1. Calculeu:

a) $\sqrt{-2+2\sqrt{3}\,i}\,$. (Expresseu el resultat en forma binòmica exacta.)

b) Els nombres reals z tals que $z=(a-4i)\cdot(a+ai)$.

c) Les solucions de l'equació

$$z\cdot\bar{z}+1=0,\quad \text{en què } z\in\mathbb{C}.$$

Indicació: Escriviu $z=x+y\,i$.

Passem el nombre $-2+2\sqrt{3}\,i$ a forma polar,

$$\left.\begin{array}{l}\left|-2+2\sqrt{3}\,i\right|=\sqrt{2^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4+12}=4\\ \tan\alpha=\dfrac{2\sqrt{3}}{-2}=-\sqrt{3}\end{array}\right\}\Longrightarrow -2+2\sqrt{3}\,i=4_{120^\circ}.$$

Llavors,

$$\sqrt{-2+2\sqrt{3}\,i}=\begin{cases}\left(\sqrt{4}\right)_{\frac{120^\circ}{2}}=2_{60^\circ}=2\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i\right)=\boxed{1+\sqrt{3}\,i}\\ \left(\sqrt{4}\right)_{\frac{120^\circ+360}{2}}=2_{240^\circ}=2\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i\right)=\boxed{-1-\sqrt{3}\,i}.\end{cases}$$

b) $z=(a-4i)\cdot(a+ai)=(a^2+4a)+(a^2-4a)\,i\in\mathbb{R}\Longrightarrow a^2-4a=0\Longrightarrow a=0$ o $a=4$.

$$\text{Llavors, } z=\begin{cases}0^2+4\cdot 0=\boxed{0}\\ 4^2+4\cdot 4=\boxed{32}.\end{cases}$$

c) $z\cdot\bar{z}+1=0\Longleftrightarrow(x+y\,i)(x-y\,i)+1=0\Longleftrightarrow x^2+y^2+1=0$. Això no pot ser perquè $x^2+y^2+1\geq 0+1=1$. Per tant, $\boxed{\text{l'equació no té solució}}$.

2. Calculeu:

a) Les coordenades de $\vec{w}=(0,6)$ en la base $\vec{u}=(1,2)$, $\vec{v}=(1,-3)$.

b) Les coordenades de dos vectors perpendiculars al vector $\vec{a}=(-8,6)$ tals que el seu mòdul sigui igual a 2.

c) L'angle $\angle BAC$, —en graus, minuts i segons—, en què $A=(1,2)$, $B=(4,3)$ i $C=(-3,0)$.

a) Hem de presentar $\vec{w}$ com una combinació lineal de $\vec{u}$ i $\vec{v}$.

$$\begin{aligned}\vec{w}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}&\Longleftrightarrow(0,6)=\alpha(1,2)+\beta(1,-3)\\ &\Longleftrightarrow\ (0,6)=(\alpha+\beta,2\alpha-3\beta)\\ &\Longleftrightarrow\ \begin{cases}0=\alpha+\beta\\ 6=2\alpha-3\beta\end{cases}\Longrightarrow\boxed{\alpha=\frac{6}{5},\beta=-\frac{6}{5}}.\end{aligned}$$

b) El vector $\vec{u} = (6,8)$ és perpendicular al vector $\vec{a}$, perquè $(6,8)\cdot(8,-6) = 48-48 = 0$. Llavors, en ser $|\vec{u}| = \sqrt{6^2+8^2} = 10$, per obtenir els vectors de mòdul 2 només caldrà dividir el vector per 5 i també considerar el seu oposat. Així, en resulten

$$\boxed{\left(\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right) \text{ i } \left(-\frac{6}{5}, -\frac{8}{5}\right)}$$

c) $\cos(\angle BAC) = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \dfrac{(3,1)\cdot(-4,-2)}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{20}} = \dfrac{-14}{10\sqrt{2}} \Longrightarrow \angle BAC = 171^\circ\ 52'\ 11.6''$.

3. Considereu la recta $r : \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 2-3\lambda. \end{cases}$

Trobeu:

a) L'equació implícita d'una paral·lela a r que passi pel punt $P(0,0)$.

b) L'equació implícita d'una perpendicular a r que passi pel punt $Q(2,3)$.

c) Per a quins valors de k, la recta r talla la recta $s : k^2x + ky + 3 = 0$.

a) El vector director de r és $\vec{v}_r = (1,-3)$. Per tant, la recta paral·lela ha de ser de la família $3x+y+k=0$. A més, ha de passar pel punt $(0,0)$, és a dir, $3\cdot 0+0+k=0 \Longrightarrow k=0$.

La recta cercada és $\boxed{3x+y=0}$.

b) El vector perpendicular de la recta demanada és $\vec{v}_r = (1,-3)$. Per tant, la recta que cerquem és del tipus $x-3y+k=0$. També ha de passar pel punt $(2,3)$, és a dir, $2-3\cdot3+k=0 \Longrightarrow k=7$.

La recta cercada és $\boxed{x-3y+7=0}$.

c) Perquè es tallin cal que existeixi $\lambda\in\mathbb{R}$ tal que $k^2(1+\lambda)+k(2-3\lambda)+3=0$. És a dir,

$$\text{ha d'existir } \lambda = \frac{-k^2-2k-3}{k^2-3k},$$

la qual cosa equival a que $k^2-3k\neq 0$. Per tant $\boxed{k\neq 0 \text{ i } k\neq 3}$.

4. Trobeu el punt de la recta $r : x+2y-12=0$ que equidista dels punts $A(4,2)$ i $B(0,0)$.

Anomenem $X(x,y)$ el punt cercat sobre la recta r. Llavors,

$$\begin{cases} X\in r \\ d(X,A) = d(X,B) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+2y-12=0 \\ x^2+y^2 = (x-4)^2+(y-2)^2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+2y-12=0 \\ -8x-4y+20=0 \end{cases}$$

Si multipliquem la primera equació per 2 i les sumem, obtenim $-6x-4=0$.
D'això finalment en resulta el punt X de coordenades

$$\boxed{x=-\frac{2}{3},\ y=\frac{19}{3}}.$$