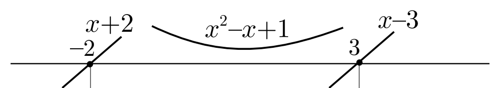
1. Sigui el polinomi $p(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 5x - 6$. Trobeu els valors de la x tals que $p(x) > 0$, amb l'ajut de la seva descomposició i dels gràfics de rectes i/o paràboles.

Apliquem la regla de Ruffini, per trobar-ne els factors.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -2 & -4 & 5 & -6 \\ -2 & & -2 & 8 & -8 & 6 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & -3 & 0 \\ 3 & & 3 & -3 & 3 & \\ \hline & 1 & -1 & 1 & 0 & \end{array}$$

El polinomi $x^2 - x + 1$ no admet descomposició, en ser el seu discriminant menor que 0. Per tant,

$$p(x) = (x+2)(x-3)(x^2-x+1)\,.$$

Gràfic dels factors			
Signe dels factors	$- \cdot - \cdot +$	$+ \cdot - \cdot +$	$+ \cdot + \cdot +$
Signe de $p(x)$	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$
Ordre dels factors	$(x+2)(x-3)(x^2-x+1)$		

$$\boxed{p(x) > 0 \iff (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)}\,.$$

2. Resoleu una de les dues equacions següents:

$$\text{a)}\quad \left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^6 - 64 = 0 \qquad\qquad \text{b)}\quad \frac{3}{x-1} = x - \frac{2}{x}\,.$$

a) $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^6 - 64 = 0 \Longrightarrow x^2 - \frac{1}{x} = \sqrt[6]{64} = \pm 2 \Longrightarrow x^3 \mp 2x - 1 = 0.$

Per al primer cas podem trobar una solució amb la regla de Ruffini i per al segon no, (en aquest últim cas no continuarem perquè no teniu les eines adequades).

$$\left.\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & & -1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{x = -1 \;\text{ i }\; x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}}\,.$$

Advertim novament que, com a mínim, hi ha una solució real més que no podem calcular exactament amb les nostres eines.

b) $\dfrac{3}{x-1} = x - \dfrac{2}{x} \iff 3x = x^2(x-1) - 2(x-1) \iff x^3 - x^2 - 5x + 2 = 0.$

Apliquem la regla de Ruffini per trobar solucions:

$$\left.\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & -5 & 2 \\ -2 & & -2 & 6 & -2 \\ \hline & 1 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{x = -2 \;\text{ i }\; x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}}\,.$$

3. Trieu un dels dos apartats següents i demostreu-ne la veritat o falsedat sense calculadora:

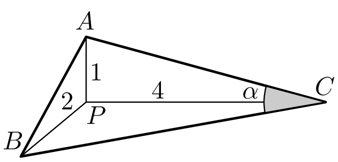
a) $(0.02)^{-20} \cdot \sqrt[4]{64} \cdot \left(\dfrac{4}{1000}\right)^{13} = 1280\sqrt{2}$ b) $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{\sqrt{2}-1}} = \sqrt[4]{2}\,.$

a) És certa perquè

$$\begin{aligned}(0.02)^{-20} \cdot \sqrt[4]{64} \cdot \left(\frac{4}{1000}\right)^{13} &= \left(2 \cdot 10^{-2}\right)^{-20} \cdot 2^{3/2} \cdot 2^{26} \cdot 10^{-39} = 2^{6} \cdot 2^{3/2} \cdot 10^{40-39} \\ &= 2^{7} \cdot 2^{1/2} \cdot 10 = 1280\sqrt{2}.\end{aligned}$$

b) És certa perquè $\sqrt{\sqrt{2}-1} \cdot \sqrt[4]{2} = \sqrt{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)} = \sqrt{2-\sqrt{2}}$

4. Considereu el tetraedre $PABC$ tal que els tres angles determinats per les arestes PA, PB i PC són de 90°. Sabem que $PA = 1$, $PB = 2$ i $PC = 4$. Calculeu l'angle $\angle ACB$ i l'àrea de la cara ABC.



