1. Resoleu l'equació $\dfrac{4}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{8}{x-1}=3$

Tenim en compte que $x-1=(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)$. Llavors, si multipliquem els dos membres de l'equació per $x-1$, obtenim

$$4\left(\sqrt{x}+1\right)+8=3(x-1) \iff 4\sqrt{x}+12=3x-3 \iff 3x-4\sqrt{x}-15=0$$

$$\iff \sqrt{x}=\frac{2\pm\sqrt{4+45}}{3}=\frac{2\pm 7}{3}= \begin{cases} 3 \Longrightarrow x=9 \\ -\dfrac{5}{3} \Longrightarrow x=\dfrac{25}{9}. \end{cases}$$

Es comprova que l'única solució bona és $\boxed{x=9}$.

2. Considereu el polinomi $p(x)=x^4-6x^2+8x-3$.

a) Trobeu les seves arrels.

b) Feu-ne la descomposició factorial.

c) Estudieu, mitjançant el traçat de gràfics de rectes i/o paràboles, quins són els nombres x tals que $p(x)>0$.

$$\left.\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -6 & 8 & -3 \\ 1 & & 1 & 1 & -5 & 3 \\ \hline & 1 & 1 & -5 & 3 & 0 \\ 1 & & 1 & 2 & -3 & \\ \hline & 1 & 2 & -3 & 0 & \\ 1 & & 1 & 3 & & \\ \hline & 1 & 3 & 0 & & \\ \multicolumn{6}{l}{x+3=0 \Longrightarrow x=-3} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

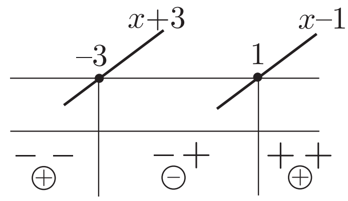
a) Mitjançant l'aplicació de la regla de Ruffini s'han obtingut les arrels,

$$\boxed{1,\ -3}.$$

b) La descomposició en factors primers ha resultat ser,

$$\boxed{p(x)=(x-1)^3(x+3)}.$$

c) L'exponent 3 conserva el signe del factor $x-1$. Per tant, n'hi ha prou amb estudiar el signe dels gràfics dels factors $x-1$ i $x+3$. Ho farem seguint l'ordre de la descomposició.



$$\boxed{p(x)>0 \iff x\in(-\infty\,,\,-3)\cup(1,+\infty)}.$$

3. Sabem que $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ i $\sin\alpha=\dfrac{1}{4}$. Calculeu $\tan\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)$:

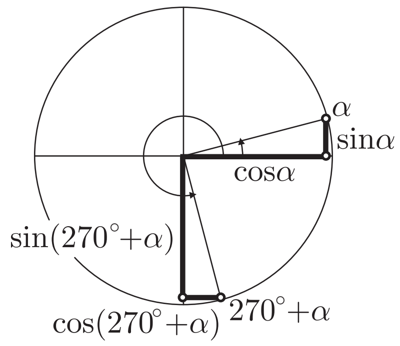
a) Amb l'ajut de la circumferència trigonomètrica i sense calculadora.

b) Amb l'ajut de la calculadora i sense recórrer a la circumferència trigonomètrica.

a) Representem els angles en la circumferència trigonomètrica i observem que,

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = \frac{\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)} = \frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$= -\frac{-\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^2}}{\dfrac{1}{4}} = \boxed{-\sqrt{15}}.$$



b) De l'enunciat es dedueix, $\alpha = \arcsin\left(\dfrac{1}{4}\right) = 14°\ 28'\ 39.04''$. Llavors,

$$270° + \alpha = 284°\ 28'\ 39.04'' \Longrightarrow \boxed{\tan(284°\ 28'\ 39.04'') \approx -3.872983346}.$$

Amb la calculadora s'obté $-\sqrt{15} \approx -3.872983346$.

4. Trobeu tots els angles x que satisfan l'equació $\quad 3\cos(2x) = 2 + \sin x$.

$$\begin{aligned} 3\cos(2x) = 2+\sin x &\Longrightarrow 3\cos^2 x - 3\sin^2 x = 2 + \sin x \\ &\Longrightarrow 3(1-\sin^2 x) - 3\sin^2 x = 2 + \sin x \Longrightarrow 6\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \\ &\Longrightarrow \sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{12} = \frac{-1\pm 5}{12} = \begin{cases} \dfrac{1}{3} \\ -\dfrac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\sin x = \frac{1}{3} \Longrightarrow \left\{ \boxed{\begin{array}{l} x = 19°28'16.4'' + n\cdot 360° \\ x = 160°31'43.6'' + n\cdot 360° \end{array}} \right. \qquad \sin x = -\frac{1}{2} \Longrightarrow \left\{ \boxed{\begin{array}{l} x = 210° + n\cdot 360° \\ x = 330° + n\cdot 360° \end{array}} \right.$$

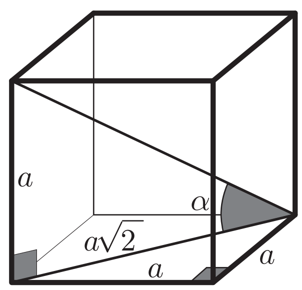
5. Resoleu una de les dues qüestions següents:

(a) Calculeu en graus, minuts i segons, l'angle que forma la diagonal interior d'un cub amb cadascuna de les cares del cub.

