IES Pons d'Icart
MATEMÀTIQUES – 1R BAT B 15/XI/2006
Nombres, polinomis i trigonometria $2+2+2+1+1+2$

Heu d'intentar resoldre els cinc exercicis primers i triar-ne un entre els dos últims.

1. Simplifiqueu i racionalitzeu quan calgui de manera que en els resultats no apareguin decimals ni exponents negatius ni fraccionaris:

$$\text{a)}\frac{\sqrt[4]{x^2}\,\sqrt[6]{x}\,\sqrt{xy}}{\sqrt[3]{xy^2}} \qquad \text{b)}\frac{\sqrt{50}+\sqrt{2}}{\sqrt{8}}-\frac{4}{\sqrt{2}}\,.$$

a) $$\frac{\sqrt[4]{x^2}\,\sqrt[6]{x}\,\sqrt{xy}}{\sqrt[3]{xy^2}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}\cdot y^{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}} = x^{\frac{3+1+3-2}{6}}\cdot y^{\frac{3-4}{6}} = \frac{x^{\frac{5}{6}}}{y^{\frac{1}{6}}} = \frac{\sqrt[6]{x^5\,y^5}}{\sqrt[6]{y\,y^5}} = \boxed{\frac{\sqrt[6]{x^5\,y^5}}{y}}.$$

b) $$\frac{\sqrt{50}+\sqrt{2}}{\sqrt{8}}-\frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}-\frac{4\sqrt{2}}{2} = \frac{6\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}-2\sqrt{2} = \boxed{3-2\sqrt{2}}.$$

2. Resoleu l'equació: $\dfrac{6}{x^2-1}-\dfrac{9}{x^2+2x+1}=1\,.$

$$\frac{6}{x^2-1}-\frac{9}{x^2+2x+1}=1 \overset{(*)}{\Longrightarrow} 6(x+1)-9(x-1)=(x-1)(x+1)^2$$
$$\Longrightarrow -3x+15=x^3+x^2-x-1 \Longrightarrow x^3+x^2+2x-16=0$$

$(*)$ Tenim en compte que m.c.m.$(x^2-1, x^2+2x+1)=(x-1)(x+1)^2$.

Apliquem la regla de Ruffini per resoldre l'equació,

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & 2 & -16 \\ 2 & & 2 & 6 & 16 \\ \hline & 1 & 3 & 8 & 0 \end{array}$$

L'única arrel és $\boxed{x=2}$, perquè el polinomi x^2+3x+8 no en té en ser el seu discriminat $3^2-4\cdot 8\cdot 1=-23<0$.

3. Sigui el polinomi $p(x)=x^4-12x^3+36x^2$. Trobeu els valors de la x tals que $p(x)>0$, amb l'ajut dels gràfics de rectes i/o paràboles.

En ser x^2 un factor comú, obtenim la primera descomposició:

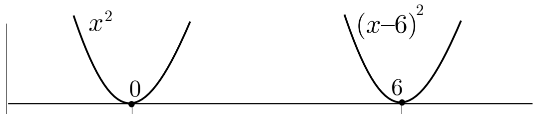
$$p(x)=x^4-12x^3+36x^2=x^2(x^2-12x+36).$$

Cerquem les arrels del segon factor:

$$x^2-12x+36=0 \Longrightarrow x=\frac{6\pm\sqrt{36-36}}{1}=\frac{6\pm 0}{1}= \begin{cases} 6 \\ 6 \end{cases}$$
$$\Longrightarrow x^2-12x+36=(x-6)^2$$

Per tant, la descomposició definitiva és $p(x)=x^2(x-6)^2$. Representem l'esquema gràfic dels factors i n'estudiem els signes:

Gràfic dels factors



Signe dels factors	$+\cdot+$	$+\cdot+$	$+\cdot+$
Signe de $p(x)$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$

Per tant, $\boxed{p(x) > 0 \iff x \in \mathbb{R} - \{0, 6\}}$.

4. Trobeu el coeficient numèric del terme de grau 14 del desenvolupament del binomi

$$\left(2\sqrt{x} - x\right)^{16}.$$

Anomenem T_k el terme que ocupa el lloc k. Llavors,

$$T_k = \binom{16}{k-1}\left(2\sqrt{x}\right)^{17-k}(-x)^{k-1} = \binom{16}{k-1}2^{17-k}(-1)^{k-1}x^{\frac{1}{2}(17-k)+k-1}$$

Imposem que el grau sigui igual a 14:

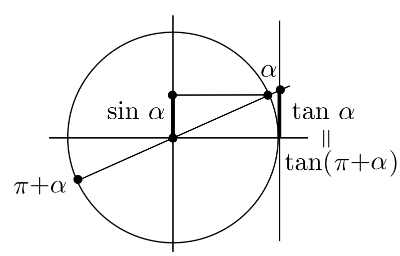
$$\frac{1}{2}(17-k) + k - 1 = 14 \iff 17 - k + 2k - 2 = 28 \iff k = 13.$$

Per tant,

$$\text{Coeficient de } T_{13} = \binom{16}{12}2^4(-1)^{12} = \binom{16}{4}16 = \frac{16\cdot 15\cdot 14\cdot 13}{4\cdot 3\cdot 2}\cdot 16 = \boxed{29120}.$$

5. Considereu $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ tal que $\sin\alpha = \dfrac{2}{5}$. Trobeu sense calculadora el valor exacte de $\tan(\pi + \alpha)$, amb l'ajut de la circumferència trigonomètrica.

