IES Pons d'Icart
MATEMÀTIQUES – 1R BAT AB/2 — 13/V/2005
Funcions II — $2+3+2+3$

1. Resoleu una de les tres qüestions següents:

a) Donada la funció $f(x) = \sqrt{2x+1}$, utilitzeu la definició de derivada per demostrar que $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$.

b) Demostreu que la derivada de la funció $g(x) = \sin(3x)\cdot\cos(3x)$ és $g'(x) = 3\cos(6x)$, i trobeu els seus extrems locals.

c) Sigui la funció $f(x) = x^2$. Considereu la recta tangent a la paràbola associada en el punt (x_0, x_0^2). Demostreu que el vèrtex d'aquesta paràbola és el punt mitjà entre el punt $(0, x_0^2)$ i el tall de la tangent amb l'eix d'ordenades.

a)

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2x+2h+1}-\sqrt{2x+1}}{h}\cdot\frac{\sqrt{2x+2h+1}+\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+2h+1}+\sqrt{2x+1}} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2x+2h+1-2x-1}{\left(\sqrt{2x+2h+1}+\sqrt{2x+1}\right)h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h}{\left(\sqrt{2x+2h+1}+\sqrt{2x+1}\right)h} = \\
&= \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}.
\end{aligned}
$$

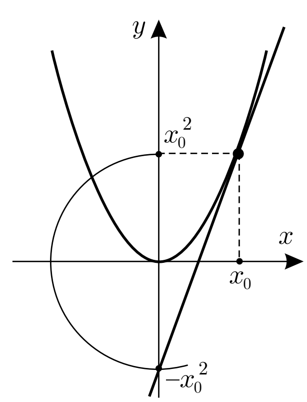
b) $g(x) = \sin(3x)\cdot\cos(3x) = \dfrac{\sin(6x)}{2} \Longrightarrow g'(x) = \dfrac{1}{2}\cos(6x)\cdot 6 = 3\cos(6x)$.

Tots els punts en què la derivada val zero són extrems locals perquè $\cos(6x)$ canvia de signe i, per tant, hi ha un canvi en la monotonia de $g(x)$. Cerquem aquests punts:

$$g'(x) = 0 \Longleftrightarrow \cos(6x) = 0 \Longleftrightarrow 6x = \frac{\pi}{2} + n\cdot\pi \Longleftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + n\cdot\frac{\pi}{6}.$$

c) Equació de la recta tangent en el punt (x_0, x_0^2):

$$y - x_0^2 = 2x_0(x - x_0), \quad \text{és a dir} \quad y = 2x_0x - x_0^2.$$



El punt de tall d'aquesta recta amb l'eix OY és $(0, -x_0^2)$, i el punt mitjà de l'enunciat és

$$\left(\frac{0+0}{2}, \frac{x_0^2 + (-x_0)^2}{2}\right) = (0, 0).$$

2. Trobeu la funció derivada de les funcions següents:

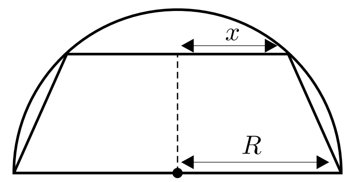
a) $a(x) = (x^5 - 4x^2)^3$. b) $b(x) = \dfrac{x}{(x^2-1)^3}$. c) $c(x) = \arctan\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

a) $a'(x) = 3(x^5 - 4x^2)^2 \cdot (5x^4 - 8x)$.

b) $b'(x) = \dfrac{(x^2-1)^3 - 3(x^2-1)^2 \cdot 2x \cdot x}{(x^2-1)^6} = \dfrac{(x^2-1-6x^2)}{(x^2-1)^4} = \dfrac{-5x^2-1}{(x^2-1)^4}$.

c) $c'(x) = \dfrac{1}{1+\frac{1}{x^4}} \cdot \dfrac{-2}{x^3} = \dfrac{-2x^4}{(x^4+1)x^3} = \dfrac{-2x}{x^4+1}$.

3. Considereu els trapezis isòsceles inscrits en un semicercle de radi R, de manera que el costat paral·lel més gran és el diàmetre.

