1. Una circumferència passa pels punts $A(0,0)$ i $B(4,-2)$. El seu centre es troba sobre la recta $r: x+3y-6=0$. Trobeu el centre i el radi de la circumferència.

• **Resolució 1:** Anomenem la circumferència buscada $\mathcal{C}: x^2+y^2+mx+ny+p=0$. Imposem les tres condicions del problema, és a dir que A i B pertanyin a $\mathcal{C}$ i que el centre pertanyi a r.

$$\left.\begin{array}{r} A\in\mathcal{C} \Longleftrightarrow 0+0+m\cdot 0+n\cdot 0+p=0 \\ B\in\mathcal{C} \Longleftrightarrow 16+4+4m-2n+p=0 \\ \text{Centre}\in r \Longleftrightarrow -\dfrac{m}{2}+3\left(-\dfrac{n}{2}\right)-6=0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{r} p=0 \\ 20+4m-2n=0 \\ -m-3n-12=0 \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{array}{r} 2m-n=-10 \\ m+3n=-12 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{r} n=-2 \\ m=-6 \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\text{Centre}=\left(-\frac{-6}{2},-\frac{-2}{2}\right)=(3,1)}.$$

$$\text{Radi}=d\left((3,1),(0,0)\right)=\sqrt{3^3+1^2} \Longrightarrow \boxed{\text{Radi}=\sqrt{10}}.$$

• **Resolució 2:** Imposem que el centre es troba sobre la mediatriu del segment AB i sobre la recta r. La mediatriu d'AB passa pel punt mitjà $(2,-1)$ d'aquest segment i té vector perpendicular $\overrightarrow{AB}=(4,-2)$. O sigui que un vector director és $\vec{v}=(1,2)$. Per tant, la mediatriu té l'equació

$$y+1=\frac{2}{1}(x-2) \Longleftrightarrow 2x-y-5=0.$$

Llavors, si trobem la intersecció de les dues rectes tenim el centre,

$$\left\{\begin{array}{l} 2x-y-5=0 \\ x+3y-6=0 \end{array}\right. \Longrightarrow -7y+7=0 \Longrightarrow y=1 \Longrightarrow x=3 \Longrightarrow \boxed{\text{Centre}=(3,1)}.$$

El radi es calcula igual que abans.

• **Resolució 3:** Imposem que el centre O equidista d'A i B i que, a més, pertany a r. Així $O\in r \Longleftrightarrow O=(6-3y,y)$. Llavors imposem l'equidistància i obtenim

$$\begin{aligned}(6-3y-0)^2+(y-0)^2=(6-3y-4)^2+(y+2)^2 &\Longrightarrow 36-36y=4-12y+4y+4 \\ &\Longrightarrow -28y=-28 \Longrightarrow \boxed{O=(3,1)}.\end{aligned}$$

El radi es calcula igual que abans.

2. Una paràbola té el seu vèrtex en el punt $V(1,1)$ i la seva directriu és la recta $r: y=-2$. Trobeu l'equació de la paràbola.

La paràbola és del tipus $(x-\alpha)^2=2p(y-\beta)$, en què (α,β) és el vèrtex. Sabem que el paràmetre p satisfà $p=2\cdot d(V,r)=2\cdot(1+2)=6$. Per tant, l'equació de la paràbola és

$$\boxed{(x-1)^2=12(y-1)}.$$

3. Considereu la funció $f(x) = 2x^2 - 4x$.

a) Utilitzeu la definició de derivada per demostrar que $f'(2) = 4$.

b) Trobeu l'equació de la recta tangent al gràfic de f en el punt d'abscissa $x = 2$.

c) Estudieu la continuïtat de la funció $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, en $x = 0$.

a) Apliquem la definició de derivada en $x = 2$.

