IES Pons d'Icart
MATEMÀTIQUES – 1R BAT 31/01/2011
Trigonometria i complexos (10+5)+15+15+15+15+10+10+10

1. Sabem que $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ i $\cos\alpha = \dfrac{1}{4}$. Calculeu $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)$:

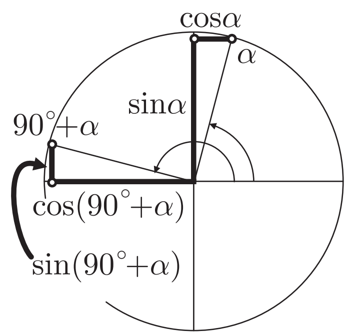
a) Amb l'ajut de la circumferència trigonomètrica i sense calculadora.

b) Amb l'ajut de la calculadora i sense recórrer a la circumferència trigonomètrica.

a) En primer lloc, representem els angles en la circumferència trigonomètrica i comparem les raons trigonomètriques implicades,

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha}$$

$$= -\frac{\frac{1}{4}}{-\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}} = \boxed{-\frac{\sqrt{15}}{15}}.$$



b) De l'enunciat es dedueix, $\alpha = \arccos\left(\dfrac{1}{4}\right) = 75^\circ\ 31'\ 20.96''$. Llavors,

$$90^\circ + \alpha = 165^\circ\ 31'\ 20.96'' \Longrightarrow \boxed{\tan(165^\circ\ 31'\ 20.96'') \approx -0.258198889}.$$

Amb la calculadora s'obté $-\dfrac{\sqrt{15}}{15} \approx -0.258198889$.

2. Trobeu tots els angles x entre 0° i 360° que satisfan l'equació $2\cos(2x) + \cos^2 x = 0$.

$$2\cos(2x) + \cos^2 x = 0 \Longrightarrow 2\cos(2x) + \frac{1+\cos(2x)}{2} = 0 \Longrightarrow 4\cos(2x) + 1 + \cos(2x) = 0$$

$$\Longrightarrow 5\cos(2x) = -1 \Longrightarrow \cos(2x) = -\frac{1}{5} \Longrightarrow 2x = \begin{cases} 101^\circ\ 32'\ 13'' + n\cdot 360^\circ \\ 258^\circ\ 27'\ 49.6'' + n\cdot 360^\circ \end{cases}$$

$$\Longrightarrow x = \begin{cases} 50^\circ\ 46'\ 65.3'' + n\cdot 180^\circ \\ 129^\circ\ 13'\ 53.4'' + n\cdot 180^\circ \end{cases} \Longrightarrow \boxed{x = \begin{cases} 50^\circ\ 46'\ 6.53'' \\ 129^\circ\ 13'\ 53.46'' \\ 230^\circ\ 46'\ 6.53'' \\ 309^\circ\ 13'\ 53.46'' \end{cases}}$$

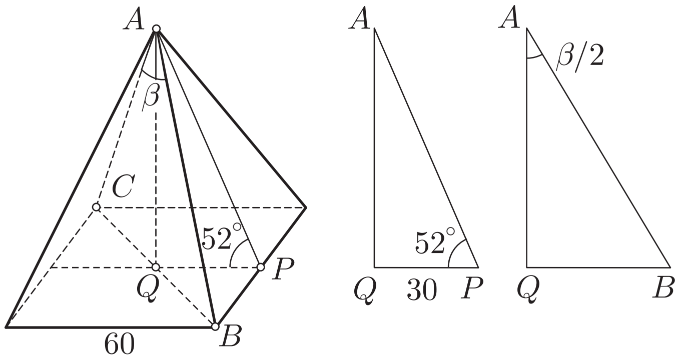
3. El costat de la base d'una piràmide quadrangular regular mesura 60 m. La inclinació de les seves quatre cares laterals respecte del terra és del 52°. Calculeu, en graus, minuts i segons, l'angle que formen dues arestes laterals oposades.

Observem que

$$\begin{cases} BQ = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{\sqrt{60^2+60^2}}{2} = 30\sqrt{2} \\ AQ = 30\tan 52^\circ. \end{cases}$$

Per tant,

$$\begin{cases} \tan(\beta/2) = \dfrac{BQ}{AQ} = \dfrac{30\sqrt{2}}{30\tan 52^\circ} = \dfrac{\sqrt{2}}{\tan 52^\circ} \\ \Longrightarrow \beta/2 = 47^\circ\ 51'\ 11.37'' \\ \Longrightarrow \boxed{\beta = 95^\circ\ 42'\ 22.75''}. \end{cases}$$



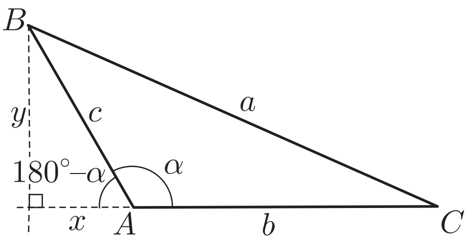
4. Demostreu el teorema del cosinus quan l'angle implicat és obtús.

