IES Pons d'Icart
MATEMÀTIQUES – 1R BAT 14/03/2011
Trigonometria, complexos i geometria 20+15+15+15+15+15+15

- Alumnes que heu de recuperar: Qüestions 1 a 7.
- Alumnes que no heu de recuperar: Qüestions 1 a 5, 8 i 9.

---

1. Trobeu les solucions α, tals que $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$, de l'equació

$$\sin^2(2\alpha) = \cos^4(\alpha) + \frac{3}{4}.$$

$$\sin^2(2\alpha) = \cos^4(\alpha) + \frac{3}{4} \Longleftrightarrow 4 \cdot (2\sin\alpha\cos\alpha)^2 = 4\cos^4\alpha + 3$$

$$\Longleftrightarrow \quad 16\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 4\cos^4\alpha + 3 \Longleftrightarrow 16\cos^2\alpha - 16\cos^4\alpha - 4\cos^4\alpha - 3 = 0$$

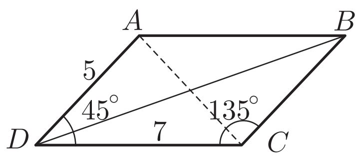
$$\Longleftrightarrow \quad 20\cos^4\alpha - 16\cos^2\alpha + 3 = 0 \Longleftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{8 \pm \sqrt{64-60}}{20} = \frac{8 \pm 2}{20} = \begin{cases} \nearrow \dfrac{1}{2} \\ \searrow \dfrac{3}{10} \end{cases}.$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \cos(\alpha) = +\sqrt{\dfrac{1}{2}} & \Longrightarrow \alpha = \pm 45^\circ + n \cdot 360^\circ \\ \cos(\alpha) = -\sqrt{\dfrac{1}{2}} & \Longrightarrow \alpha = \pm 135^\circ + n \cdot 360^\circ \\ \cos(\alpha) = +\sqrt{\dfrac{3}{10}} & \Longrightarrow \alpha = \pm 56^\circ\, 47'\, 20.72'' + n \cdot 360^\circ \\ \cos(\alpha) = -\sqrt{\dfrac{3}{10}} & \Longrightarrow \alpha = \pm 123^\circ\, 12'\, 39.2'' + n \cdot 360^\circ \end{array}\right. \Longrightarrow \boxed{\alpha = \left\{\begin{array}{l} 45^\circ \\ 315^\circ \\ 135^\circ \\ 225^\circ \\ 56^\circ\, 47'\, 20.72'' \\ 303^\circ 12' 39.2'' \\ 123^\circ\, 12'\, 39.2'' \\ 236^\circ\, 47'\, 27'' \end{array}\right.}$$

2. Un paral·lelogram té els seus costats de longituds 5 i 7 cm. Un dels seus angles mesura 45°. Calculeu la longitud de la seva diagonal major i la seva àrea.

La diagonal major BD és el costat oposat a l'angle $\angle DCB$ en el triangle $\triangle DCB$. Apliquem el teorema del cosinus i obtenim:

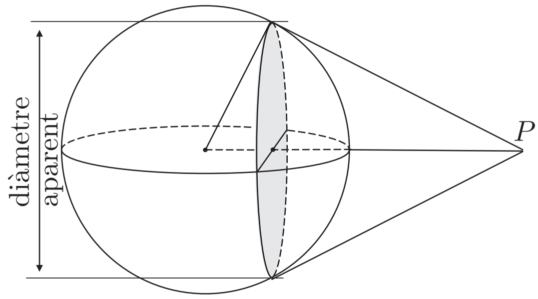
$$DB = \sqrt{5^2 + 7^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cos 135^\circ} = \sqrt{74 + 35\sqrt{2}} \approx \boxed{11.1129 \text{ cm}}.$$



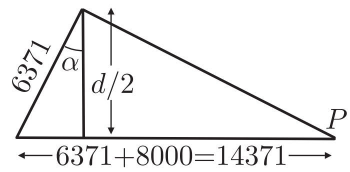
Per calcular l'àrea considerarem dues vegades el triangle $\triangle ADC$.

$$\text{Àrea} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 7 \cdot \sin 45^\circ = \boxed{\frac{35\sqrt{2}}{2} \approx 24.7487 \text{ cm}^2}.$$

3. Calculeu el valor del diàmetre aparent de la Terra vist des d'un punt P que es troba a 8000 km de distància de la seva superfície. (Considereu que el radi de la Terra val 6371 km.)



$$\begin{aligned} d &= 2\cdot 6371\cos\alpha = 2\cdot 6371\sqrt{1-\sin^2\alpha} \\ &= 2\cdot 6371\sqrt{1-\left(\frac{6371}{6371+8000}\right)^2} = \boxed{11421.44\,\text{km}}. \end{aligned}$$



4. Resoleu $z^4+8+8\sqrt{3}\,i=0$. Expresseu els resultats en forma binòmica.

Observem que $z^4+8+8\sqrt{3}\,i=0 \Longleftrightarrow z^4=-8-8\sqrt{3}\,i \Longleftrightarrow z=\sqrt[4]{-8-8\sqrt{3}\,i}$.
Passem el nombre $-8-8\sqrt{3}\,i$, amb afix en el tercer quadrant, a forma polar r_α:

$$\left.\begin{array}{l} r=|-8-8\sqrt{3}\,i|=\sqrt{(-8)^2+(-8\sqrt{3})^2}=\sqrt{256}=16 \\ \tan\alpha=\dfrac{-8\sqrt{3}}{-8}=\sqrt{3}\Longrightarrow\alpha=240^\circ \end{array}\right\}\Longrightarrow -8-8\sqrt{3}\,i=16_{240^\circ}$$

