IES Pons d'Icart
Matemàtiques – 1r BAT B — 17/X/2006
Nombres, equacions i polinomis — 2+3+3+2

1. Resoleu dues de les tres qüestions següents:

a) Raoneu quin tipus de nombre és la suma de dos nombres irracionals, i quin tipus de nombre és el producte d'un nombre racional i un nombre irracional.

b) El polinomi
$$p(x) = x^4 + (4+m)\,x^3 + (2m+4)\,x^2 - 4m\,x - 8m$$
és divisible per $(x+2)^2$. Trobeu els valors de m tals que $p(x)$ només té una arrel.

c) Resoleu l'equació $\sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{9\,x}} = 10$.

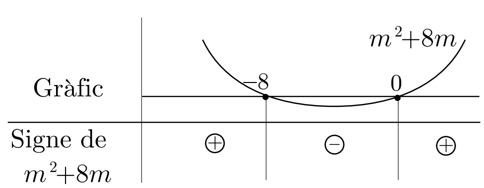
a) • $\boxed{\text{La suma d'irracionals pot ser racional o irracional}}$. Per exemple,
$$\sqrt{8} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, \qquad \sqrt{2} + (1 - \sqrt{2}) = 1 \in \mathbb{Q}.$$

• Quant al producte, sigui $a \in \mathbb{Q} \Longrightarrow a = \dfrac{p}{q}$, (amb $p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0$) i $b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Si $a = 0$ $\boxed{0 \cdot b = 0 \in \mathbb{Q}}$. Si $a \neq 0$ llavors, $\boxed{a \cdot b \text{ és irracional}}$ perquè si fos racional tindríem
$$\frac{p}{q} \cdot b = \frac{r}{s},\ r, s \in \mathbb{Z},\ p, q, r, s \neq 0 \Longrightarrow b = \frac{r \cdot q}{s \cdot p} = \in \mathbb{Q}\,,$$
la qual cosa contradiu que $b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

b) Fem la divisió de $p(x)$ entre $(x+2)^2$ aplicant dues vegades el mètode de Ruffini,

	1	$4+m$	$2m+4$	$-4m$	$-8m$
-2		-2	$-4-2m$	0	$8m$
	1	$2+m$	0	$-4m$	0
-2		-2	$-2m$	$4m$	
	1	m	$-2m$	0	

Hi ha dues possibilitats: que el polinomi $x^2 + mx - 2m$ no tingui arrels o que tingui l'arrel $x = -2$ repetida. La segona possibilitat es comprova immediatament que no pot ser, perquè proporciona $m = 1$ i les arrels són $x = 1$ i $x = -2$. Llavors, s'ha de complir
$$m^2 + 8m < 0$$



Del gràfic adjunt, s'obté $\quad m^2 + 8m < 0 \Longrightarrow \boxed{m \in (-8, 0)}$.

c) $\sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{9\,x}} = 10 \Longleftrightarrow \sqrt{\sqrt{16x}} = 10 \Longleftrightarrow \sqrt[4]{16x} = 10 \Longleftrightarrow 16x = 10000 \Longleftrightarrow \boxed{x = 625}$.

2. Simplifiqueu i racionalitzeu quan calgui de manera que en els resultats no apareguin exponents negatius ni fraccionaris. (No utilitzeu els nombres decimals ni la calculadora):

a) $\sqrt[45]{\dfrac{0.008^{-15}}{2^{30}}}$ b) $\dfrac{\sqrt[10]{x^4y}\;\sqrt[4]{x^5y^{21}}}{\sqrt[5]{x^{41}y^{12}}}$ c) $\sqrt{\dfrac{16}{7}}-\sqrt{175}+\dfrac{2\sqrt{252}}{5}$

a) $$\sqrt[45]{\frac{0.008^{-15}}{2^{30}}}=\sqrt[45]{\frac{2^{-45}\cdot 10^{45}}{2^{30}}}=\frac{10}{2\sqrt[45]{2^{30}}}=\frac{5}{\sqrt[3]{4}}\cdot\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{16}}=\frac{5\sqrt[3]{16}}{4}=\frac{5\cdot 2\sqrt[3]{2}}{4}=\boxed{\frac{5\sqrt[3]{2}}{2}}.$$

b) $$\frac{\sqrt[10]{x^4y}\;\sqrt[4]{x^5y^{21}}}{\sqrt[5]{x^{41}y^{12}}}=x^{\frac{4}{10}+\frac{5}{4}-\frac{41}{5}}\cdot y^{\frac{1}{10}+\frac{21}{4}-\frac{12}{5}}=x^{\frac{8+25-164}{20}}\cdot y^{\frac{2+105-48}{20}}=\frac{y^{\frac{59}{20}}}{x^{\frac{131}{20}}}\cdot\frac{x^{\frac{9}{20}}}{x^{\frac{9}{20}}}=\boxed{\frac{y^2\;\sqrt[20]{y^{19}x^9}}{x^7}}.$$

