IES Pons d'Icart
MATEMÀTIQUES – 1R BAT A — 16/X/2006
Nombres, equacions i polinomis — 2+3+3+2

1. Resoleu dues de les tres qüestions següents:

a) Raoneu quin tipus de nombre és la suma d'un nombre racional i un nombre irracional, i quin tipus de nombre és el producte de dos nombres irracionals.

b) El polinomi
$$p(x) = x^3 + (2+3m)\,x^2 + 5m\,x - 2m$$
és divisible per $x+2$. Trobeu els valors de m tals que $p(x)$ té tres arrels diferents.

c) Simplifiqueu l'expressió $\sqrt[5]{6\sqrt{3}+\sqrt{27}}$, sense utilitzar la calculadora.

a) $a \in \mathbb{Q} \Longrightarrow a = \dfrac{p}{q}$, (amb $p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0$) i $b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Llavors, $\boxed{a + b \text{ és irracional}}$ perquè si fos racional tindríem

$$\frac{p}{q} + b = \frac{r}{s},\ r, s \in \mathbb{Z},\ s \neq 0 \Longrightarrow b = \frac{r}{s} - \frac{p}{q} = \frac{rq - ps}{sq} \in \mathbb{Q}\,,$$

la qual cosa és una contradicció amb $b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

$\boxed{\text{El producte d'irracionals pot ser de qualsevol tipus, racional o irracional}}$. Per exemple,

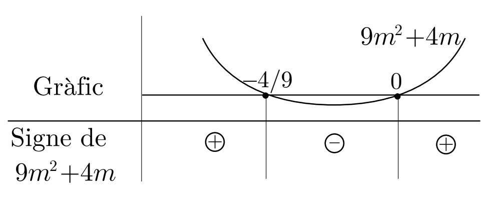
$$\sqrt{8} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{16} = 4 \in \mathbb{Q}, \qquad \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}.$$

b) Fem la divisió de $p(x)$ entre $x+2$ pel mètode de Ruffini,

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2+3m & 5m & -2m \\ -2 & & -2 & -6m & 2m \\ \hline & 1 & 3m & -m & 0 \end{array}$$

Hem d'imposar que el polinomi $x^2 + 3m\,x - m$ tingui dues arrels reals diferents entre elles i diferents de -2. És a dir, s'ha de complir

$$\begin{cases} (3m)^2 + 4m > 0 \\ (-2)^2 + 3m(-2) - m \neq 0. \end{cases}$$



Si observem el gràfic adjunt, s'obté

$$\begin{cases} 9m^2 + 4m > 0 \\ 4 - 7m \neq 0. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} m(9m+4) > 0 \\ m \neq \dfrac{4}{7}. \end{cases} \Longrightarrow \boxed{m \in \left(-\infty, -\frac{4}{9}\right) \cup (0, +\infty) - \left\{\frac{4}{7}\right\}}.$$

c) $$\sqrt[5]{6\sqrt{3}+\sqrt{27}} = \sqrt[5]{6\sqrt{3}+3\sqrt{3}} = \sqrt[5]{9\sqrt{3}} = \left(3^2 \cdot 3^{1/2}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(3^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{1}{5}} = 3^{\frac{1}{2}} = \boxed{\sqrt{3}}.$$

2. Simplifiqueu i racionalitzeu quan calgui de manera que en els resultats no apareguin exponents negatius ni fraccionaris. (No utilitzeu els nombres decimals ni la calculadora):

a) $\sqrt[30]{\dfrac{20^{20}}{0.0004^{10}}}$ b) $\dfrac{\sqrt[6]{a^4b}\,\sqrt[4]{a^5b^2}}{\sqrt[8]{ab^7}}$ c) $\sqrt{\dfrac{4}{5}}+\sqrt{80}-\dfrac{2\sqrt{45}}{3}$

a) $\sqrt[30]{\dfrac{20^{20}}{0.0004^{10}}}=\left(\dfrac{20^{20}}{\left(4\cdot 10^{-4}\right)^{10}}\right)^{\frac{1}{30}}=\left(\dfrac{2^{20}\cdot 10^{20}}{2^{20}\cdot 10^{-40}}\right)^{\frac{1}{30}}=\left(10^{60}\right)^{\frac{1}{30}}=10^2=\boxed{100}$.

b) $\dfrac{\sqrt[6]{a^4b}\,\sqrt[4]{a^5b^2}}{\sqrt[8]{ab^7}}=a^{\frac{4}{6}+\frac{5}{4}-\frac{1}{8}}\cdot b^{\frac{1}{6}+\frac{2}{4}-\frac{7}{8}}=a^{\frac{16+30-3}{24}}\cdot b^{\frac{4+12-21}{24}}=\dfrac{a^{\frac{43}{24}}\cdot b^{\frac{19}{24}}}{b^{\frac{5}{24}}\cdot b^{\frac{19}{24}}}=\boxed{\dfrac{a\ \sqrt[24]{(ab)^{19}}}{b}}$.

