IES Pons d'Icart
Matemàtiques – 1r BAT A — 2/III/2007
Nombres complexos i geometria afí — $2 + 1.5 + 1.5 + 2 + 3$

1. Calculeu:

a) $\sqrt[6]{-64}$. (Expresseu el resultat en forma binòmica.)

b) El nombre k real tal que les parts real i imaginària de $z = \dfrac{k^2+i}{2+k\,i}$ són iguals.

a) Expressem el nombre $z = \sqrt[6]{-64}$ en forma polar r_α. En ser la part real negativa i no tenir part imaginària tenim $z = 64_{180^\circ}$. També, sabem que:

$$\sqrt[6]{r_\alpha} = \left(\sqrt[6]{r}\right)_{\frac{\alpha + k\,360^\circ}{6}}, \quad \text{en què } k = 0,1,2,3,4,5.$$

$$z = 64_{180^\circ} \Longrightarrow \sqrt[6]{z} = \boxed{\begin{array}{lll}
\left(\sqrt[6]{64}\right)_{30^\circ} = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\,i\right) & = & \sqrt{3} + i \\
\left(\sqrt[6]{64}\right)_{90^\circ} = 2\,(0 + i) & = & 2\,i \\
\left(\sqrt[6]{64}\right)_{150^\circ} = 2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\,i\right) & = & -\sqrt{3} + i \\
\left(\sqrt[6]{64}\right)_{210^\circ} = 2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\,i\right) & = & -\sqrt{3} - i \\
\left(\sqrt[6]{64}\right)_{270^\circ} = 2\,(0 - i) & = & -2\,i \\
\left(\sqrt[6]{64}\right)_{330^\circ} = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\,i\right) & = & \sqrt{3} - i
\end{array}}$$

b) $z = \dfrac{k^2+i}{2+k\,i} \cdot \dfrac{2-k\,i}{2-k\,i} = \dfrac{2k^2+k}{4+k^2} + \dfrac{-k^3+2}{4+k^2}\,i$. Imposem que $Re(z) = Im(z)$ s'obté,

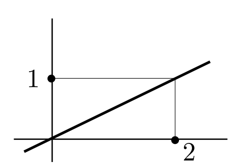
$$\frac{2k^2+k}{4+k^2} = \frac{-k^3+2}{4+k^2} \Longrightarrow k^3 + 2k^2 + k - 2 = 0.$$

Anomenem $p(k) = k^3 + 2k^2 + k - 2$. Es comprova aplicant la regla de Ruffini que no té cap arrel entera. Però, en ser $p(k)$ de tercer grau ha d'existir una arrel com a mínim. En podem trobar una:

$$p(0) = -2 \quad \text{i} \quad p(1) = 2 \Longrightarrow \boxed{\text{existeix un valor } k \in (0,1) \text{ tal que } p(k) = 0}.$$

2. Representeu gràficament les solucions de l'equació $(i-2)z + (i+2)\bar{z} = 0$.
Indicació: Escriviu $z = x + y\,i$ i simplifiqueu l'expressió que en resulta.

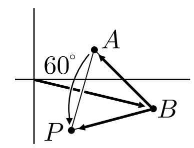
$$\begin{aligned}
&(i-2)z + (i+2)\bar{z} = 0 \\
&\Longrightarrow (-2x-2y) + (x-2y)i + (2x+y) + (-2y+x)i = 0 \\
&\Longrightarrow 2(x-2y)\,i = 0 \Longrightarrow \boxed{x - 2y = 0}.
\end{aligned}$$



3. Dos vèrtexs d'un triangle equilàter es troben en els punts $A(2,1)$ i $B(4,-1)$. Calculeu les coordenades del tercer vèrtex, si sabeu que està en el quart quadrant.

Anomenem P el vèrtex que volem trobar. En ser $\overrightarrow{BA} = (2-4, 1-(-1)) = (-2,2)$, tenim

$$\begin{aligned} P &= B + \overrightarrow{BP} = B + \mathcal{G}_{B,60^\circ}\left(\overrightarrow{BA}\right) = (4-i) + 1_{60^\circ}(-2+2i) \\ &= (4-i) + \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\, i\right)(-2+2i) \\ &= (4,-1) + \left(-1-\sqrt{3}, -\sqrt{3}+1\right) = \boxed{\left(3-\sqrt{3}, -\sqrt{3}\right)}. \end{aligned}$$



4. Considereu la recta d'equació $\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{2} = 1$. Trobeu totes les seves equacions.

L'equació que ens donen és la canònica i ens informa que la recta passa pels punts $A(4,0)$ i $B(0,2)$. Per tant, per calcular les equacions, podem considerar el vector director

$$\overrightarrow{AB} = (0,2) - (4,0) = (-4,2) \quad \text{o també} \quad \vec{v} = -\frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB} = (2,-1).$$

- Vectorial: $(x,y) = (0,2) + \lambda(2,-1)$.
- Paramètriques: $\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 2 - \lambda. \end{cases}$
- Contínua: $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-2}{-1}$.
- Punt-pendent: $y - 2 = -\dfrac{1}{2}\, x$.
- Explícita: $y = -\dfrac{1}{2}\, x + 2$.
- Implícita: $x + 2y - 4 = 0$.

5. Considereu el triangle de vèrtexs $A(-1,-2)$, $B(3,0)$ i $C(1,5)$.

a) Trobeu l'equació implícita de la recta que passa pel seu baricentre i talla el costat AC per un punt P tal que $P = A + \dfrac{2}{3}\,\overrightarrow{AC}$.

b) Trobeu les coordenades del vector $\vec{v} = (-4,2)$ en la base $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ i comproveu gràficament el resultat.

a) Primerament cercarem el baricentre i el punt P.

- Baricentre: $\left(\dfrac{-1+3+1}{3}, \dfrac{-2+0+5}{3}\right) = (1,1)$.
- $P = A + \dfrac{2}{3}\,\overrightarrow{AC} = (-1,-2) + \dfrac{2}{3}\,(1-(-1), 5-(-2)) = (-1,-2) + \left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{14}{3}\right) = \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{8}{3}\right)$.

La recta que passa pels dos punts trobats és:

$$\frac{x-1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{y-1}{1-\frac{8}{3}} \iff \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-5} \iff \boxed{5x + 2y - 7 = 0}.$$

b) $\overrightarrow{AB} = (3-(-1), 0-(-2)) = (4,2)$ i $\overrightarrow{AC} = (1-(-1), 5-(-2)) = (2,7)$.

Presentem els vectors en una base $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ qualsevol.

$$\begin{aligned} \vec{v} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} &\iff (-4,2) = \alpha(4,2) + \beta(2,7) \\ &\iff (-4,2) = (4\alpha + 2\beta, 2\alpha + 7\beta) \\ &\iff \left.\begin{aligned} -4 &= 4\alpha + 2\beta \\ 2 &= 2\alpha + 7\beta \end{aligned}\right\} \implies \boxed{\beta = \frac{2}{3},\ \alpha = -\frac{4}{3}}. \end{aligned}$$