Heu d'intentar resoldre els cinc exercicis primers i triar-ne un entre els dos últims.

1. Simplifiqueu i racionalitzeu quan calgui, de manera que en els resultats no apareguin decimals ni exponents negatius ni fraccionaris:

$$\text{a)}\frac{\sqrt[3]{a\sqrt{\sqrt{b}}}\,\sqrt[4]{a}}{\sqrt[6]{b^3}} \qquad \text{b)}\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{\sqrt{5-\sqrt{5}}}\,.$$

a) $\dfrac{\sqrt[3]{a\sqrt{\sqrt{b}}}\,\sqrt[4]{a}}{\sqrt[6]{b^3}} = a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}\cdot b^{\frac{1}{12}-\frac{3}{6}} = a^{\frac{4+3}{12}}\cdot b^{\frac{1-6}{12}} = \dfrac{a^{\frac{7}{12}}}{b^{\frac{5}{12}}} = \dfrac{\sqrt[12]{a^7\,b^7}}{\sqrt[12]{b^5\,b^7}} = \boxed{\dfrac{\sqrt[12]{a^7\,b^7}}{b}}\,.$

b) $$\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{\sqrt{5-\sqrt{5}}} = \frac{\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)^2}{\left(\sqrt{5-\sqrt{5}}\right)\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)} = \frac{5+\sqrt{5}}{\sqrt{25-5}} = \frac{5+\sqrt{5}}{\sqrt{20}} = \frac{5+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$
$$= \frac{5\left(\sqrt{5}+1\right)}{2\cdot 5} = \boxed{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\,.$$

2. Resoleu l'equació: $\dfrac{10}{x^2-1} - \dfrac{5}{x^4-1} = 3\,.$

$$\frac{10}{x^2-1} - \frac{5}{x^4-1} = 3 \overset{(*)}{\Longrightarrow} 10(x^2+1) - 5 = 3(x^4-1) \Longrightarrow 3x^4 - 10x^2 - 8 = 0$$

$$\Longrightarrow x^2 = \frac{5\pm\sqrt{25+24}}{3} = \frac{5\pm 7}{3} = \begin{cases} 4 \\ -\dfrac{2}{3} \end{cases} \Longrightarrow \boxed{x = \pm\sqrt{4} = \pm 2}\,.$$

$(*)$ Tenim en compte que $\quad x^4-1 = (x^2-1)(x^2+1)$.

3. Sigui el polinomi $p(x) = x^5 - 3x^3 - 4x$. Trobeu els valors de la x tals que $p(x) \geq 0$, amb l'ajut dels gràfics de rectes i/o paràboles.

Primerament, cercarem la seva descomposició factorial. En ser x factor comú, obtenim una primera descomposició:

$$p(x) = x^5 - 3x^3 - 4x = x(x^4 - 3x^2 - 4).$$

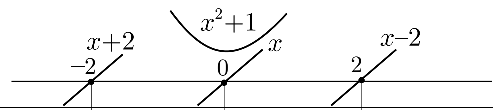
Ara, només cal trobar les arrels del segon factor. Aquestes s'obtenen de:

$$x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \Longrightarrow x^2 = \frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2} = \frac{3\pm 5}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$$
$$\Longrightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = (x^2-4)(x^2+1) = (x+2)(x-2)(x^2+1)$$

Per tant, la descomposició definitiva és,

$$p(x) = x(x-2)(x+2)(x^2+1)\,.$$

Ara, només cal representar l'esquema gràfic dels factors i estudiar-ne els signes.

Gràfic dels factors				
Signe dels factors	$-\cdot-\cdot-\cdot+$	$+\cdot-\cdot-\cdot+$	$+\cdot+\cdot-\cdot+$	$+\cdot+\cdot+\cdot+$
Signe de $p(x)$	$\ominus$	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$
Ordre dels factors	$(x+2)x(x-2)(x^2+1)$			

Per tant, $\boxed{p(x) \geq 0 \iff x \in [-2,0] \cup [2,+\infty)}$

4. Trobeu el coeficient numèric del terme de grau 28 del desenvolupament del binomi

$$\left(\frac{2}{x^2} - x^2\right)^{20}.$$

Anomenem T_k el terme que ocupa el lloc k. Llavors,

$$T_k = \binom{20}{k-1}\left(\frac{2}{x^2}\right)^{21-k}\left(-x^2\right)^{k-1} = \binom{20}{k-1}2^{21-k}(-1)^{k-1}x^{2k-2-42+2k}$$

