent que la recta donada. Per tant, el seu pendent ha de ser igual a $-4/9$. Conseqüentment, els punts de tangència $(x, f(x))$ satisfaran $f'(x) = -4/9$.

$$-\frac{1}{(x+2)^2} = -\frac{4}{9} \Longrightarrow (x+2)^2 = \frac{9}{4} \Longrightarrow x = \pm\frac{3}{2} - 2 = \begin{cases} -\dfrac{1}{2} \Longrightarrow f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2}{3} \\ -\dfrac{7}{2} \Longrightarrow f\left(-\dfrac{7}{2}\right) = -\dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

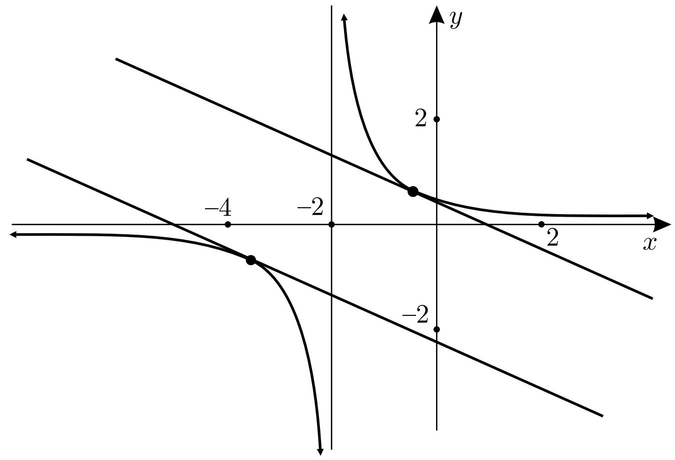
Finalment, les equacions de les rectes tangents seran:

$$y - \frac{2}{3} = -\frac{4}{9}\left(x + \frac{1}{2}\right) \Longleftrightarrow 4x + 9y - 4 = 0.$$
$$y + \frac{2}{3} = -\frac{4}{9}\left(x + \frac{7}{2}\right) \Longleftrightarrow 4x + 9y + 20 = 0.$$

d) De tota la informació anterior i del fet que

$$f(0) = \frac{1}{0+2} = \frac{1}{2}\,,$$

en resulten els gràfics adjunts.



> **2.** Trobeu les funcions derivades de:
>
> a) $a(x) = 4x^3 - 5x^2 + 3x - 2$.
>
> b) $b(x) = 4\sqrt{x} + \dfrac{3}{\sqrt{x}}$.
>
> c) $c(x) = 2\,(3x^2 - 4)^5$.
>
> d) $d(x) = \dfrac{3x-2}{(2x-1)^4}$.

a) $a'(x) = 12x^2 - 10x + 3$.

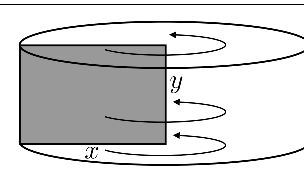
b) $b'(x) = \dfrac{4}{2\sqrt{x}} - \dfrac{3}{2\sqrt{x^3}} = \dfrac{4x-3}{2x\sqrt{x}}$. $\qquad \left[\left(x^{-1/2}\right)' = -\dfrac{1}{2}\,x^{-3/2} = -\dfrac{1}{2\sqrt{x^3}}\right]$

c) $c'(x) = 10(3x^2-4)^4 \cdot 6x = 60x(3x^2-4)^4$.

d) $d'(x) = \dfrac{3(2x-1)^4 - 4(2x-1)^3 \cdot 2(3x-2)}{(2x-1)^8} = \dfrac{3(2x-1) - 8(3x-2)}{(2x-1)^5} = \dfrac{-18x+13}{(2x-1)^5}$.

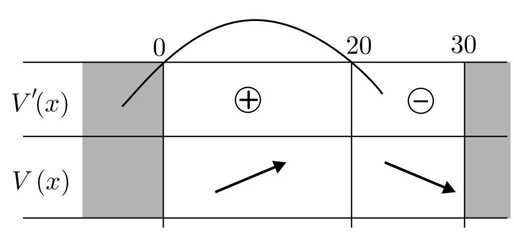
> **3.** Un rectangle de perímetre 60 unitats gira al voltant d'un dels seus costats i genera un cilindre de radi de la base igual a l'altre costat.
>
> a) Demostreu que el volum del cilindre generat és $V(x) = \pi\,(30x^2 - x^3)$, en què x és la longitud del costat que gira.
>
> b) Trobeu raonadament els costats del rectangle que genera el cilindre de volum màxim.

a) $\left.\begin{array}{l} V(x,y) = \pi x^2 y \\ x + y = 30 \end{array}\right\} \Longrightarrow V(x) = \pi x^2(30-x) = \pi(30x^2 - x^3)$



b) El domini de la funció és $0 < x < 30$. Per a valors més grans no es pot construir el rectangle amb la condició que el seu perímetre sigui 60. Trobarem el valor màxim de $V(x)$ amb l'estudi de la derivada i del seu signe:

$$V'(x) = \pi(60x - 3x^2)$$
$$V'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \text{ o bé } x = 20.$$



Observem que, a partir de l'estudi de la monotonia a l'interval $]0, 30[$, el rectangle de costats $x = 20$ i $y = 10$ unitats genera el cilindre de volum màxim $V(20) = 4000\pi$.