1. Considereu els punts $A(-4,3)$, $B(5,0)$ i $C(4,7)$. Trobeu:

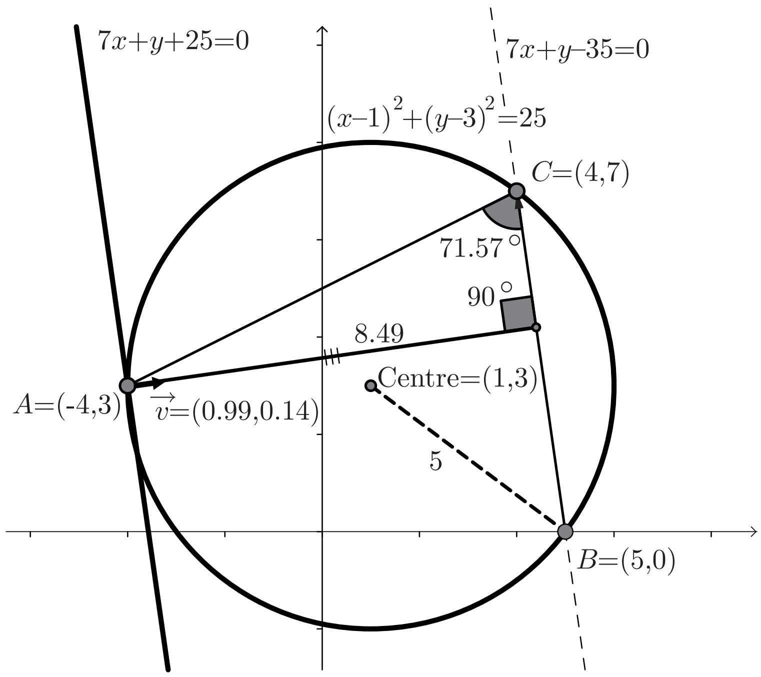
a) Un vector unitari i perpendicular al vector $\overrightarrow{BC}$.

b) L'equació de la recta que passa per A i és paral·lela a la recta que passa per B i C.

c) La distància de A a la recta que passa per B i C.

d) L'angle $\widehat{ACB}$.

e) L'equació general, el centre i el radi de la circumferència que passa per A, B i C.



a) Sabem que $\overrightarrow{BC} = (4-5, 7-0) = (-1,7)$. Llavors, $\vec{v} = (7,1)$ és perpendicular a $\overrightarrow{BC}$ perquè $(7,1)\cdot(-1,7) = 7\cdot(-1)+1\cdot 7 = -7+7 = 0$. D'altra banda $|\vec{v}| = \sqrt{7^2+1^2} = \sqrt{50}$ i, en demanar-nos un vector unitari de la direcció de $\vec{v}$, només caldrà dividir-lo pel seu mòdul. Així, el vector demanat és, $\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \dfrac{1}{\sqrt{50}}(7,1) = \boxed{\left(\dfrac{7}{\sqrt{50}}, \dfrac{1}{\sqrt{50}}\right) \approx (0.99, 0.14)}$.

b) L'equació de la recta que passa per $A = (-4,3)$ i té vector director $\overrightarrow{BC} = (-1,7)$ és,

$$\frac{x+4}{-1} = \frac{y-3}{7} \iff \boxed{7x+y+25=0}.$$

c) La recta r_{BC} que passa per B i C és, $\dfrac{x-5}{-1} = \dfrac{y-0}{7} \iff 7x+y-35=0$. Per tant,

$$d\left(A, r_{BC}\right) = \frac{|7\cdot(-4)+3-35|}{\sqrt{7^2+1^2}} = \frac{60}{\sqrt{50}} = \boxed{6\sqrt{2} \approx 8.49}.$$

d) Si utilitzem la definició de producte escalar tenim,

$$\begin{aligned}\cos(\widehat{ACB}) &= \frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}|\cdot\overrightarrow{CB}} = \frac{(-4-4,3-7)\cdot(5-4,0-7)}{|\overrightarrow{CA}|\cdot\overrightarrow{CB}} = \frac{(-8,-4)\cdot(1,-7)}{\sqrt{64+16}\cdot\sqrt{1+49}}\\ &= \frac{-8+28}{\sqrt{4000}} = \frac{20}{20\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \Longrightarrow \boxed{\widehat{ACB} = 71^\circ\,33'\,54.18''}.\end{aligned}$$

e) L'equació de la circumferència serà $\mathcal{C}:\ x^2+y^2+mx+ny+p=0$. Llavors,

$$\begin{array}{l} A\in\mathcal{C} \Longleftrightarrow 16+\ \ 9-4m+3n+p=0\ (E_1)\\ B\in\mathcal{C} \Longleftrightarrow 25+\ \ 0+5m\qquad\ +p=0\ (E_2)\\ C\in\mathcal{C} \Longleftrightarrow 16+49+4m+7n+p=0\ (E_3)\end{array} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rr} E_2-E_1: & 9m-3n=0\\ -9(E_2-E_3): & \underline{-9m+63n=-360}\\ & 60n=-360\end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} n=-6\\ m=\dfrac{n}{3}=-2\end{array}\right. \overset{(E_2)}{\Longrightarrow} p=-25+10=-15 \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{l}\mathcal{C}: x^2+y^2-2x-6y-15=0\\ \text{Centre} = \left(\dfrac{-m}{2},\dfrac{-n}{2}\right)=(1,3)\\ \text{Radi} = \sqrt{1^2+3^2-p}=\sqrt{10+15}=5.\end{array}}$$

2. Un triangle isòsceles té els dos vèrtexs que determinen el seu costat desigual en els punts $A(0,2)$ i $B(4,0)$. Busqueu el tercer vèrtex si sabem que es troba sobre la recta $r:\ x-4y+16=0$.

