1. Calculeu i expresseu el resultat en forma binòmica:

a) $\sqrt[4]{-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i}\,.$

b) El nombre imaginari pur $z=\dfrac{k^2+i}{2+k\,i}$, en què $k\in\mathbb{R}$.

a) Expressem el nombre $z=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i$ en forma polar r_α i recordem que:

$$\sqrt[4]{r_\alpha}=\left(\sqrt[4]{r}\right)_{\frac{\alpha+k\,360^\circ}{4}}\,,\quad \text{en què } k=0,1,2,3.$$

$$\left.\begin{array}{l} |z|=\sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}}=1 \\ \tan\alpha=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}=-\sqrt{3} \end{array}\right\}\Longrightarrow z=1_{120^\circ}\Longrightarrow \sqrt[4]{z}=\boxed{\begin{array}{l} 1_{30^\circ}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\,i \\ 1_{120^\circ}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i \\ 1_{210^\circ}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}\,i \\ 1_{300^\circ}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i \end{array}}$$

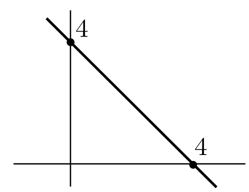
b) $z=\dfrac{k^2+i}{2+k\,i}\cdot\dfrac{2-k\,i}{2-k\,i}=\dfrac{2k^2+k}{4+k^2}+\dfrac{-k^3+2}{4+k^2}\,i$. Llavors, en ser $Re(z)=0$ s'obté,

$$\frac{2k^2+k}{4+k^2}=0 \Longrightarrow 2k^2+k=0\Longrightarrow k(2k+1)=0\Longrightarrow k=0 \text{ o bé } k=-\frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow z=\begin{cases} \dfrac{2}{4}\,i=\dfrac{1}{2}\,i\,, & (\text{si } k=0) \\ \dfrac{\frac{1}{8}+2}{4+\frac{1}{4}}\,i=\dfrac{1}{2}\,i\,, & \left(\text{si } k=-\dfrac{1}{2}\right) \end{cases}\Longrightarrow \boxed{z=\frac{1}{2}\,i}$$

2. Representeu gràficament les solucions de l'equació $(1+i)z+(i-1)\bar{z}=8i$. Indicació: Escriviu $z=x+y\,i$ i simplifiqueu l'expressió que en resulta.

$$\begin{aligned} &(1+i)(x+yi)+(i-1)(x-yi)=8i \\ \Longrightarrow\ &(x-y)+(y+x)i+(-x+y)+(y+x)i=8i \\ \Longrightarrow\ &2(x+y)\,i=8i\Longrightarrow \boxed{x+y=4}\,. \end{aligned}$$



3. Justifiqueu que $\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)=(\cos\theta+i\sin\theta)^n$ i utilitzeu aquesta igualtat per demostrar que $\sin(3\theta)=3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta$.

Si treballem en forma polar tenim,

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=(1_\theta)^n=(1^n)_{n\theta}=1_{n\theta}=\cos(n\theta)+i\,\sin(n\theta).$$

Per demostrar la igualtat, utilitzarem el fet que $\sin(3\theta)$ és la part imaginària de $(\cos\theta + i\sin\theta)^3$.

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^3 &= \cos^3\theta + 3\cos^2\theta\sin\theta\cdot i - 3\cos\theta\sin^2\theta - \sin^3\theta\cdot i\\ &= (\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta) + (3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta)i\end{aligned}$$

Per tant, $\quad \sin(3\theta) = Im\left[(\cos\theta + i\sin\theta)^3\right] = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta.$

4. Considereu la recta que passa pels punts $A(4,2)$ i $B(1,-1)$. Trobeu totes les seves equacions.

El vector director és qualsevol que estigui en la direcció de $\overrightarrow{AB} = (-3,-3)$. Considerarem el vector director $\vec{v} = (1,1)$.

- Vectorial: $(x,y) = (4,2) + \lambda(1,1)$.
- Paramètriques: $\begin{cases} x = 4+\lambda \\ y = 2+\lambda. \end{cases}$
- Contínua: $\dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y-2}{1}$.
- Punt-pendent: $y - 2 = 1(x-4)$.
- Explícita: $y = x - 2$.
- Implícita: $x - y - 2 = 0$.
- Canònica: $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{-2} = 1$.

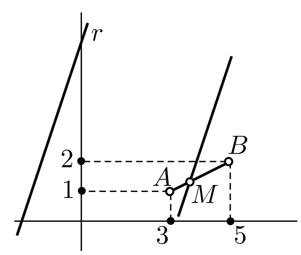
5. Considereu la recta $r:\ 3x - y + 6 = 0$ i els punts $A(3,1)$, $B(5,2)$.
Trobeu l'equació de la recta paral·lela a r que passa pel punt M del segment AB, tal que $3\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}$.

Primerament cerquem el punt M.

$$M = A + \overrightarrow{AM} = A + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = (3,1) + \frac{1}{3}(5-3, 2-1) = (3,1) + \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{11}{3}, \frac{4}{3}\right).$$

La recta paral·lela a r ha de ser, pel criteri de proporcionalitat dels coeficients de les variables, de la família $\quad 3x - y + k = 0$. Imposem que passi pel punt M i en resulta,

$$3\cdot\frac{11}{3} - \frac{4}{3} + k = 0 \Longrightarrow k = \frac{4}{3} - 11 = -\frac{29}{3}.$$



Llavors, la recta cercada té equació $3x - y - \dfrac{29}{3} = 0$, o també $\boxed{9x - 3y - 29 = 0}$.

6. Les coordenades de tres vectors en una base $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2$ són

$$\vec{u} = (1,2),\ \vec{v} = (4,-1),\ \vec{w} = (-3,5).$$

Trobeu les coordenades de $\vec{w}$ en la base $\vec{u},\ \vec{v}$ i comproveu gràficament el resultat.

$$\begin{aligned}&\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \Longleftrightarrow (-3,5) = \alpha(1,2) + \beta(4,-1)\\ &\Longleftrightarrow\ (-3,5) = (\alpha + 4\beta, 2\alpha - \beta)\\ &\Longleftrightarrow\ \left.\begin{aligned}-3 &= \alpha + 4\beta\\ 5 &= 2\alpha - \beta\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \boxed{\alpha = \frac{17}{9}, \beta = -\frac{11}{9}}.\end{aligned}$$