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2(2+h)^2 - 4(2+h) - 0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2h^2 + 8h - 4h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2h+4)h}{h} = \lim_{h\to 0}(2h+4) = 2\cdot 0 + 4 = \boxed{4}. \end{aligned}$$

b) Recordem que la tangent es presenta com $y - f(2) = f'(2)(x-2)$. Per tant, l'equació és

$$y - 0 = 4(x-2) \iff \boxed{y = 4x - 8}.$$

c) Estudiem $g(0)$ i $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$: $\begin{cases} g(0) = \dfrac{0}{0} \Longrightarrow \text{No existeix } g(0) \\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^2 - 4x}{x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} 2x - 4 = 0 - 4 = -4. \end{cases}$

Per tant, $\boxed{\text{la funció } g \text{ té en } x = 0 \text{ una discontinuïtat evitable}}$.

4. Trobeu la funció derivada de

$$a)\ f(x) = \frac{3x-2}{x^2} \qquad b)\ g(x) = \sqrt[5]{5x} \qquad c)\ h(x) = (4-3x)^7.$$

a) $f'(x) = \dfrac{3x^2 - 2x(3x-2)}{x^4} = \dfrac{3x^2 - 6x^2 + 4x}{x^4} = \dfrac{x(-3x+4)}{x^4} = \boxed{\dfrac{4-3x}{x^3}}$.

b) $g(x) = (5x)^{\frac{1}{5}} \Longrightarrow g'(x) = \dfrac{1}{5}\,(5x)^{-\frac{4}{5}} \cdot 5 = \boxed{\dfrac{1}{\sqrt[5]{(5x)^4}}}$.

c) $h'(x) = 7(4-3x)^6 \cdot (-3) = \boxed{-21(4-3x)^6}$.

5. La funció $f(x) = \dfrac{4x^2 - 1}{x^3}$ té derivades

$$f'(x) = \frac{3 - 4x^2}{x^4} \quad \text{i} \quad f''(x) = \frac{4(2x^2 - 3)}{x^5}.$$

a) Estudieu i interpreteu els signes de f' i f'' i els valors que les anul·len. (mètode gràfic)

b) Trobeu les asímptotes horitzontal i vertical del gràfic de f.

c) Calculeu els talls amb els eixos del gràfic de f i feu la representació gràfica de f.

a) Estudi i interpretació dels signes

$3-4x^2$, x^4	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	
$f'(x)$	$\frac{-}{+}\ominus$	$\frac{+}{+}\oplus$	$\frac{+}{+}\oplus$	$\frac{-}{+}\ominus$
$f(x)$	↘	↗	↗	↘

$2x^2-3$, x^5	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$	0	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	
$f''(x)$	$\frac{+}{-}\ominus$	$\frac{-}{-}\oplus$	$\frac{-}{+}\ominus$	$\frac{+}{+}\oplus$
$f(x)$	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

f decreix en $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{3}}{2},+\infty\right)$, f creix en $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

f té un mínim local en $x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, de valor $f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\approx -3.08$

f té un màxim local en $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, de valor $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\approx 3.08$

f és còncava amunt en $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}},0\right)\cup\left(\sqrt{\frac{3}{2}},+\infty\right)$

f és còncava avall en $\left(-\infty,-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\cup\left(0,\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$

f té punts d'inflexió en $x=\mp\sqrt{\frac{3}{2}}$, de valors $f\left(\mp\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\approx \pm 2.72$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{4x^2-1}{x^3}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$ i $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{4x^2-1}{x^3}=\frac{-1}{0^-}=+\infty \Longrightarrow$ Hi ha asímptota vertical d'equació $x=0$.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x^2-1}{x^3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4}{x}-\frac{1}{x^3}=0-0=0\Longrightarrow \boxed{y=0 \text{ és asímptota horitzontal}}.$$

c) Talla l'eix OX quan $4x^2-1=0$, és a dir quan $x=\pm\frac{1}{2}$. No existeix $f(0)$. Representem els punts singulars i les asímptotes i obtenim el gràfic.