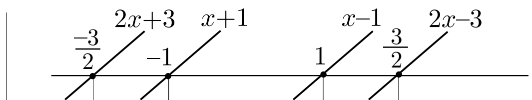
1. Sigui el polinomi $p(x)=4x^4-13x^2+9$. Trobeu els valors de la x tals que $p(x)<0$, amb l'ajut de la seva descomposició i dels gràfics de rectes i/o paràboles.

$$p(x)=0 \iff x^2=\frac{13\pm\sqrt{169-144}}{8}=\frac{13\pm 5}{8}= \begin{cases} \dfrac{9}{4} \Longrightarrow x=\pm\dfrac{3}{2} \\ 1 \Longrightarrow x=\pm 1 \end{cases}$$

Llavors, tenim la descomposició

$$\begin{aligned} p(x) &= 4\left(x-\tfrac{3}{2}\right)\left(x+\tfrac{3}{2}\right)(x-1)(x+1) \\ &= (2x-3)(2x+3)(x-1)(x+1). \end{aligned}$$



Gràfic dels factors					
Signe dels factors	−·−·−·−	+·−·−·−	+·+·−·−	+·+·+·−	+·+·+·+
Signe de $p(x)$	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$
Ordre dels factors	$(2x+3)(x+1)(x-1)(2x-3)$				

Finalment, de l'esquema adjunt en resulta $\boxed{p(x)<0 \iff x\in\left(-\dfrac{3}{2},-1\right)\cup\left(1,\dfrac{3}{2}\right)}$.

2. Resoleu una de les dues equacions següents:

a) $\left(2x^2-\dfrac{30}{x-3}\right)^3-42875=0$ b) $x^2+\dfrac{53}{x}=\dfrac{104}{x-x^2}$.

a) $\left(2x^2-\dfrac{30}{x-3}\right)^3-42875=0 \Longrightarrow 2x^2-\dfrac{30}{x-3}=\sqrt[3]{42875}=35 \Longrightarrow 2x^3-6x^2-35x+75=0.$

Cerquem solucions amb la regla de Ruffini.

$$\left.\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -6 & -35 & 75 \\ 5 & & 10 & 20 & -75 \\ \hline & 2 & 4 & -15 & 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{x=5 \ \text{ i } \ x=\frac{-2\pm\sqrt{4+30}}{2}=-1\pm\frac{\sqrt{34}}{2}}.$$

b) $x^2+\dfrac{53}{x}=\dfrac{104}{x-x^2} \iff x^3-x^4+53-53x=104 \iff x^4-x^3+53x+51=0.$

Apliquem la regla de Ruffini per trobar solucions:

$$\left.\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -1 & 0 & 53 & 51 \\ -3 & & -3 & 12 & -36 & -51 \\ \hline & 1 & -4 & 12 & 17 & 0 \\ -1 & & -1 & 5 & 17 & \\ \hline & 1 & -5 & 17 & 0 & \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{x=-3 \ \text{ i } \ x=-1} \left(\nexists\, x=\frac{5\pm\sqrt{25-68}}{2}\right).$$

3. Trieu un dels dos apartats següents i demostreu-ne la veritat o falsedat sense calculadora:

$$\text{a)}\quad \sqrt[3]{0.003^{44}}\cdot\left(\frac{9^2}{100^7}\right)^{-3}=\frac{9\sqrt[3]{9}}{100}\,. \qquad \text{b)}\quad \frac{\sqrt{\sqrt{32}-4}}{\sqrt{4-\sqrt{8}}}=\sqrt[4]{2}\,.$$

a) És certa perquè

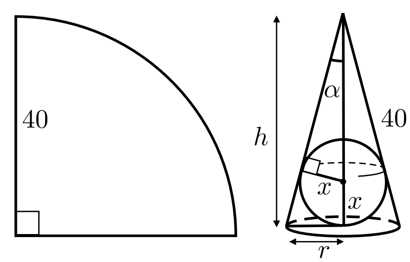
$$\begin{aligned}\sqrt[3]{0.003^{44}}\cdot\left(\frac{9^2}{100^7}\right)^{-3} &= \left(3\cdot 10^{-3}\right)^{44/3}\cdot\left(3^4\cdot 10^{-14}\right)^{-3}=3^{\frac{44}{3}-12}\cdot 10^{-44+42}\\ &= 3^{\frac{8}{3}}\cdot 10^{-2}=\frac{\sqrt[3]{3^8}}{100}=\frac{3^2\sqrt[3]{3^2}}{100}=\frac{9\sqrt[3]{9}}{100}\,.\end{aligned}$$

b) És certa perquè $\sqrt{4-\sqrt{8}}\cdot\sqrt[4]{2}=\sqrt{\sqrt{2}\left(4-\sqrt{8}\right)}=\sqrt{4\sqrt{2}-\sqrt{16}}=\sqrt{\sqrt{32}-4}$.

