IES Pons d'Icart

MATEMÀTIQUES – 1R BAT AB2 — 19/X/2004

Nombres, equacions i polinomis — 2+(0.5+0.75+0.75)+3+1+2

1. Resoleu tres de les quatre qüestions següents:

a) Raoneu si el producte de dos nombres irracionals és sempre irracional.

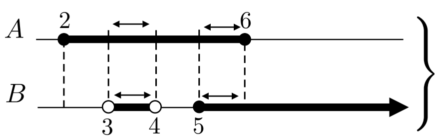
b) Si $A = [\,2, 6\,]$ i $B = (\,3, 4\,) \cup [\,5, +\infty\,)$, expresseu $A \cap B$ en forma d'intervals.

c) Raoneu quantes arrels reals té el polinomi $p(x) = x^4 + bx^2 + c$ si se sap que $c < 0$.

d) Un polinomi de segon grau amb coeficients enters té una arrel igual a $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$. Trobeu el polinomi. Indicació: Podeu començar amb l'expressió $x = \dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$.

a) Aquest producte $\boxed{\text{no és sempre racional}}$. Per justificar aquesta afirmació, n'hi ha prou amb mostrar un exemple. Els nombres $\sqrt{2}$ i $\sqrt{8}$ sabem que són irracionals, en canvi el seu producte, $\sqrt{8} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{16} = 4$, és enter.

b) El conjunt $A \cap B$ està format pels comuns als dos intervals A i B. Per tant,



$$\Longrightarrow \boxed{A \cap B = (3, 4) \cup [5, 6]}.$$

c) Si fem $x^2 = z$, el polinomi $p(x)$ es transforma en $p(z) = z^2 + bz + c$. Les arrels z_1, z_2 d'aquest polinomi satisfan $z_1 \cdot z_2 = c < 0$. Això implica que $z_1 > 0$ i $z_2 < 0$. És a dir, les arrels reals de $p(x)$ són aquelles que satisfan alguna de les condicions

$$x^2 = z_1 > 0 \quad \text{o} \quad x^2 = z_2 < 0. \text{ Llavors, només pot ser } x^2 = z_1 > 0.$$

Per tant, $\boxed{p(x) \text{ té dues arrels reals diferents, } x = \pm\sqrt{z_1}\,, \text{ i només dues.}}$

d) Hem de trobar una condició per a la x en què no apareguin radicals, de la qual obtindrem el polinomi $p(x)$ cercat.

$$\begin{aligned} x = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \quad &= \quad \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = 3 + 2\sqrt{2} \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow (x-3)^2 = (2\sqrt{2})^2 \Longrightarrow x^2 - 6x + 9 = 8 \Longrightarrow x^2 - 6x + 1 = 0 \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow \boxed{p(x) = a \cdot (x^2 - 6x + 1)}, \text{ en què } a \text{ és qualsevol nombre real.} \end{aligned}$$

2. Simplifiqueu i racionalitzeu quan calgui de manera que en els resultats no apareguin exponents negatius ni fraccionaris. (No utilitzeu els nombres decimals ni la calculadora):

$$\text{a)}\sqrt[8]{\frac{0,0625^2}{81^{-2}}} \qquad \text{b)}\frac{\sqrt[8]{a^5}\ \sqrt[6]{a^2b}}{\sqrt[4]{(a^2b)^{-3}}} \qquad \text{c)}\sqrt{5} + \sqrt{\frac{144}{125}} - \frac{\sqrt{45}}{2}$$

a) $\sqrt[8]{\dfrac{0,0625^2}{81^{-2}}} = \left(\dfrac{625^2 \cdot 81^2}{10000^2}\right)^{\frac{1}{8}} = \left(\dfrac{5^8 \cdot 3^8}{2^8 \cdot 5^8}\right)^{\frac{1}{8}} = \left(\dfrac{3^8}{2^8}\right)^{\frac{1}{8}} = \boxed{\dfrac{3}{2}}.$

b) $\dfrac{\sqrt[8]{a^5}\;\sqrt[6]{a^2b}}{\sqrt[4]{(a^2b)^{-3}}} = a^{\frac{5}{8}+\frac{2}{6}+\frac{6}{4}}\cdot b^{\frac{1}{6}+\frac{3}{4}} = a^{\frac{15+8+36}{24}}\cdot b^{\frac{2+9}{12}} = a^{\frac{59}{24}}\cdot b^{\frac{11}{12}} = a^2\;\sqrt[24]{a^{11}}\;\sqrt[12]{b^{11}} = \boxed{a^2\;\sqrt[24]{a^{11}\,b^{22}}}$.

c) $$\sqrt{5}+\sqrt{\frac{144}{125}}-\frac{\sqrt{45}}{2} = \sqrt{5}+\frac{12}{5\sqrt{5}}-\frac{3\sqrt{5}}{2} = \left(1+\frac{12}{25}-\frac{3}{2}\right)\sqrt{5}$$
$$= \frac{50+24-75}{50}\cdot\sqrt{5} = \boxed{-\frac{\sqrt{5}}{50}}.$$

3. Donat el polinomi $p(x) = x^4+x^3+x^2+3x-6$,

a) Trobeu les seves arrels i la seva descomposició factorial.

b) Resoleu la inequació $p(x)\geq 0$, amb l'ajut dels gràfics de rectes i/o paràboles.

c) Simplifiqueu $\dfrac{5x+2}{x^3+x^2-2x}-\dfrac{28}{p(x)}$.

