1. Simplifiqueu sense calculadora $\dfrac{\left(1+\sqrt{3}\right)^3}{1-\sqrt{3}}$.

$$\begin{aligned}\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^3}{1-\sqrt{3}} &= \frac{(1+\sqrt{3})^4}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})} = \frac{1+4\sqrt{3}+18+12\sqrt{3}+9}{1-3} \\ &= \frac{28+16\sqrt{3}}{-2} = \boxed{-14-8\sqrt{3}}\,.\end{aligned}$$

2. Trobeu tots els angles x tals que $\sin(3x) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Amb la calculadora i observant la circumferència trigonomètrica obtenim:

$$3x = \begin{cases} 75^\circ + n\cdot 360^\circ \\ 105^\circ + n\cdot 360^\circ \end{cases} \Longrightarrow \boxed{x = \begin{cases} 25^\circ + n\cdot 120^\circ \\ 35^\circ + n\cdot 120^\circ \end{cases}}$$

3. Esbrineu si és cert que $\left(\sqrt{x} + x\sqrt{x}\right)^4 = x^6 + 4x^5 + 6x^4 + 4x^3 + x^2$.

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{x} + x\sqrt{x}\right)^4 &= \left(\sqrt{x}\,(1+x)\right)^4 \\ &= \left(\sqrt{x}\right)^4 (1+x)^4 = x^2(1+4x+6x^2+4x^3+x^4) \\ &= x^2+4x^3+6x^4+4x^5+x^6 \Longrightarrow \text{La igualtat és certa}\,.\end{aligned}$$

- **Trieu i resoleu una de les dues qüestions següents:**

4A. Sigui el polinomi $p(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$.

a) Trobeu-ne les arrels i la descomposició factorial.

b) Trobeu els valors de la x tals que $p(x) > 0$, amb l'ajut de la seva descomposició i dels gràfics de rectes i/o paràboles.

4B. Resoleu l'equació:

$$\frac{3}{x^4-3x^2} - \frac{\sqrt{3}}{x^3-3x} = \frac{1}{x^2}\,.$$

4A. Apliquem la regla de Ruffini, per trobar-ne les arrels i els factors.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & & 1 & 3 & 2 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & & -1 & -2 & \\ \hline & 1 & 2 & 0 & \end{array}$$

Gràfic dels factors	-2 $x+2$	-1 $x+1$		1 $x-1$
Signe dels factors	$-\cdot-\cdot-$	$+\cdot-\cdot-$	$+\cdot+\cdot-$	$+\cdot+\cdot+$
Signe de $p(x)$	$\ominus$	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$
Ordre dels factors	$(x+2)(x+1)(x-1)$			

Per tant,

$$p(x) = (x+2)(x+1)(x-1)\,.$$

$$\boxed{p(x) > 0 \iff (-2,-1) \cup (1,+\infty)}\,.$$

4B. Cerquem el mínim comú múltiple dels denominadors:
– **Primer denominador:** $x^4 - 3x^2 = x^2(x^2-3) = x^2\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)$.
– **Segon denominador:** $x^3 - 3x = x(x^2-3) = x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$.
– **Tercer denominador:** $x^2 = x^2$.
Per tant, el mínim comú múltiple és

$$x^2\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right) = x^4 - 3x^2.$$

Multipliquem els dos costats de l'equació pel m.c.m. i s'obté:

$$\begin{aligned} 3-\sqrt{3}\,x = x^2-3 &\iff x^2+\sqrt{3}\,x-6=0 \\ &\iff x = \frac{-\sqrt{3}\pm\sqrt{3+24}}{2} = \frac{-\sqrt{3}\pm 3\sqrt{3}}{2} = \begin{cases} \sqrt{3} \\ -2\sqrt{3}. \end{cases} \end{aligned}$$

Per tant, $\boxed{x=-2\sqrt{3}}$. $x=\sqrt{3}$ no és solució perquè no satisfà l'equació inicial.

- **Trieu i resoleu una de les dues qüestions següents:**

5A. a) Demostreu que $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$, a partir de les identitats

$$\begin{cases} \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1\,. \end{cases}$$

b) Resoleu l'equació $2\cos^2 x - 3\sin^2(2x) = 3$, amb l'ajut de la fórmula que s'havia de demostrar a l'apartat anterior.

5B. Considereu una circumferència de radi 7 i una corda d'aquesta de longitud 10. Calculeu l'àrea de cadascuna de les regions en què parteix la circumferència.

5A. a) De les dues igualtats obtenim

$$\frac{1+\cos(2x)}{2} = \frac{1+(\cos^2 x-\sin^2 x)}{2} = \frac{\cos^2 x+\cos^2 x}{2} = \frac{2\cos^2 x}{2} = \cos^2 x.$$

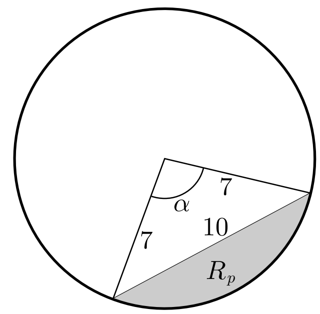
b) L'equació es transforma en

$$1+\cos(2x)-3\left(1-\cos^2(2x)\right)=3 \iff 3\cos^2(2x)+\cos(2x)-5=0$$

$$\iff \cos(2x)=\frac{-1\pm\sqrt{1+60}}{6}=\frac{-1\pm\sqrt{61}}{6}= \begin{cases} \dfrac{-1+\sqrt{61}}{6} \\ \dfrac{1-\sqrt{61}}{6}. \end{cases}$$

No és admissible cap solució, perquè $\dfrac{-1+\sqrt{61}}{6}>1$ i $\dfrac{-1-\sqrt{61}}{6}<-1$.

5B. Observem la figura adjunta. Cerquem l'angle central α, —amb el teorema del cosinus—, i obtindrem l'àrea de la regió petita R_p com la diferència entre el sector i el triangle. La regió gran R_g mesurarà el que falta per completar l'àrea del cercle.



$$100=49+49-2\cdot 49\cos\alpha \Longrightarrow \cos\alpha=-\frac{1}{49} \Longrightarrow \alpha\approx 91^\circ\,10'\,10''$$

$$\Longrightarrow \text{àrea}\,(R_p)=\frac{\alpha_{\text{rad}}\cdot 7^2}{2}-\frac{7^2\sin\alpha}{2}\approx\frac{49(1.5912-0.9998)}{2}=\boxed{14.4897}$$

$$\Longrightarrow \text{àrea}\,(R_g)\approx\pi\cdot 7^2-14.4897\approx\boxed{139.45}\,.$$