El tercer vèrtex P del triangle, a més de trobar-se sobre la recta r, és equidistant dels punts A i B. Per tant, es trobar sobre la mediatriu t del segment AB. L'equació d'aquesta coincideix amb la de la perpendicular pel punt mitjà de AB o, també, amb la del lloc geomètric dels punts que equidisten de A i de B. Finalment el vèrtex P serà igual a $r\cap t$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Punt mitjà de}AB = \left(\dfrac{4+0}{2},\dfrac{0+2}{2}\right)=(2,1)\\ \overrightarrow{AB}=(4-0,0-2)=2\cdot(2,-1)\Longrightarrow t: 2x-y+c=0\end{array}\right\}\Longrightarrow 2\cdot2-1+c=0\Longrightarrow c=-3.$$

Per tant, l'equació de la mediatriu és $t: 2x-y-3=0$ i el punt $P=r\cap t$ és,

$$\left\{\begin{array}{ll} r: & x-4y+16=0\\ t: & 2x-y-3=0\end{array}\right. \Longrightarrow t-2r: 7y-35=0 \Longrightarrow y=5,\ x \overset{(r)}{=} 20-16=4 \Longrightarrow \boxed{P(4,5)}.$$

3. Donats el punt $A(2,0)$ i la recta $r: x=8$, trobeu l'equació del lloc geomètric dels punts P tals que

$$2\cdot d(P,A)=d(P,r).$$

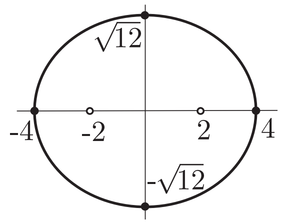
Descriviu el lloc resultant i els seus elements característics.

Imposem la condició donada sobre els punts $P(x,y)$.

$$2\cdot d(P,A)=d(P,r)\Longleftrightarrow 2\sqrt{(x-2)^2+y^2}=\frac{|x-8|}{\sqrt{1^2+0^2}}$$

$$\Longleftrightarrow\quad 4x^2-16x+16+4y^2=x^2-16x+64\Longleftrightarrow 3x^2+4y^2=48\Longleftrightarrow \boxed{\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1}.$$

És una el·lipse de semieixos $a = \sqrt{16} = 4$, $b = \sqrt{12}$ i distància focal $2c = 2 \cdot \sqrt{16 - 12} = 4$. Els seus focus són els punts $(2, 0)$ i $(-2, 0)$ i la seva excentricitat és $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.

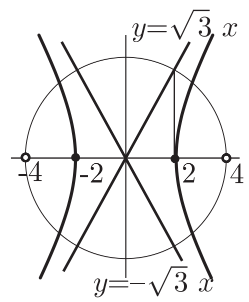


4. Contesteu una de les dues qüestions següents:

a) Quina corba cònica descriu la'equació $3x^2 - y^2 = 12$, i quins són els seus elements característics.

b) Una el·lipse té com a eixos de simetria els eixos de coordenades, un focus en el punt $F\left(\sqrt{8}, 0\right)$ i passa pel punt $A\left(2, \sqrt{5}/3\right)$. Trobeu la seva equació.

a) $3x^2 - y^2 = 12 \iff \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{12} = 1 \Longrightarrow$ és una hipèrbola.
El seu eix real és $2a = 2\sqrt{4} = 4$, el seu eix imaginari és $2b = 2\sqrt{12} = 4\sqrt{3}$ i la distància focal és $2c = 2\sqrt{a^2 + b^2} = 2\sqrt{12 + 4} = 8$. Per tant, els focus estan en els punts $(-4, 0)$ i $(4, 0)$. Les equacions de les seves asímptotes són $y = \pm\dfrac{2\sqrt{3}}{2}\,x = \pm\sqrt{3}\,x$.



b) L'el·lipse tindrà l'equació $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2 - 8} = 1$.

Resolució 1: Si imposem que el punt A sigui de l'el·lipse obtenim,

$$\frac{4}{a^2} + \frac{5}{9(a^2 - 8)} = 1 \Longrightarrow 36a^2 - 288 + 5a^2 = 9a^4 - 72a^2 \iff 9a^4 - 113a^2 + 288 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad a^2 = \frac{113 \pm \sqrt{12769 - 10368}}{18} = \frac{113 \pm 49}{18} = \begin{cases} 9 \Longrightarrow a = 3, \ \ b = \sqrt{9 - 8} = 1 \\ \dfrac{32}{9} < 8 = c^2, \ \text{no pot ser} \end{cases}$$

Per tant, la seva equació és $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{9 - 8} = 1 \iff \boxed{\dfrac{x^2}{9} + y^2 = 1}$.

Resolució 2: Sabem que $d(A; F) + d(A, F') = 2a$. Per tant,

$$\begin{aligned}
2a &= \sqrt{(2 + \sqrt{8})^2 + \frac{5}{9}} + \sqrt{(2 - \sqrt{8})^2 + \frac{5}{9}} = \sqrt{12 + \frac{5}{9} + 4\sqrt{8}} + \sqrt{12 + \frac{5}{9} - 4\sqrt{8}} \\
&= \frac{\sqrt{113 + 36\sqrt{8}} + \sqrt{113 - 36\sqrt{8}}}{3} \\
36a^2 &= 113 + 36\sqrt{8} + 113 - 36\sqrt{8} + 2\sqrt{113^2 - 36^2 \cdot 8} = 226 + 2\sqrt{2401} \\
&= 226 + 2 \cdot 49 = 324 \Longrightarrow a^2 = \frac{324}{36} = 9.
\end{aligned}$$

Per tant, la seva equació és $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{9 - 8} = 1 \iff \boxed{\dfrac{x^2}{9} + y^2 = 1}$.