IES Pons d'Icart

MATEMÀTIQUES – 1R BAT A // RECUPERACIÓ 15/I/2007

Nombres, polinomis i trigonometria $1.3 + 1.3 + 1.4 + 3 + 3$

1. Simplifiqueu sense calculadora $\left(\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^2$.

$$\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{5+2\sqrt{6}}{5-2\sqrt{6}} \cdot \frac{5+2\sqrt{6}}{5+2\sqrt{6}} = \frac{25+24+20\sqrt{6}}{25-24} = \boxed{49+20\sqrt{6}}.$$

2. Trobeu tots els angles x tals que $\cos(4x) = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.

Amb la calculadora i observant la circumferència trigonomètrica obtenim:

$$4x = \begin{cases} 105^\circ + n \cdot 360^\circ \\ 255^\circ + n \cdot 360^\circ \end{cases} \Longrightarrow \boxed{x = \begin{cases} 26^\circ\, 15' + n \cdot 90^\circ \\ 63^\circ\, 45' + n \cdot 90^\circ \end{cases}}$$

3. Esbrineu si és cert que el terme vuitè del desenvolupament de $\left(2x - \dfrac{1}{\sqrt{x}^3}\right)^9$ és igual a $\dfrac{-144\sqrt{x}}{x^9}$.

És cert, perquè

$$T_8 = \binom{9}{7}(2x)^2\left(-\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)^7 = -\frac{9\cdot 8}{2}\cdot\frac{4x^2}{x^7\,x^3\,\sqrt{x}} = -\frac{9\cdot 4\cdot 4x^2}{x^{10}\,\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \boxed{\frac{-144\sqrt{x}}{x^9}}.$$

- **Trieu i resoleu una de les dues qüestions següents:**

4A. Sigui el polinomi $p(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$.

a) Trobeu-ne les arrels i la descomposició factorial.

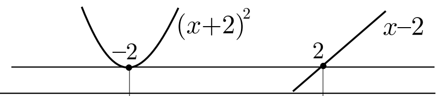
b) Trobeu els valors de la x tals que $p(x) < 0$, amb l'ajut de la seva descomposició i dels gràfics de rectes i/o paràboles.

4B. Resoleu l'equació:

$$\frac{x+4}{x^5 - 2x^3 - 8x} + \frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{x^2-2x}.$$

4A. Apliquem la regla de Ruffini, per trobar-ne les arrels i els factors.

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 2 & -4 & -8 \\
2 & & 2 & 8 & 8 \\
\hline
 & 1 & 4 & 4 & 0 \\
-2 & & -2 & -4 & \\
\hline
 & 1 & 2 & 0 &
\end{array}$$

Gràfic dels factors			
Signe dels factors	$+\cdot-$	$+\cdot-$	$+\cdot+$
Signe de $p(x)$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$
Ordre dels factors	$(x+2)^2\,(x-2)$		

Per tant, $p(x) = (x+2)^2(x-2)$.

$\boxed{p(x) < 0 \iff (-\infty, -2) \cup (-2, 2)}$.

4B. Cerquem el mínim comú múltiple dels denominadors:

– **Primer denominador**

$x^5 - 2x^3 - 8x = x(x^4 - 2x^2 - 8)$. Si cerquem les arrels del segon factor:

$$x^4 - 2x^2 - 8 = 0 \implies x^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{1} = \frac{1 \pm 3}{1} = \begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases}$$

En no existir arrels per a $x^2 + 2$, s'obté la descomposició

$$x^5 - 2x^3 - 8x = x(x^2 - 4)(x^2 + 2) = x(x-2)(x+2)(x^2+2).$$

– **Segon denominador** $\quad x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$.

– **Tercer denominador** $\quad x^2 - 2x = x(x-2)$.

Llavors, el mínim comú múltiple és:

$$x^5 - 2x^3 - 8x = x(x-2)(x+2)(x^2+2).$$

Multipliquem els dos costats de l'equació pel m.c.m. i s'obté:

$$x + 4 + x^3 + 2x = x^3 + 2x^2 + 2x + 4$$

$$\iff 2x^2 - x = 0 \iff x(2x-1) = 0 \iff x = \begin{cases} 0 \\ \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

L'única solució és $\boxed{x = \dfrac{1}{2}}$, perquè $x = 0$ no satisfà l'equació inicial.

- **Trieu i resoleu una de les dues qüestions següents:**

5A. a) Demostreu que $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$, a partir de les identitats
$$\begin{cases} \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1\,. \end{cases}$$

b) Resoleu l'equació $\cos^2(2x) + 2\sin^2 x = 2$, amb l'ajut de la fórmula que s'havia de demostrar a l'apartat anterior.

5B. En un pentàgon regular d'àrea 16 cm^2 hem inscrit un cercle. Calculeu l'àrea de la regió del pentàgon exterior al cercle.

5A. a) A partir de les dues igualtats obtenim

$$\frac{1-\cos(2x)}{2} = \frac{1-(\cos^2 x - \sin^2 x)}{2} = \frac{\sin^2 x + \sin^2 x}{2} = \frac{2\sin^2 x}{2} = \sin^2 x.$$

b) L'equació es transforma en

$$\cos^2(2x) + 1 - \cos(2x) = 2 \iff \cos^2(2x) - \cos(2x) - 1 = 0$$

$$\iff \cos(2x) = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2} = \begin{cases} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\,. \end{cases}$$

Només és admissible la segona solució, perquè $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$. Per tant,

$$2x = \begin{cases} 128^\circ\, 10'\, 22'' + n \cdot 360^\circ \\ 231^\circ\, 49'\, 38'' + n \cdot 360^\circ \end{cases} \Longrightarrow \boxed{x = \begin{cases} 64^\circ\, 5'\, 11'' + n \cdot 180^\circ \\ 115^\circ\, 54'\, 49'' + n \cdot 180^\circ \end{cases}}$$

5B. Cerquem el radi r del cercle i després l'àrea

$$\begin{aligned} 16 &= 5 \cdot \frac{x^2 \cdot \sin 72^\circ}{2} \Longrightarrow r = x \cdot \cos 36^\circ \\ &= \cos 36^\circ \cdot \sqrt{\frac{32}{5 \cdot \sin 72^\circ}} \Longrightarrow \text{àrea} = 16 - \frac{32\pi \cos^2 36^\circ}{5 \sin 72^\circ} \\ &= \boxed{16 - \frac{16\pi}{5 \tan 36^\circ} \approx 2.163\ \text{cm}^2} \end{aligned}$$