4. Tenim una cartolina amb forma de sector circular de 40 cm de radi i 90° d'angle central. Construïm un con ajuntant els dos radis del seu perímetre. Calculeu el diàmetre de la base del con, la seva altura i el radi de l'esfera inscrita si considerem el con amb tapa.

La construcció del con implica que la longitud de l'arc del sector circular és igual a la longitud de la circumferència base del con. Llavors, de la fórmula de la longitud d'un arc i del teorema de Pitàgoras, obtenim el radi r de la base del con i la seva altura en cm:

$$\frac{\pi}{2}\cdot 40=2\pi\, r\Longrightarrow \boxed{2r=20}\Longrightarrow \boxed{h=\sqrt{40^2-10^2}=10\sqrt{15}}\,.$$



Quant al radi x de l'esfera inscrita, observem els triangles rectangles del gràfic i obtenim

$$\sin\alpha=\frac{r}{40}=\frac{x}{h-x}\Longrightarrow\frac{1}{4}=\frac{x}{10\sqrt{15}-x}\Longrightarrow 5x=10\sqrt{15}\Longrightarrow\boxed{x=2\sqrt{15}\approx 7.746\text{ cm}}\,.$$

5. Resoleu una de les dues qüestions següents:

a) Demostreu que
$$2\,\text{cotan}\, a=\text{cotan}\left(\frac{a}{2}\right)-\tan\left(\frac{a}{2}\right).$$

b) Trobeu els valors de x, —en graus, minuts i segons—, tals que
$$2\cos^2 x-\sin^2(2x)=1.$$

a) $2\,\text{cotan}\, a=\dfrac{2\cos a}{\sin a}=\dfrac{2\left(\cos^2\left(\frac{a}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{a}{2}\right)\right)}{2\,\sin\left(\frac{a}{2}\right)\,\cos\left(\frac{a}{2}\right)}=\dfrac{\cos\left(\frac{a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)}-\dfrac{\sin\left(\frac{a}{2}\right)}{\cos\left(\frac{a}{2}\right)}=\text{cotan}\left(\dfrac{a}{2}\right)-\tan\left(\dfrac{a}{2}\right)$

b) Aplicarem les fórmules de l'angle meitat per presentar l'expressió en funció de les raons trigonomètriques de l'angle $2x$.

$$\begin{aligned}2\cos^2 x-\sin^2(2x)=1 \;&\Longleftrightarrow\; \frac{2(1+\cos(2x))}{2}-1+\cos^2(2x)=1\\ &\Longleftrightarrow\; \cos^2(2x)+\cos(2x)-1=0\Longleftrightarrow\cos(2x)=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

Només serveix la solució $\cos(2x) = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, perquè l'altra és menor que -1. Per tant,

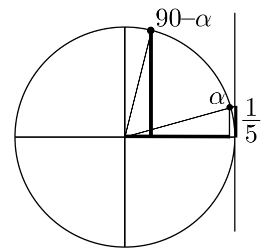
$$2x = \pm 51^\circ\, 49'\, 38.25'' + n \cdot 360^\circ \iff \boxed{x = \pm 25^\circ\, 54'\, 49.13'' + n \cdot 180^\circ}.$$

6. Resoleu una de les dues qüestions següents:

a) Considereu $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ tal que $\operatorname{cotan}\alpha = 5$. Trobeu sense calculadora el valor exacte de $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)$, amb l'ajut de la circumferència trigonomètrica.

b) Calculeu tots els angles x tals que $\cos\left(5x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$.

a) Segons podem observar a la circumferència trigonomètrica adjunta,



$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$$

i, per tant,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+1/25}} = \frac{5}{\sqrt{25+1}} = \boxed{\frac{5}{\sqrt{26}}}.$$

b) $$\cos\left(5x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow 5x - \frac{\pi}{3} = \begin{cases} \dfrac{3\pi}{4} + 2n\pi \\ \dfrac{5\pi}{4} + 2n\pi \end{cases} \Longrightarrow 5x = \begin{cases} \dfrac{13\pi}{12} + 2n\pi \\ \dfrac{19\pi}{12} + 2n\pi \end{cases}$$

Finalment, obtenim

$$\boxed{x = \begin{cases} \dfrac{13\pi}{60} + \dfrac{2n\pi}{5} = 39^\circ + n \cdot 72^\circ \\ \dfrac{19\pi}{60} + \dfrac{2n\pi}{5} = 57^\circ + n \cdot 72^\circ \end{cases}}$$