1. Trobeu les solucions α, tals que $0° \le \alpha < 360°$, de l'equació

$$(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 2\cos^2(2\alpha).$$

$$(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 2\cos^2(2\alpha) \iff \sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cos^2(2\alpha)$$
$$\iff 1 - 2\sin(2\alpha) = 2 - 2\sin^2(2\alpha) \iff 2\sin^2(2\alpha) - \sin(2\alpha) - 1 = 0$$
$$\iff \sin(2\alpha) = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1\pm 3}{4} = \begin{cases} 1 \\ -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha) = 1 \implies 2\alpha = \dfrac{\pi}{2} + n\cdot 2\pi = 90° + n\cdot 360° \\ \sin(2\alpha) = -\dfrac{1}{2} \implies \begin{cases} 2\alpha = \dfrac{7\pi}{6} + n\cdot 2\pi = 210° + n\cdot 360° \\ 2\alpha = \dfrac{11\pi}{6} + n\cdot 2\pi = 330° + n\cdot 360° \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{\pi}{4} + n\cdot\pi = 45° + n\cdot 180° \\ \alpha = \dfrac{7\pi}{12} + n\cdot\pi = 105° + n\cdot 180° \\ \alpha = \dfrac{11\pi}{12} + n\cdot\pi = 165° + n\cdot 180° \end{cases} \implies$$

Les solucios demanades són: $\{45°,\ 105°,\ 165°,\ 225°,\ 285°,\ 345°\}$.

2. Un pentàgon regular està inscrit en un cercle de radi 5 cm. Calculeu el seu perímetre i la seva àrea.

Si considerem els triangles isòsceles determinats pel centre P i dos vèrtexs A i B consecutius del pentàgon, tenim $\angle APB = \frac{360°}{5} = 72°$, $AP = BP = 5$ i, per tant:

$$\text{Perímetre } = 5\cdot\overline{AB} = 5\cdot\sqrt{5^2+5^2-2\cdot 5\cdot 5\cos 72°} = \boxed{25\sqrt{2(1-\cos 72°)} \approx 29.39 \text{ cm}}.$$
$$\text{Àrea } = 5\cdot\text{Àrea}(\triangle APB) = 5\cdot\frac{5\cdot 5\sin 72°}{2} = \boxed{\frac{125\sin 72°}{2} \approx 59.44 \text{ cm}^2}.$$

3. Calculeu el valor exacte de $\tan 36°$. $\Big($Recordeu que la raó entre la diagonal i el costat d'un pentàgon regular és $\Phi = \frac{1+\sqrt5}{2}\Big)$.

Utilitzarem el triangle $\triangle AMB$, rectangle en M, en què AB és un costat del pentàgon, AM és la meitat d'una diagonal i $\angle BAM = 36°$. Sabem que $\frac{AM}{AB} = \frac{1+\sqrt5}{4}$. Llavors,

$$\cos 36° = \frac{1+\sqrt5}{4} \implies \tan 36° = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 36°} - 1} = \sqrt{\frac{16}{6+2\sqrt5} - 1} = \sqrt{\frac{10-2\sqrt5}{6+2\sqrt5}}$$
$$= \sqrt{\frac{(10-2\sqrt5)(6-2\sqrt5)}{36-20}} = \sqrt{\frac{60+20-(12+20)\sqrt5}{16}} = \boxed{\sqrt{5-2\sqrt5}}.$$

4. Calculeu les arrels terceres de $z = -27$ i expresseu-les en forma binòmica.

Si tenim en compte que $\sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{27_{180^\circ}}$, les arrels demanades són:

$$\begin{cases} \left(\sqrt[3]{27}\right)_{60^\circ} = 3_{60^\circ} = 3(\cos 60^\circ + i\ \sin 60^\circ) = \boxed{\dfrac{3}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\, i} \\ \left(\sqrt[3]{27}\right)_{60^\circ+120^\circ} = 3_{180^\circ} = 3(\cos 180^\circ + i\ \sin 180^\circ) = \boxed{-3} \\ \left(\sqrt[3]{27}\right)_{60^\circ+240^\circ} = 3_{300^\circ} = 3(\cos 300^\circ + i\ \sin 300^\circ) = \boxed{\dfrac{3}{2} - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\, i} \end{cases}$$

5. El nombre $z = \dfrac{3k^2 - 4\,i}{1 - k\,i}$, en què $k \in \mathbb{R}$, té un argument de 45°. Calculeu el seu mòdul.

Que $\mathrm{Arg}(z) = 45^\circ$ implica que les seves part real i imaginària són iguals. Expressem z en forma binòmica i imposem aquesta condició:

$$z = \frac{3k^2 - 4\,i}{1 - k\,i} = \frac{3k^2 - 4\,i}{1 - k\,i} \cdot \frac{1 + k\,i}{1 + k\,i} = \frac{(3k^2 + 4k) + (3k^3 - 4)\,i}{1 + k^2}$$

$$\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z) \iff 3k^2 + 4k = 3k^3 - 4 \iff 3k^3 - 3k^2 - 4k - 4 = 0.$$

Llavors, amb la regla de Ruffini, s'obté $3k^3 - 3k^2 - 4k - 4 = (k-2)(3k^2 + 3k + 2)$, el qual només té l'arrel $k = 2$. Finalment, el nombre complex z compleix

$$|z| = \left| \frac{20 + 20\,i}{1 + 4} \right| = |4 + 4\,i| = \sqrt{4^2 + 4^2} = \boxed{\sqrt{32} = 4\sqrt{2}}.$$

6. Trobeu totes les equacions de la recta que passa pels punts $P(1,2)$ i $Q(4,-1)$.

Partim de la definició dels punts $X \in$ recta: $X = P + \alpha\overrightarrow{PQ}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Vectorial	Paramètriques	Contínua
$(x,y) = (1,2) + \alpha(3,-3)$	$\begin{cases} x = 1 + 3\alpha \\ y = 2 - 3\alpha \end{cases}$	$\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{-3}$

Punt-pendent	Explícita	Implícita	Canònica
$y - 2 = (-1)(x - 1)$	$y = -x + 3$	$x + y - 3 = 0$	$\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{3} = 1$

7. Considereu les rectes $\begin{cases} r_1 :\ mx - y = 2 \\ r_2 :\ (m+3)x - (m-1)y = m + 1. \end{cases}$
Trobeu els valors de $m \in \mathbb{R}$ tals que r_1 i r_2 són rectes paral·leles.

$$r_1 \text{ i } r_2 \text{ paral·leles} \iff \frac{m}{m+3} = \frac{1}{m-1} \neq \frac{2}{m+1} \iff \begin{cases} m^2 - 2m - 3 = 0 \\ \text{i} \\ m + 1 \neq 2m - 2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} m = 1 \pm \sqrt{1+3} = \begin{matrix} \nearrow 3 \\ \searrow -1 \end{matrix} \\ \text{i} \\ m \neq 3 \end{cases} \iff \boxed{m = -1}.$$