c) $$\sqrt{\frac{16}{7}}-\sqrt{175}+\frac{2\sqrt{252}}{5}=\frac{4}{\sqrt{7}}-5\sqrt{7}+\frac{12\sqrt{7}}{5}=\frac{4\sqrt{7}}{7}-5\sqrt{7}+\frac{12}{5}\sqrt{7}$$
$$==\left(\frac{4}{7}-5+\frac{12}{5}\right)\sqrt{7}=\frac{(20-175+84)\sqrt{7}}{35}=\boxed{\frac{-71\sqrt{7}}{35}}.$$

3. Donat el polinomi $p(x)=x^4-2x^3-3x^2$,

a) Trobeu les seves arrels i la seva descomposició factorial.

b) Resoleu la inequació $p(x)\leq 0$, mitjançant l'observació dels gràfics dels seus factors.

c) Resoleu l'equació
$$\frac{2}{x^2-3x}=\frac{24}{x^4-2x^3-3x^2}+\frac{11}{x^3+x^2}\,.$$

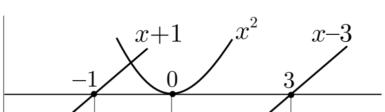
a) $p(x)=x^2(x^2-2x-3)$. Cerquem les arrels del segon polinomi,

$$x^2-2x-3=0\iff x=\frac{1\pm\sqrt{1+3}}{1}=\frac{1\pm 2}{1}=\begin{cases}3\\-1.\end{cases}$$

Per tant,
$$\boxed{p(x)=x^2(x-3)(x+1),\ \text{i les seves arrels són }-1,\ 3,\ \text{i }0}.$$

b) El signe l'obtenim a partir de l'estudi del signe dels tres factors:

Gràfic dels factors



Signe dels factors	+·−·−	+·+·−	+·+·−	+·+·+
Signe de $p(x)$	⊕	⊖	⊖	⊕

Dels gràfics, s'obté $p(x)\leq 0\iff -1\leq x\leq 3$, és a dir
$$\boxed{x\in[-1,3]}$$

c) Factoritzem els denominadors,

$$\left.\begin{array}{l}x^2-3x=x(x-3)\\ x^3+x^2=x^2(x+1)\\ x^4-2x^3-3x^2=x^2(x-3)(x+1)\end{array}\right\}\Longrightarrow \text{m.c.m.}=x^2(x-3)(x+1).$$

Consegüentment, si $x \neq -1, 0, 3$, l'equació de l'enunciat equival a

$$\begin{aligned} 2(x^2+x) = 24 + 11(x-3) \quad &\Longleftrightarrow \quad 2x^2 - 9x + 9 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x = \frac{9 \pm \sqrt{81-72}}{4} = \frac{9 \pm 3}{4} = \begin{cases} 3 \\ \boxed{\dfrac{3}{2}} \end{cases} \end{aligned}$$

L'única solució és $\boxed{x = \dfrac{3}{2}}$.

4. Un comerciant ha comprat dos tipus de tela. El seu valor total ha sigut de 603 euros. De la tela de classe **A** n'ha comprat 6 metres més que de la de classe **B**. La tela de classe **A** hagués costat 270 euros al preu de la de classe **B**. La tela de classe **B** hagués costat 315 euros al preu de la de classe **A**. Trobeu els metres de tela que ha comprat de cada classe.

Anomenem $\begin{cases} x = \text{metres de classe } \mathbf{A} \\ y = \text{metres de classe } \mathbf{B}. \end{cases}$

Llavors, $x = y + 6$ i $\begin{cases} \dfrac{315}{y} = \text{preu del metre de classe } \mathbf{A} \\ \dfrac{270}{y+6} = \text{preu del metre de classe } \mathbf{B}. \end{cases}$

Per tant, segons l'enunciat,

$$(y+6) \cdot \frac{315}{y} + y \cdot \frac{270}{y+6} = 603.$$

Multipliquem les dues parts per $y(y+6)/9$ i en resulta

$$\begin{aligned} &35(y+6)^2 + 30y^2 = 67y(y+6) \\ &\Longleftrightarrow \quad 35y^2 + 420y + 1260 + 30y^2 = 67y^2 + 402y \Longleftrightarrow 2y^2 - 18y - 1260 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad y^2 - 9y - 630 = 0 \Longleftrightarrow y = \frac{9 \pm \sqrt{81+2520}}{2} = \frac{9 \pm 51}{2} = \begin{cases} 30 \\ -21 \end{cases} \end{aligned}$$

Ha comprat $\boxed{\text{30 metres de classe } \mathbf{B} \text{ i 36 metres de classe } \mathbf{A}}$.