En el triangle adjunt $\triangle ABC$, en què $\alpha > 90^\circ$ hem de demostrar que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

Si observem els dos triangles rectangles que es formen en traçar l'altura sobre el costat AC, obtenim dos segments auxiliars x i y i es compleix:

$$\begin{cases} a^2 = y^2 + (x+b)^2 \\ y = c\cdot\sin(180^\circ-\alpha) = c\cdot\sin\alpha \\ x = c\cdot\cos(180^\circ-\alpha) = c\cdot(-\cos\alpha) \end{cases}$$



Llavors, si substituïm x i y en la primera equació i operem,

$$\begin{aligned} a^2 &= c^2\sin^2\alpha + (b - c\cos\alpha)^2 = c^2\sin^2\alpha + b^2 + c^2\cos^2\alpha - 2bc\cos\alpha \\ &= b^2 + c^2\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right) - 2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha. \end{aligned}$$

5. Calculeu:

a) $\dfrac{1-2i}{3+4i}$ b) $\sqrt{15-8i}$ c) $i^{\,2010^{\,2011}}$

a) $\dfrac{1-2i}{3+4i} = \dfrac{1-2i}{3+4i}\cdot\dfrac{3-4i}{3-4i} = \dfrac{(3-8)+(-4-6)i}{3^2+4^2} = -\dfrac{5}{25} - \dfrac{10}{25}i = \boxed{-\dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{5}i}.$

b) $\sqrt{15-8i} = a + b\,i \Longrightarrow (a+b\,i)^2 = 15 - 8i \Longrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 15 \\ 2ab = -8. \end{cases}$

Resolem el sistema per substitució:

$$b = -\frac{4}{a} \quad\Longrightarrow\quad a^2 - \frac{16}{a^2} = 15 \Longrightarrow a^4 - 15a^2 - 16 = 0$$

$$\Longrightarrow\quad a^2 = \frac{15 \pm \sqrt{225+64}}{2} = \frac{15 \pm 17}{2} = \begin{cases} 16 \Longrightarrow a = \pm 4 \Longrightarrow b = -\dfrac{4}{a} = \mp 1 \\ -1 \Longrightarrow \text{ no existeix } a \end{cases}$$

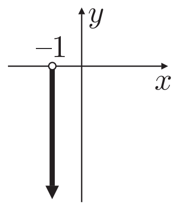
Per tant, $\boxed{\sqrt{15-8i} = \begin{cases} 4-i \\ -4+i \end{cases}}$.

c) 2010 és múltiple de 2 $\Longrightarrow$ 2010^2 és múltiple de 4 $\Longrightarrow$ $2010^{\,2011} = 2010^2 \cdot 2010^{\,2009}$ és múltiple de 4. Per tant,

$$i^{\,2010^{\,2011}} = i^{4\cdot n} = \left(i^4\right)^n = 1^n = \boxed{1}.$$

6. Representeu gràficament els afixos del conjunt de nombres $\left\{\dfrac{1-k^2\,i}{k^2\,i} \text{ tals que } k \in \mathbb{R}\right\}$.

El nombre $\dfrac{1-k^2\,i}{k^2\,i}\cdot\dfrac{i}{i} = \dfrac{k^2+i}{-k^2} = -1-\dfrac{1}{k^2}\,i$, té la seva part real constant i igual a -1. La seva part imaginària és sempre negativa i recorre tots els nombres de l'interval $(0,-\infty)$, perquè k^2 pot tenir qualsevol valor entre 0 i $+\infty$. Llavors, en resulta el conjunt de punts de la semirecta $\boxed{\{(x,y) \text{ tals que } x=-1 \text{ i } y<0\}}$ representada en el gràfic adjunt.



7. El mòdul del nombre complex $\dfrac{1+a\,i}{a+i}$ val 1. Trobeu la seva expressió en forma binòmica.

En ser $|1+a\,i| = |a+i| = \sqrt{a^2+1}$ llavors, $\left|\dfrac{1+a\,i}{a+i}\right| = \dfrac{\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{a^2+1}}$. Per tant, l'enunciat no imposa cap restricció sobre el valor de a i només cal operar i expressar el resultat en forma binòmica.

$$\frac{1+a\,i}{a+i}\cdot\frac{a-i}{a-i} = \frac{(a+a)+(a^2-1)i}{a^2+1} = \boxed{\frac{2a}{a^2+1}+\frac{a^2-1}{a^2+1}\,i}.$$

8. Sigui $z = -\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{2}\,i$. Expresseu z^4 en forma binòmica amb dos procediments diferents:

a) Utilitzant els càlculs en forma polar.

b) Utilitzant el desenvolupament de la potència d'un binomi.

a) Si $z = -\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{2}\,i = r_\alpha$ llavors,

$$\begin{cases} r = |z| = \sqrt{\left(-\sqrt[4]{2}\right)^2+\left(\sqrt[4]{2}\right)^2} = \sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{2}} = \sqrt{2\sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt{8}} = \sqrt[4]{8} \\ \tan\alpha = \dfrac{\sqrt[4]{2}}{-\sqrt[4]{2}} = -1 \Longrightarrow \alpha = \operatorname{Arg}(z) = 135^\circ \text{ (perquè } z \text{ està en el segon quadrant)} \end{cases}$$

Per tant, $z^4 = (r_\alpha)^4 = \left(r^4\right)_{4\alpha} = \left[\left(\sqrt[4]{8}\right)^4\right]_{4\cdot 135^\circ} = 8_{540^\circ} = 8_{180^\circ} = \boxed{-8}$.

b)
$$\begin{aligned}\left(-\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{2}\,i\right)^4 &= \binom{4}{0}\left(-\sqrt[4]{2}\right)^4+\binom{4}{1}\left(-\sqrt[4]{2}\right)^3\sqrt[4]{2}\,i+\binom{4}{2}\left(-\sqrt[4]{2}\right)^2\left(\sqrt[4]{2}\,i\right)^2 \\ &\quad+\binom{4}{3}\left(-\sqrt[4]{2}\right)\left(\sqrt[4]{2}\,i\right)^3+\binom{4}{4}\left(-\sqrt[4]{2}\right)^4 \\ &= 1\cdot 2-4\cdot 2\cdot i+6\cdot 2\cdot(-1)-4\cdot 2\cdot(-i)+1\cdot 2\cdot 1 \\ &= (2-12+2)+(-8+8)i = \boxed{-8}.\end{aligned}$$