Pel teorema de Pitàgoras aplicat als tres triangles rectangles en P obtenim,
$$\begin{cases} AC = \sqrt{PA^2 + PC^2} = \sqrt{17} \\ AB = \sqrt{PA^2 + PB^2} = \sqrt{5} \\ BC = \sqrt{PB^2 + PC^2} = \sqrt{20} \end{cases}$$

Si apliquem el teorema del cosinus al triangle ABC, obtindrem l'angle $\alpha = \angle ACB$:

$$5 = 17 + 20 - 2\sqrt{340} \cdot \cos\alpha \Longrightarrow \cos\alpha = \frac{32}{2\sqrt{240}} = \frac{16}{\sqrt{340}} \Longrightarrow \boxed{\alpha = 29^\circ\, 48'\, 18.1''}.$$

$$\text{Àrea} = \frac{1}{2}\sqrt{17} \cdot \sqrt{20} \cdot \sin\alpha = \frac{\sqrt{340}}{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{16^2}{340}} = \frac{\sqrt{340}\,\sqrt{84}}{2\sqrt{340}} = \frac{\sqrt{84}}{2} = \frac{2\sqrt{21}}{2} = \boxed{\sqrt{21}}.$$

5. Resoleu una de les dues qüestions següents:

a) Demostreu que
$$\frac{\cos a - \cos(3a)}{\sin a + \sin(3a)} + \operatorname{cotan} a = 2\operatorname{cosec}(2a).$$

b) Trobeu els valors de x, —en graus, minuts i segons—, tals que
$$\sin(4x) - \cos(2x) = 0.$$

a) Utilitzem les fórmules que transformen sumes i diferències de raons trigonomètriques en productes i simplifiquem:

$$\begin{aligned}\frac{\cos a - \cos(3a)}{\sin a + \sin(3a)} + \operatorname{cotan} a &= \frac{-2\sin(2a)\sin(-a)}{2\sin(2a)\cos(-a)} + \operatorname{cotan} a \\ = \frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\cos a}{\sin a} &= \frac{\sin^2 a + \cos^2 a}{\sin a \cos a} = \frac{1}{\sin(2a)/2} = \frac{2}{\sin(2a)} = 2\operatorname{cosec}(2a).\end{aligned}$$

b) Utilitzem la fórmula del sinus de l'angle doble:

$$\sin(4x) - \cos(2x) = 0 \iff 2\sin(2x)\cos(2x) - \cos(2x) = 0 \iff \cos(2x)\left(2\sin(2x) - 1\right) = 0$$

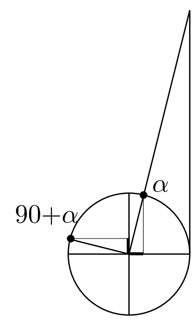
$$\iff \begin{cases} \cos(2x) = 0 \Longrightarrow 2x = \dfrac{\pi}{2} + n\pi \\ \sin(2x) = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow 2x = \begin{cases} \dfrac{\pi}{6} + 2n\pi \\ \dfrac{5\pi}{6} + 2n\pi \end{cases} \end{cases} \iff \boxed{x = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4} + n\,\dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\pi}{12} + n\pi \\ \dfrac{5\pi}{12} + n\pi \end{cases}}$$

6. Resoleu una de les dues qüestions següents:

a) Considereu $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ tal que $\tan\alpha = 4$. Trobeu sense calculadora el valor exacte de $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right)$, amb l'ajut de la circumferència trigonomètrica.

b) Calculeu tots els angles x tals que $\tan\left(5x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3}$.

a) Segons podem observar a la circumferència trigonomètrica adjunta,



$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$$

i, per tant, $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \tan^2\alpha}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + 16}} = \boxed{\dfrac{1}{\sqrt{17}}}$.

b) $\tan\left(5x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3} \Longrightarrow 5x + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{3} + n\pi \Longrightarrow 5x = -\dfrac{\pi}{6} + n\pi$

$\Longrightarrow x = -\dfrac{\pi}{30} + \dfrac{n\pi}{5}$

Llavors, si fem $n = k + 1$ obtenim $\boxed{x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{5}}$.