Heu de resoldre l'exercici 1 i quatre exercicis entre els altres cinc.

**1.** Simplifiqueu i racionalitzeu quan calgui de manera que en els resultats no apareguin exponents negatius ni fraccionaris. (No utilitzeu els nombres decimals ni la calculadora):

a) $\dfrac{\sqrt[4]{x^5y^3\sqrt{xy}}}{\sqrt[6]{x^7y^8}}$ b) $\dfrac{5}{\sqrt{5}}+\dfrac{8}{\sqrt{5}-1}$.

a) $$\frac{\sqrt[4]{x^5y^3\sqrt{xy}}}{\sqrt[6]{x^7y^8}}=x^{\frac{5}{4}+\frac{1}{8}-\frac{7}{6}}\cdot y^{\frac{3}{4}+\frac{1}{8}-\frac{8}{6}}=x^{\frac{30+3-28}{24}}\cdot y^{\frac{18+3-32}{24}}=\frac{x^{\frac{5}{24}}}{y^{\frac{11}{24}}}=\sqrt[24]{\frac{x^5}{y^{11}}}=\boxed{\frac{\sqrt[24]{x^5\,y^{13}}}{y}}.$$

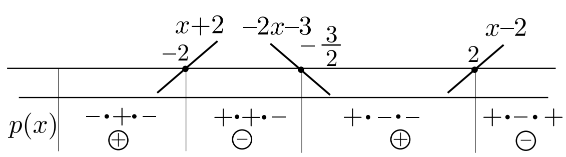
b) $$\frac{5}{\sqrt{5}}+\frac{8}{\sqrt{5}-1}=\sqrt{5}+\frac{8}{\sqrt{5}-1}=\frac{5-\sqrt{5}+8}{\sqrt{5}-1}=\frac{13-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}=$$
$$=\frac{12\sqrt{5}+8}{4}=\boxed{3\sqrt{5}+2}.$$

**2.** Sigui el polinomi $p(x)=-2x^3-3x^2+8x+12$. Trobeu els valors de la $x$ tals que $p(x)>0$, amb l'ajut dels gràfics de rectes i/o paràboles.

Cerquem-ne els factors amb l'ajut de la regla de Ruffini:

$$\left.\begin{array}{r|rrrr} & -2 & -3 & 8 & 12\\ 2 & & -4 & -14 & -12\\ \hline & -2 & -7 & -6 & 0\\ -2 & & 4 & 6 & \\ \hline & -2 & -3 & 0 & \end{array}\right\}\Longrightarrow$$

- La descomposició en factors és $p(x)=(x+2)(-2x-3)(x-2)$.
- Dels gràfics dels tres factors en resulta: $p(x)>0\iff x<-2$ o $-\dfrac{3}{2}<x<2$.




és a dir
$$\boxed{x\in(-\infty,-2)\cup\left(-\frac{3}{2},2\right)}$$

**3.** Resoleu l'equació: $\dfrac{x^2+1}{x^2-3x}-\dfrac{20}{x^2-9}=1$.

$$\frac{x^2+1}{x^2-3x}-\frac{20}{x^2-9}=1\iff\frac{(x^2+1)(x+3)-20x}{x(x-3)(x+3)}=1\iff$$
$$\Longrightarrow x^3+3x^2+x+3-20x=x^3-9x\iff 3x^2-10x+3=0\iff$$
$$\iff x=\frac{5\pm\sqrt{25-9}}{3}=\frac{5\pm4}{3}=\begin{cases}3\\ \boxed{\frac{1}{3}}\end{cases}$$

$x=3$ no pot ser perquè els denominadors de l'equació inicial han de ser diferents de zero.

**4.** El coeficient del terme quart del polinomi que resulta del desenvolupament de $\left(x^2-3x\right)^n$, val $-270$. Calculeu el valor de $n \in \mathbb{N}$.

$$\left(x^2-3x\right)^n \quad\Longrightarrow\quad T_4=\binom{n}{3}(x^2)^{n-3}(-3x)^3 \Longrightarrow \text{coeficient} = \binom{n}{3}(-3)^3=-270 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot(-27)=-270 \Longrightarrow n^3-3n^2+2n-60=0.$$

Apliquem la regla de Ruffini per trobar-ne les arrels:

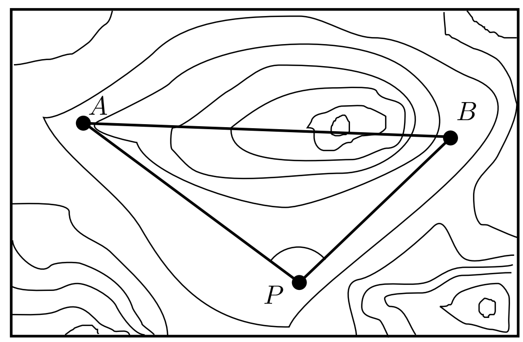
$$\left.\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 2 & -60 \\ 5 & & 5 & 10 & 60 \\ \hline & 1 & 2 & 12 & 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{n=5}.$$

No hi ha cap més solució perquè el discriminant del polinomi $n^2+2n+12$ és $2^2-4\cdot 12<0$.

**5.** Es vol construir un túnel que connecti en línia recta les poblacions $A$ i $B$. Des del punt $P$, situat a la mateixa altitud que $A$ i $B$, es visualitzen les dues poblacions i es poden prendre les mesures següents:

$PA = 2\,\text{km}$, $PB = 1.2\,\text{km}$ i $\measuredangle APB = 120°$.

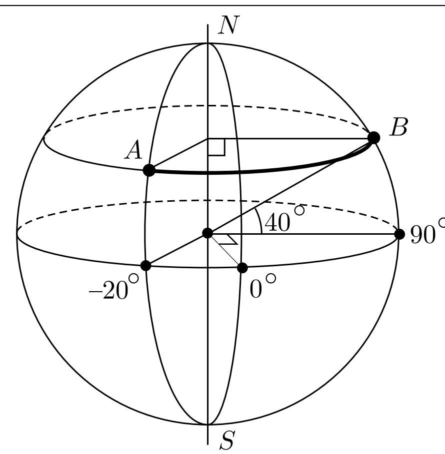
Trobeu la longitud del túnel $AB$.




Apliquem el teorema del cosinus sobre el triangle $APB$:

$$\begin{aligned} AB^2 &= PA^2+PB^2-2\cdot PA\cdot PB\cdot\cos(\measuredangle APB)=2^2+1.2^2-2\cdot1.2\cdot2\cdot\cos 120° = \\ &= 5.44-4.8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=5.44+2.4=7.84\ \text{km}^2 \Longrightarrow AB=\sqrt{7.84\ \text{km}^2}=\boxed{2.8\ \text{km}}. \end{aligned}$$

**6.** Dos punts de l'esfera de la Terra tenen la mateixa latitud de 40°Nord. Les seves longituds geogràfiques són $A$ : 20°Oest, $B$ : 90°Est. Si suposem el radi de la Terra constant i igual a 6370 km, calculeu la distància entre $A$ i $B$ seguint el camí més curt pel paral·lel que comparteixen.




En la figura adjunta observem el triangle $OPB$ rectangle i l'arc $AB$ d'angle central $90°+20°=110°$ i radi $r=6370\cdot\cos 40°$. Llavors,

$$\frac{\text{arc}(AB)}{\pi r}=\frac{110°}{180°}\Longrightarrow \text{arc}(AB)=$$

$$=\frac{110\pi\cdot 6370\cdot\cos 40°}{180°}=\boxed{9368.357\ \text{km}}.$$