Si imposem que el grau sigui igual a 28, obtenim

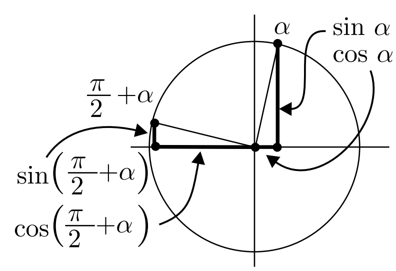
$$2k-2-42+2k = 28 \iff 4k = 72 \iff k = 18.$$

Per tant,

$$\text{Coeficient de } T_{18} = \binom{20}{17}2^3(-1)^{17} = \frac{20\cdot 19\cdot 18}{3\cdot 2}\cdot 8\cdot(-1) = \boxed{-9120}.$$

5. Considereu $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ tal que $\cos\alpha = \dfrac{1}{5}$. Trobeu sense calculadora el valor exacte de $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)$, amb l'ajut de la circumferència trigonomètrica.

A partir de la figura adjunta obtenim



$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) &= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\frac{1}{\tan\alpha} = -\frac{1}{+\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-1}} \\ &= -\frac{1}{+\sqrt{\dfrac{1}{(1/5)^2}-1}} = -\frac{1}{+\sqrt{25-1}} = -\frac{1}{\sqrt{24}} = -\frac{1}{2\sqrt{6}} = \boxed{-\frac{\sqrt{6}}{12}}.\end{aligned}$$

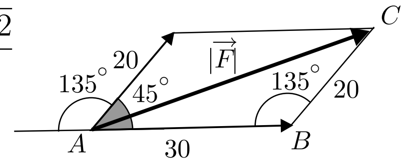
6. Dues forces de 20 N i 30 N s'apliquen sobre un mateix punt i formen un angle de 45°.

a) Trobeu la intensitat de la força resultant.

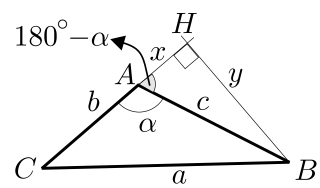
b) Demostreu el teorema utilitzat.

a) Apliquem el teorema del cosinus al triangle $\triangle ABC$ de la figura

$$
\begin{aligned}
|\vec{F}| &= \sqrt{20^2+30^2-2\cdot 20\cdot 30\cdot\cos 135^\circ} = \sqrt{1300+1200\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}} \\
&= \sqrt{1300+600\sqrt{2}} = \boxed{10\sqrt{13+6\sqrt{2}}\text{ N} \approx 46.35\ N}.
\end{aligned}
$$



b) Suposem que el triangle ABC té un angle $\alpha = \widehat{BAC}$ obtús. En traçar l'altura des de B, obtenim des dels triangles rectangles ABH i CBH,



$$c^2 = x^2+y^2,\quad a^2=(b+x)^2+y^2,\quad \cos(180^\circ-\alpha)=\frac{x}{c}\,.$$

llavors,

$$a^2 = b^2+2bx+x^2+y^2 = b^2+2bx+c^2 = b^2+c^2+2bc\,\cos(180^\circ-\alpha) = b^2+c^2-2bc\,\cos\alpha.$$

7. Resoleu les qüestions següents:

a) Demostreu que

$$\sin(3x) = 3\sin x\,\cos^2 x - \sin^3 x.$$

Indicació: Pot ser útil escriure $\sin(3x) = \sin(2x+x)$.

b) Trobeu els valors de x, —en graus, minuts i segons—, tals que

$$\sin(3x) - \sin x = 0.$$

Indicació: Podeu utilitzar l'apartat anterior.

a) Utilitzem les fórmules del sinus de la suma i del sinus i cosinus de l'angle doble.

$$
\begin{aligned}
\sin(3x) &= \sin(2x+x) = \sin(2x)\,\cos x + \cos(2x)\,\sin x \\
&= 2\sin x\,\cos x\,\cos x + \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)\sin x = 2\sin x\,\cos^2 x + \cos^2 x\,\sin x - \sin^3 x \\
&= 3\sin x\,\cos^2 x - \sin^3 x.
\end{aligned}
$$

b) Una possible resolució passa per utilitzar la identitat de l'apartat anterior.

$$
\begin{aligned}
\sin(3x)-\sin x = 0 &\iff 3\sin x\,\cos^2 x - \sin^3 x - \sin x = 0 \iff \sin x(3\cos^2 x\sin^2 x - 1) = 0 \\
&\iff \sin x(3-3\sin^2 x - \sin^2 x - 1) = 0 \iff \sin x(-4\sin^2 x + 2) = 0 \\
&\iff \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = \dfrac{\pm\sqrt{2}}{2} \end{cases} \iff \boxed{\begin{array}{l} x = n\cdot 180^\circ \\ x = 45^\circ + n\cdot 90^\circ. \end{array}}
\end{aligned}
$$