IES Pons d'Icart

MATEMÀTIQUES – 1R BAT A 16/III/2007

Nombres complexos i geometria analítica $2+1+3+3+1$

1. Calculeu:

a) $\sqrt[3]{64\,i}$. (Expresseu el resultat en forma binòmica exacta.)

b) Els nombres imaginaris purs z tals que $z=(a-9i)\cdot(a+2ai)$.

a) Expressem el nombre $64\,i$ en forma polar, —observem que es representa en la direcció positiva de l'eix imaginari—. Per tant,

$$\left.\begin{array}{l} |\,64\,i|=\sqrt{0^2+64^2}=64 \\ \tan\alpha=\dfrac{64}{0}\Longrightarrow \text{no existeix } \tan\alpha \Longrightarrow \alpha=90^\circ \text{ o } \alpha=270^\circ. \end{array}\right\}\Longrightarrow 64\,i=64_{90^\circ}.$$

$$\text{Llavors,}\quad \sqrt[3]{64\,i}=\left\{\begin{array}{l} \left(\sqrt[3]{64}\right)_{\frac{90^\circ}{3}}=4_{30^\circ}=4\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i+\dfrac{1}{2}\right)=\boxed{2\sqrt{3}+2\,i} \\ \left(\sqrt[3]{64}\right)_{\frac{90^\circ+360^\circ}{3}}=4_{150^\circ}=4\left(\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\,i+\dfrac{1}{2}\right)=\boxed{-2\sqrt{3}+2\,i} \\ \left(\sqrt[3]{64}\right)_{\frac{90^\circ+2\cdot 360^\circ}{3}}=4_{270^\circ}=4\,(-\,i)=\boxed{-4\,i}. \end{array}\right.$$

b) $Re(z)=Re\left[(a-9i)\cdot(a+2ai)\right]=Re\left[(a^2+18a)+(2a^2-9a)\,i\right]=0\Longrightarrow a^2+18a=0\Longrightarrow$ $a=0$ o $a=-18$. Llavors,

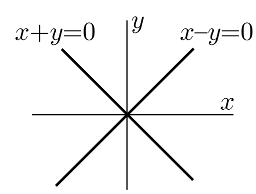
$z=(2\cdot 0^2-9\cdot 0)\,i=0$ no és imaginari pur, o bé $z=(2\cdot(-18)^2-9\cdot(-218))\,i=\boxed{810\,i}$.

2. Representeu gràficament les solucions de l'equació

$$z^2+\bar{z}^{\,2}=0,\quad \text{en què } z\in\mathbb{C}.$$

Indicació: Escriviu $z=x+y\,i$.

$$\begin{aligned} 0=z^2+\bar{z}^{\,2} &\Longrightarrow (x+y\,i)^2+(x-y\,i)^2=0 \\ &\Longrightarrow (x^2-y^2)+(2xy)i+(x^2-y^2)-(2xy)i=0 \\ &\Longrightarrow 2x^2-2y^2=2(x^2-y^2)=0\Longrightarrow \boxed{(x+y)(x-y)=0}. \end{aligned}$$



3. Calculeu:

a) Les coordenades de $\vec{x}=(-1,4)$ en la base $\vec{a}=(1,3)$, $\vec{b}=(-2,-1)$.

b) Tots els valors de $k\in\mathbb{R}$ tals que $\vec{u}=(3,1)$ i $\vec{v}=(1,k)$ formen un angle de 45°.

c) Un vector de mòdul 3, en la direcció de la bisectriu dels eixos de coordenades positius (referència ortonormal).

a) Expressarem el vector $\vec{x}$ com una combinació lineal de $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

$$\begin{aligned} \vec{x}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b} &\iff (-1,4)=\alpha(1,3)+\beta(-2,-1)\iff(-1,4)=(\alpha-2\beta,3\alpha-\beta) \\ &\iff \left\{\begin{array}{l} -1=\alpha-2\beta \\ -9=-5\alpha \end{array}\right. \Longrightarrow \boxed{\alpha=\frac{9}{5}\,,\beta=\frac{7}{5}}. \end{aligned}$$

b) Imposem la condició $\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^\circ = \dfrac{(3,1)\cdot(1,k)}{\sqrt{10}\,\sqrt{1+k^2}} = \dfrac{3+k}{\sqrt{10+10k^2}}$. Llavors,

$$\frac{1}{2} = \frac{3^2+k^2+6k}{10+10k^2} \Longrightarrow 10+10k^2 = 18+2k^2+12k \Longrightarrow 8k^2-12k-8=0$$

$$\Longrightarrow 2k^2-3k-2=0 \Longrightarrow k = \frac{3\pm\sqrt{9+16}}{4} = \frac{3\pm 5}{4} = \left\langle \begin{array}{l} \boxed{2} \\ \boxed{-\dfrac{1}{2}} \end{array} \right. .$$

c) Si té la direcció de la bisectriu el vector és del tipus $\vec{u} = (x,x)$. Imposem que el seu mòdul sigui igual a 3.

$$\sqrt{x^2+x^2} = 3 \Longrightarrow 2x^2 = 9 \Longrightarrow x = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}\,.$$

Conclusió: Hi ha dos vectors, $\boxed{\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}, \dfrac{3}{\sqrt{2}}\right) \text{ i } \left(-\dfrac{3}{\sqrt{2}}, -\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)}$

4. Considereu la recta $r: x = 3x - y + 6 = 0$. Trobeu:

a) Les equacions paramètriques de la paral·lela a r que passa pel punt $P(1,2)$.

b) L'equació implícita de la perpendicular a r que talla l'eix de les abscisses quan $x = 5$.

c) L'equació d'una paral·lela a r del tipus $s: ax + 2y - 12 = 0$.

a) Un vector director de r i les seves paral·leles és $(1,3)$. Per tant, les equacions demanades són $\boxed{\begin{array}{l} x = 1+\lambda \\ y = 2+3\lambda \end{array}}$.

b) Les perpendiculars es poden presentar $t_k: x + 3y + k = 0$. Llavors, en ser $(5,0) \in t_k$,

$$\left.\begin{array}{c} t_k: x+3y+k=0 \\ (5,0)\in t_k \end{array}\right\} \Longrightarrow 5+k=0 \Longrightarrow k=-5 \Longrightarrow \boxed{x+3y-5=0}.$$

c) $\boxed{\text{No existeix cap paral·lela d'aquest tipus}}$, perquè s'hauria de complir $\dfrac{3}{a} = \dfrac{-1}{2} \neq \dfrac{6}{-12}$ i això no és possible per a cap valor d'a.

5. Trobeu els punts de la recta $r: 4x + y - 33 = 0$ que equidisten de la recta $s: y = -1$ i del punt $P(0,1)$.

Cerquem els punts $X(x,y) \in r$ tals que $d(X,P) = d(X,s)$. És a dir,

$$\left.\begin{array}{c} 4x+y-33=0 \\ \sqrt{x^2+(y-1)^2} = \dfrac{|y+1|}{\sqrt{0^2+1^2}} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{c} 4x+y-33=0 \\ x^2+(y-1)^2 = (y+1)^2 \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{array}{c} 4x+y-33=0 \\ x^2 = 4y \end{array}\right\} \Longrightarrow x^2+16x-132=0$$

$$\Longrightarrow x = -8\pm\sqrt{64+132} = \left\langle \begin{array}{l} 6 \\ -22 \end{array}\right. \Longrightarrow \boxed{\text{Punts} \left\langle \begin{array}{l} (6,9) \\ (-22,121) \end{array}\right.}$$