c) $$\sqrt{\frac{4}{5}}+\sqrt{80}-\frac{2\sqrt{45}}{3}=\frac{2}{\sqrt{5}}+4\sqrt{5}-\frac{6\sqrt{5}}{3}=\frac{2\sqrt{5}}{5}+4\sqrt{5}-2\sqrt{5}$$
$$=\frac{2\sqrt{5}}{5}+2\sqrt{5}=\frac{2+10}{5}\cdot\sqrt{5}=\boxed{\frac{12\sqrt{5}}{5}}.$$

3. Donat el polinomi $p(x)=x^4-5x^2-36$,

a) Trobeu les seves arrels i la seva descomposició factorial.

b) Resoleu la inequació $p(x)\geq 0$, mitjançant l'observació dels gràfics dels seus factors.

c) Resoleu l'equació
$$\frac{27}{x^3-9x}=\frac{1}{x^3+4x}+\frac{117}{x^4-5x^2-36}.$$

a) **Mètode 1:** Apliquem la regla de Ruffini, per trobar les arrels i els factors. Els candidats enters a ser arrels són els divisors del terme independent -36. Els que proporcionen residu igual a zero són el 3 i el -3.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -5 & 0 & -36\\ 3 & & 3 & 9 & 12 & 36\\ \hline & 1 & 3 & 4 & 12 & 0\\ -3 & & -3 & 0 & -12 & \\ \hline & 1 & 0 & 4 & 0 & \end{array}$$

Les arrels són $\boxed{x=-3, x=3}$, i l'últim polinomi x^2+4 no té arrels. Per tant,

$$\boxed{p(x)=(x+3)(x-3)(x^2+4)}.$$

Mètode 2: Resolem l'equació biquadrada per trobar les arrels.

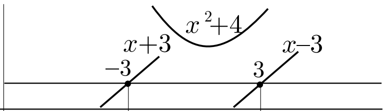
$x^4-5x^2+36=0 \iff$ (fem $x^2=t$) $\ t^2-5t+36=0$

$$\iff t=\frac{5\pm\sqrt{25+144}}{2}=\frac{5\pm 13}{2}=\begin{cases} 9 \iff x=\pm\sqrt{9}= \begin{cases}\boxed{3}\\ \boxed{-3}\end{cases}\\ -4 \iff x^2=-4 \iff \nexists x\end{cases}$$

Per tant,

$$t^2-5t+36=(t-9)(t+4)\Longrightarrow x^4-5x^2+36=(x^2-9)(x^2+4)=\boxed{(x+3)(x-3)(x^2+4)}.$$

b) L'estudi del signe s'obté a partir de l'estudi del signe dels tres factors:

Gràfic dels factors			
Signe dels factors	$-\cdot-\cdot+$	$+\cdot-\cdot+$	$+\cdot+\cdot+$
Signe de $p(x)$	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$

Dels gràfics, s'obté $p(x) \geq 0 \iff x \leq -3$ o $x \geq 3$, és a dir

$$\boxed{x \in (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)}$$

c) Tenim en compte que,

$$\left.\begin{array}{l} x^3 - 9x = x(x^2-9) = x(x-3)(x+3) \\ x^3 + 4x = x(x^2+4) \\ x^4 - 5x^2 - 36 = (x-3)(x+3)(x^2+4) \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{m.c.m.} = x(x^2-9)(x^2+4).$$

Conseqüentment, si $x \neq -3, 0, 3$, l'equació de l'enunciat equival a

$$27(x^2+4) = x^2 - 9 + 117x \iff 26x^2 - 117x + 117 = 0$$

$$\iff x = \frac{117 \pm \sqrt{117^2 - 104 \cdot 117}}{52} = \frac{117 \pm 39}{52} = \begin{cases} 3 \\ \boxed{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

L'única solució de l'equació és $\boxed{x = \frac{3}{2}}$.

> **4.** Un grup d'alumnes ha de pagar un total de 936 euros pel lloguer d'un autocar. A última hora 4 alumnes es donen de baixa i no paguen. Per poder cobrir el pagament, cada alumne dels que queden paga 1.5 euros més. Quin és el nombre final d'alumnes que paguen i quants euros paguen?

Sigui x el nombre final d'alumnes. Llavors, $\begin{cases} \dfrac{936}{x+4} = \text{Preu individual inicial.} \\ \dfrac{936}{x} = \text{Preu individual final.} \end{cases}$

Per tant, la condició de l'enunciat és tradueix així,

$$\frac{936}{x+4} + 1.5 = \frac{936}{x}.$$

Resolució (multipliquem per $x(x+4)$ les dues parts de la igualtat):

$$936x + \frac{3}{2}x^2 + 6x = 936x + 3744 \iff 3x^2 + 12x - 7488 = 0$$

$$\iff x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 22464}}{3} = \frac{-6 \pm 150}{3} = \begin{cases} \boxed{48} \\ -52. \end{cases}$$

Finalment, hi ha $\boxed{\text{48 alumnes}}$ que paguen $\dfrac{936}{48} = \boxed{\text{19.5 euros}}$.