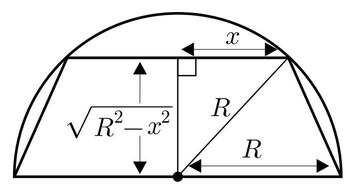


a) Demostreu que si x és la meitat del costat paral·lel més petit, la superfície $S(x)$ del trapezi és

$$S(x) = (R+x)\sqrt{R^2-x^2}\,.$$

b) Trobeu raonadament l'àrea del trapezi més gran.

a) La distància entre els costats paral·lels del trapezi és, pel teorema de Pitàgoras, $\sqrt{R^2-x^2}$. Llavors, l'àrea és



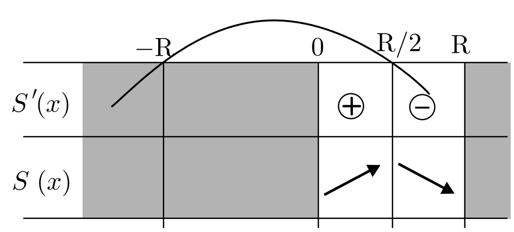
$$S(x) = \frac{2R+2x}{2} \cdot \sqrt{R^2-x^2} = (R+x) \cdot \sqrt{R^2-x^2}\,.$$

b) El domini de la funció és $0 < x < R$. Per a $x = 0$ s'obté un triangle i per a $x = R$ un segment. Trobarem el valor màxim de $S(x)$ amb l'estudi de la derivada i del seu signe:

$$\begin{aligned} S'(x) &= \sqrt{R^2-x^2} + \frac{-2x}{2\sqrt{R^2-x^2}} \cdot (R+x) = \frac{R^2-x^2-Rx-x^2}{\sqrt{R^2-x^2}} = \\ &= \frac{-2x^2-Rx+R^2}{\sqrt{R^2-x^2}}\,. \end{aligned}$$

$$S'(x) = 0 \iff x = \frac{R \pm \sqrt{R^2+8R^2}}{-4} = \frac{R \pm 3R}{-4} = \begin{cases} -R \\ \dfrac{R}{2}\,. \end{cases}$$

De l'estudi de la monotonia a l'interval $]0, R[$, s'obté el trapezi d'àrea màxima quan $x = \dfrac{R}{2}$ i el seu valor és $S\left(\dfrac{R}{2}\right) = \dfrac{3R}{2} \cdot \sqrt{\dfrac{3R^2}{4}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}\,R^2$.



4. Sigui la funció $f(x) = \dfrac{x^2+2x}{x+1}$. Sabem que, —no cal que ho calculeu—,

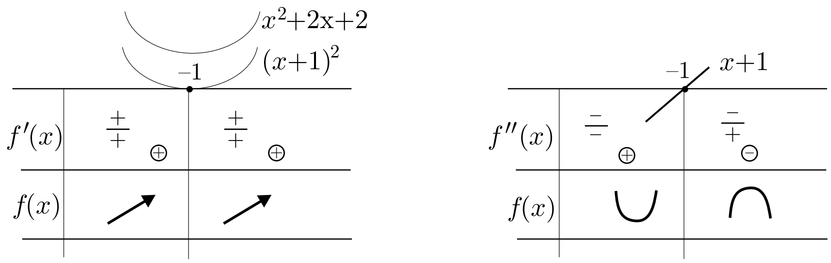
$$f'(x) = \frac{x^2+2x+2}{(x+1)^2} \qquad \text{i} \qquad f''(x) = \frac{-2}{(x+1)^3}\,.$$

a) Estudieu els signes de les derivades i interpreteu-los.

b) Cerqueu les seves asímptotes i els talls amb els eixos.

c) Dibuixeu el gràfic de la funció a partir de la informació obtinguda en els apartats anteriors.

a) Observem que en la segona derivada el signe del numerador és sempre negatiu.



Monòt.creix.: $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$. Cònc.amunt: $(-\infty,-1)$. Cònc.avall: $(-1,+\infty)$.

b) Asímptota vertical:
$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2+2x}{x+1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to -1^-} \frac{x^2+2x}{x+1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{x=-1}.$$

Asímptota oblíqua: $y = mx+n$

$$\left.\begin{array}{l} m = \displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+2x}{(x+1)x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1+\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1+0}{1+0} = 1 \\ n = \displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+2x}{x+1} - x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1}{1+0} = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{y=x+1}.$$

Els talls amb els eixos són $(0,0)$ i $(-2,0)$.

c)