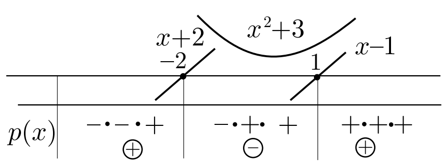
a) Apliquem la regla de Ruffini, per trobar les arrels i els factors. Els candidats enters a ser arrels de $p(x)$ són els divisors del terme independent -6.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 1 & 1 & 3 & -6 \\ 1 & & 1 & 2 & 3 & 6 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & 6 & 0 \\ -2 & & -2 & 0 & 6 & \\ \hline & 1 & 0 & 3 & 0 & \end{array}$$

Les arrels del polinomi són $\boxed{x=1, x=-2}$, i l'últim polinomi x^2+3 no té arrels. Així, la descomposició és

$$\boxed{p(x) = (x-1)(x+2)(x^2+3)}.$$

b) Presentem l'estudi del signe mitjançant l'estudi dels tres factors per separat:



D'aquí en resulta $p(x)\geq 0 \iff x\leq -2$ o $x\geq 1$, és a dir

$$\boxed{x\in(-\infty,-2\,]\cup[\,1,+\infty)}$$

c) $x^3+x^2-2x = x(x^2+x-2)$. Si cerquem les arrels de x^2+x-2 obtenim:

$$x = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1\pm 3}{2} = \left.\begin{array}{l} 1 \\ -2 \end{array}\right\} \Longrightarrow x^2+x-2 = (x-1)(x+2).$$

Per tant,

$$\text{m.c.m.}\,\big(x^3+x^2-2x, p(x)\big) = x(x-1)(x+2)(x^2+3).$$

Consegüentment,

$$\frac{5x+2}{x^3+x^2-2x}-\frac{28}{p(x)} = \frac{(5x+2)(x^2+3)-28x}{x(x-1)(x+2)(x^2+3)} = \frac{5x^3+2x^2-13x+6}{x(x-1)(x+2)(x^2+3)} \overset{(*)}{=}$$
$$\overset{(*)}{=} \frac{(x-1)(x+2)(5x-3)}{x(x-1)(x+2)(x^2+3)} = \boxed{\frac{5x-3}{x^3+3x}}.$$

(∗) Actuem amb la regla de Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr} & 5 & 2 & -13 & 6 \\ 1 & & 5 & 7 & -6 \\ \hline & 5 & 7 & -6 & 0 \\ -2 & & -10 & 6 & \\ \hline & 5 & -3 & 0 & \end{array}$$

4. Resoleu l'equació: $\quad 3\sqrt{x-5}+2x=9.$

$$3\sqrt{x-5}+2x=9 \implies 3\sqrt{x-5}=9-2x \implies 9(x-5)=81-36x+4x^2 \implies$$
$$\implies 4x^2-45x+126=0 \implies$$

$$\implies x=\frac{45\pm\sqrt{2025-2016}}{8}=\frac{45\pm 3}{8}=\begin{cases}6\\[4pt] \dfrac{21}{4}\end{cases}$$

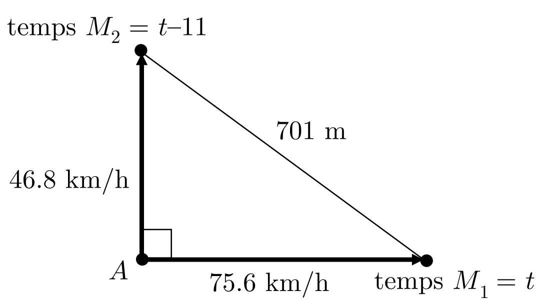
Comprovació:

$x=6$ no és solució perquè $3\sqrt{6-5}+2\cdot 6=3\cdot 1+12=15\neq 9$

$x=\dfrac{21}{4}$ no és solució perquè $3\cdot\sqrt{\dfrac{21}{4}-5}+2\cdot\dfrac{21}{4}=3\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{21}{2}=12\neq 9$

$\boxed{\text{L'equació no té solucions reals.}}$

5. Un mòbil M_1 passa per un punt A seguint una trajectòria rectilínia. Després de 11 segons passa per A un altre mòbil M_2, seguint una trajectòria rectilínia i perpendicular a la de M_1. També se sap que la velocitat de M_1 és constant i igual a 75.6 km/h, i la de M_2 és constant i igual a 46.8 km/h. Calculeu el temps en segons que ha de transcórrer a partir del pas de M_2 per tal que la separació entre els dos mòbils sigui de 701 m.



75.6 km/h $=75.6\cdot\dfrac{1000}{3600}$ m/s $=21$ m/s

46.8 km/h $=46.8\cdot\dfrac{1000}{3600}$ m/s $=13$ m/s

$t=$ temps de M_1 des de la posició inicial en A fins la posició final.

$t-11=$ temps de M_2 des de la posició inicial en A fins la posició final.

Les posicions inicial i finals dels mòbils configuren un triangle rectangle al qual podem aplicar el teorema de Pitàgores:

$$[13(t-11)]^2+[21t]^2=701^2 \iff 169t^2-3718t+20449+441t^2=491401 \iff$$
$$\iff 610t^2-3718t-470952=0 \iff 305t^2-1859t-235476=0 \iff$$

$$\iff t=\frac{1859\pm\sqrt{3455881+287061120}}{610}=\frac{1859\pm 17051}{610}=\begin{cases}\boxed{31}\\[4pt] -\dfrac{15192}{305}\end{cases}$$

Per tant, el temps transcorregut des del pas de M_2 pel punt A és $t-11=31-11=\boxed{20\text{ s}}$.