(b) El punt P més alt d'una torre de comunicacions es veu des d'un punt A del terra situat al Nord de la torre sota un angle d'elevació de 36°. Des d'un punt B del terra situat al Sud de la torre es veu P amb un angle d'elevació de 64°. Calculeu l'altura del punt P sobre el terra si sabem que la distància entre els dos punts A i B és de 620 m i que el terra és pla.

(a) En el triangle rectangle de la figura observem que l'angle α de la diagonal interior amb una qualsevol de les cares determina un triangle rectangle de catets a i $\sqrt{a^2+a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$. Llavors,

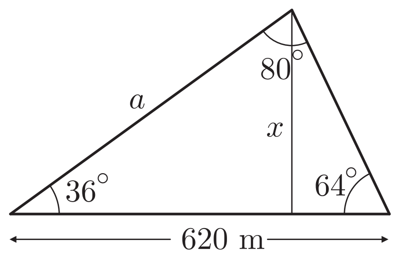
$$\tan\alpha = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \boxed{35°15'52''}.$$



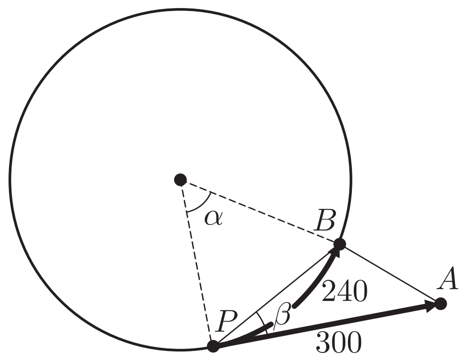
(b) Anomenem x l'alçada de la torre. Apliquem el teorema del sinus i tenim,

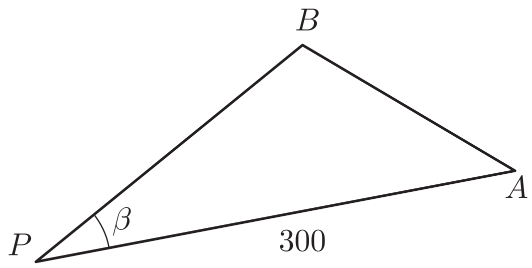
$$\frac{a}{\sin 64^\circ} = \frac{620}{\sin 80^\circ} \Longrightarrow x = a \cdot \sin 36^\circ = \frac{620 \cdot \sin 64^\circ \cdot \sin 36^\circ}{\sin 80^\circ}$$

L'altura de la torre és $\boxed{x \approx 332.598 \text{ m}}$.



6. Dos mòbils A i B surten al mateix temps i en el mateix sentit des d'un punt P d'una circumferència. El mòbil A porta una velocitat de 10 m/sin i segueix la direcció de la tangent en P. El mòbil B porta una velocitat de 8 m/s i corre sobre el perímetre de la circumferència. Si la circumferència té un radi de 1200 m, calculeu la distància que separa els dos mòbils al cap de mig minut.





Les distàncies recorregudes pels dos mòbils són $10 \cdot 30 = 300$ m i $8 \cdot 30 = 240$ m. La distància que separa els mòbils és AB. Mirarem de trobar-la aplicant el teorema del cosinus sobre el triangle $\triangle BPA$. Prèviament cal que calculem els valors de l'angle $\beta = \alpha/2$ i de la distància PB.

$$\begin{aligned} \frac{240}{\alpha} = \frac{2400\pi}{360^\circ} \quad &\Longrightarrow \quad \alpha = \frac{36^\circ}{\pi} \approx 11^\circ 37' 32.96'' \Longrightarrow \beta \approx 5^\circ 48' 46.48'' \\ &\Longrightarrow \quad PB = \sqrt{1200^2 + 1200^2 - 2 \cdot 1200^2 \cos\alpha} \approx \sqrt{57408.2558} \approx 239.6002. \end{aligned}$$

Conseqüentment,

$$AB = \sqrt{300^2 + PB^2 - 600 \cdot PB \cdot \cos\beta} \approx \sqrt{4366.3376} \approx \boxed{66.08 \text{ m}}.$$

Nota final: Si se suposa que el desplaçament sobre la circumferència, en recórrer un angle petit, és aproximadament rectilini, s'obté que $AB = 65.72$ m. L'error d'aquesta aproximació augmentaria amb l'angle recorregut i no s'accepta com a solució del problema.