A partir de la figura adjunta obtenim



$$\tan(\pi+\alpha) = \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{2}{5}}{+\sqrt{1-\left(\frac{2}{5}\right)^2}} = \frac{\frac{2}{5}}{\sqrt{\frac{21}{25}}} = \boxed{\frac{2}{\sqrt{21}} = \frac{2\sqrt{21}}{21}}.$$

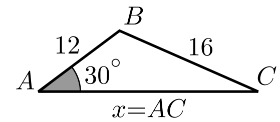
6. Des d'un punt A es veuen dos punts B i C sota un angle de 30°. La distància entre A i B és de 12 km, i la distància entre B i C és de 16 km.

a) Trobeu la distància entre A i C.

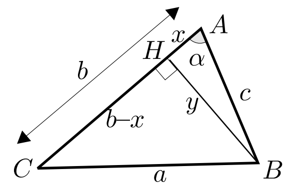
b) Demostreu el teorema utilitzat.

a) Apliquem el teorema del cosinus al triangle $\triangle ABC$ de la figura

$$\begin{aligned} 16 &= \sqrt{12^2 + x^2 - 2 \cdot 12 \cdot x \cdot \cos 30^\circ} \\ &\iff 256 = 144 + x^2 - 12\sqrt{3}\,x \iff x^2 - 12\sqrt{3}\,x - 112 = 0 \\ &\iff x = \frac{6\sqrt{3} \pm \sqrt{108+112}}{1} = \frac{6\sqrt{3} \pm \sqrt{220}}{1} = \begin{cases} 6\sqrt{3} + 2\sqrt{55} \\ 6\sqrt{3} - 2\sqrt{55}. \end{cases} \end{aligned}$$



La distància és de $\boxed{6\sqrt{3} + 2\sqrt{55} \approx 25.2247 \text{ km}}$.



b) Considerem el triangle ABC amb un angle $\alpha = \widehat{BAC}$ agut. En traçar l'altura des de B, obtenim des dels triangles rectangles ABH i CBH,

$$c^2 = x^2 + y^2, \quad a^2 = (b-x)^2 + y^2, \quad \cos\alpha = \frac{x}{c}.$$

Llavors,

$$a^2 = b^2 - 2bx + x^2 + y^2 = b^2 - 2bx + c^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,\cos\alpha.$$

7. Resoleu les qüestions següents:

a) Demostreu que

$$\cos(3x) = \cos^3 x - 3\sin^2 x\,\cos x.$$

Indicació: Pot ser útil escriure $\cos(3x) = \cos(2x + x)$.

b) Trobeu els valors de x, —en graus, minuts i segons—, tals que

$$\cos(3x) - \sin(2x) = 0.$$

Indicació: Podeu utilitzar l'apartat anterior.

a) Utilitzem les fórmules del cosinus de la suma i del sinus i cosinus de l'angle doble.

$$\begin{aligned} \cos(3x) &= \cos(2x+x) = \cos(2x)\,\cos x - \sin(2x)\,\sin x \\ &= \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)\cos x - 2\sin x\,\cos x\,\sin x = \cos^3 x - \sin^2 x\,\cos x - 2\sin^2 x\,\cos x \\ &= \cos^3 x - 3\sin^2 x\,\cos x. \end{aligned}$$

b) Utilitzem la identitat de l'apartat anterior.

$$\begin{aligned} \cos(3x) - \sin(2x) = 0 &\iff \cos^3 x - 3\sin^2 x\,\cos x - 2\sin x\,\cos x = 0 \\ &\iff \cos x(\cos^2 x - 3\sin^2 x - 2\sin x) = 0 \\ &\iff \cos x(-4\sin^2 x - 2\sin x + 1) = 0 \\ &\iff \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{-4} \end{cases} \iff \boxed{\begin{array}{l} x = 90^\circ + n \cdot 180^\circ \\ x = -54^\circ + n \cdot 360^\circ \\ x = 234^\circ + n \cdot 360^\circ. \\ x = 18^\circ + n \cdot 360^\circ \\ x = 162^\circ + n \cdot 360^\circ \end{array}} \end{aligned}$$