Llavors,

$$\boxed{z=\sqrt[4]{-8-8\sqrt{3}\,i}=\sqrt[4]{16_{240^\circ}}=\left\{\begin{array}{l} 2_{60^\circ}=2(\cos 60^\circ+i\ \sin 60^\circ)=1+\sqrt{3}\,i \\ 2_{150^\circ}=2(\cos 150^\circ+i\ \sin 150^\circ)=-\sqrt{3}+i \\ 2_{240^\circ}=2(\cos 240^\circ+i\ \sin 240^\circ)=-1-\sqrt{3}\,i \\ 2_{330^\circ}=2(\cos 330^\circ+i\ \sin 330^\circ)=\sqrt{3}-i \end{array}\right.}$$

5. Trobeu, sense calculadora, la part real del nombre $\big(\cos(30^\circ)+i\ \sin(30^\circ)\big)^{2011}$.

$z=\big(\cos 30^\circ+i\ \sin 30^\circ\big)^{2011}=(1_{30^\circ})^{2011}=1_{60330^\circ}=1_{210^\circ}=\cos 210^\circ+i\ \sin 210^\circ$.

Per tant, $\mathrm{Re}(z)=\cos 210^\circ=\boxed{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$.

6. Trobeu l'equació canònica de la recta paral·lela a $3x+y=5$, que passa pel punt $A(-3,3)$.

La recta serà del tipus $3x+y=k$. Per tant,

$$\left.\begin{array}{l} r:\ 3x+y=K \\ A=(-3,3)\in r \end{array}\right\}\Longrightarrow K=-9+3=-6\Longrightarrow r:\ 3x+y=-6\Longrightarrow \boxed{\frac{x}{-2}+\frac{y}{-6}=1}.$$

7. Considereu les rectes $\left\{\begin{array}{l} r_1: \ (a-1)x - 4y + 5 = 0 \\ r_2: \ 3x + a^2y - 5 = 0. \end{array}\right.$
Trobeu els valors d'a per als quals les dues rectes són:
a) Paral·leles. b) Coincidents. c) Incidents.

Observem que: $\dfrac{a-1}{3} = \dfrac{-4}{a^2} \Longrightarrow a^3 - a^2 + 12 = 0 \Longrightarrow a = -2$ perquè $\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & 0 & 12 \\ -2 & & -2 & 6 & -12 \\ \hline & 1 & -3 & 6 & 0 \end{array}$.

No hi ha cap més solució perquè a^2-3a+6 té el discriminant $(-3)^2-4\cdot1\cdot6 = 9-24 = -13 < 0$.

Llavors,

- $\boxed{a = -2 \iff \text{rectes coincidents}}$. Perquè $\dfrac{a-1}{3} = \dfrac{-4}{a^2} = -1 = \dfrac{5}{-5}$.
- $\boxed{a \neq -2 \iff \text{rectes incidents}}$. Perquè $\dfrac{a-1}{3} \neq \dfrac{-4}{a^2}$.
- No hi ha cap valor de a per al qual les rectes siguin paral·leles.

8. Donats els punts $A(0,0)$ i $B(0,4)$, trobeu l'equació del lloc geomètric dels punts P tals que $d(P,A) = 4\,d(P,B)$. Descriviu la figura que representa aquesta equació.

$$\begin{aligned} d(P,A) = 4\,d(P,B) &\iff \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} = 4\sqrt{(x-0)^2+(y-4)^2} \\ &\iff x^2+y^2 = 16(x^2+(y-4)^2 \iff \boxed{15x^2+15y^2-128y+256=0}. \end{aligned}$$

Si dividim per 15 i completem quadrats, obtenim l'equació equivalent

$$x^2 + \left(y - \frac{64}{15}\right)^2 - \left(\frac{64}{15}\right)^2 + \frac{256}{15} = 0 \iff x^2 + \left(y - \frac{64}{15}\right)^2 = \left(\frac{16}{15}\right)^2.$$

Aquesta equació descriu la $\boxed{\text{circumferència de centre } \left(0, \frac{63}{15}\right) \text{ i radi } \frac{16}{15}}$.

9. Trobeu la fórmula del mòdul d'un vector $\vec{u} = (u_1, u_2)$ en la base $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ tal que $|\vec{e}_1| = 1$, $|\vec{e}_2| = 3$, $\tan(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Observem que $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \Longrightarrow \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{5}{4}}} = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{9}{4}}} = \pm\dfrac{2}{3}$. Presentem el cas $\cos\alpha = +\dfrac{2}{3}$:

$$\begin{aligned} |\vec{u}| &= +\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} = +\sqrt{(u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{u}_2)\cdot(u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{u}_2)} \\ &= +\sqrt{(u_1\cdot u_1)\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1 + 2(u_1\cdot u_2)\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2 + (u_2\cdot u_2)\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2} \\ &= +\sqrt{u_1^2\cdot1\cdot1\cdot1 + 2u_1u_2\cdot1\cdot3\cdot\frac{2}{3} + u_2^2\cdot3\cdot3\cdot1} = \boxed{+\sqrt{u_1^2+4u_1u_2+9u_2^2}}. \end{aligned}$$

Per al cas $\cos\alpha = -\dfrac{2}{3}$ obtindríem $|\vec{u}| = +\sqrt{u_1^2 - 4u_1u_2 + 9u_2^2}$