1. Considereu el $A(1,3)$ i la recta $r: x-2y-2=0$. Trobeu:

a) L'equació explícita de la recta que passa per A i és perpendicular a r.
b) La distància de A a r.
c) L'equació canònica de la recta que passa per A i és paral·lela a r.
d) L'angle que forma la recta r amb la recta $y=x$.
e) L'equació general de la circumferència de centre A que és tangent a r.

a) Les rectes perpendiculars a r tenen la direcció del vector $\vec{v}(1,-2)$ amb coordenades iguals als coeficients de x i y en aquesta recta. Per tant l'equació que busquem és

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{-2} \Longrightarrow y-3=-2x+2 \Longrightarrow \boxed{y=-2x+5}.$$

b) $d(A,r)=\dfrac{|1-2\cdot 3-2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\boxed{\dfrac{7}{\sqrt{5}}}.$

c) En ser paral·lela a r serà del tipus $x-2y+k=0$. Imposem que passi pel punt $A(1,3)$:

$$1-2\cdot 3+k=0 \Longrightarrow k=5 \Longrightarrow \text{la recta és } x-2y+5=0 \Longleftrightarrow \boxed{\frac{x}{-5}+\frac{y}{5/2}=1}.$$

d) Observem que el vector director de $y=x$ és (1,1) i el de la recta r és (2,1). Llavors, l'angle serà,

$$\alpha=\arccos\left|\frac{(1,1)\cdot(2,1)}{\sqrt{1^2+1^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2}}\right|=\arccos\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)=\boxed{18^\circ\,26'\,5.82''}.$$

e) Si és tangent a la recta r el seu radi és igual a la distància del punt A a la recta r. Llavors, l'equació és

$$(x-1)^2+(y-3)^2=\left(\frac{7}{\sqrt{5}}\right)^2=\frac{49}{5} \Longrightarrow \boxed{x^2+y^2-2x-6y+\frac{1}{5}=0}.$$

2. Considereu els punts $P(x,y)$ del pla que satisfan l'equació

$$25x^2+169y^2=4225.$$

Raoneu quina corba cònica descriuen, trobeu les coordenades dels seus focus, les longituds dels seus eixos i escriviu la propietat mètrica que caracteritza els seus punts.

A partir de les equivalències

$$25x^2+169y^2=4225 \Longleftrightarrow \frac{25x^2}{4225}+\frac{169y^2}{4225}=1 \Longleftrightarrow \frac{x^2}{13^2}+\frac{y^2}{5^2}=1,$$

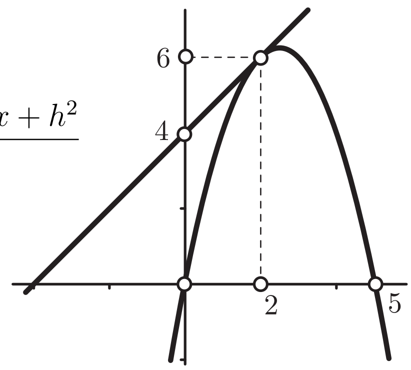
podem dir que els punts $P(x,y)$ descriuen una el·lipse d'eixos $2a=26$ i $2b=10$.
En ser $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{169-25}=\sqrt{144}=12$, té els focus en els punts $F_1(-12,0)$, $F_2(12,0)$.
La propietat mètrica que caracteritza els seus punts P és que

$$d(P,F_1)+d(P,F_2)=2\cdot 13=26.$$

3. Donada la funció $f(x) = 5x - x^2$ trobeu,

a) La funció derivada $f'(x)$ mitjançant la definició en llenguatge de límits.

b) L'equació de la recta tangent al gràfic de $f(x)$ en el punt d'abscissa $x = 2$ i representeu gràficament la funció $f(x)$ i aquesta recta tangent.



a)
$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{5(x+h)-(x+h)^2-(5x-x^2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{5h-2hx+h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h(5-2x+h)}{h} = \lim_{h\to 0}(5-2x+h) = \boxed{5-2x}. \end{aligned}$$

b) Observem que $f(2) = 10 - 4 = 6$ i $f'(2) = 5 - 4 = 1$. Per tant, l'equació buscada és:

$$y - f(2) = f'(2)(x-2) \iff y - 6 = 1(x-2) \iff \boxed{y = x + 4}.$$

4. Considereu la funció $\quad f(x) = \dfrac{1}{x^2} - 1\,.$

a) Trobeu la funció derivada $f'(x)$ mitjançant la definició en llenguatge de límits.

b) Estudieu el signe de $f'(x)$ i la monotonia de $f(x)$.

c) Calculeu $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ i $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

d) Representeu $f(x)$ gràficament a partir de la informació recollida en els apartats anteriors.

a)
$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{(x+h)^2} - 1 - \left(\dfrac{1}{x^2} - 1\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2-(x+h)^2}{(x+h)^2x^2h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-2xh+h^2}{(x+h)^2x^2h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(-2x+h)}{(x+h)^2x^2h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2x+h}{(x+h)^2x^2} = \frac{-2x}{x^2\cdot x^2} = \boxed{-\frac{2}{x^3}}. \end{aligned}$$

b) La funció és derivable en tots els punts del seu domini i la derivada no s'anul·la mai. Per tant, no hi ha extrems locals i

$$x > 0 \Longrightarrow x^3 > 0 \Longrightarrow f'(x) = -\frac{2}{x^3} < 0 \Longrightarrow f \text{ decreix en } (0,+\infty)$$
$$x < 0 \Longrightarrow x^3 < 0 \Longrightarrow f'(x) = -\frac{2}{x^3} > 0 \Longrightarrow f \text{ creix en } (-\infty,0)$$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2} - 1\right) = \dfrac{1}{0^+} - 1 = +\infty - 1 = \boxed{+\infty}$. $\qquad \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{1}{x^2} - 1\right) = \dfrac{1}{+\infty} - 1 = 0 - 1 = \boxed{-1}$.

d) El gràfic s'obté d'observar els resultats següents:

- Els talls amb l'eix OX són $\dfrac{1}{x^2} - 1 = 0 \iff x = \begin{cases} 1 \\ -1. \end{cases}$
- Els resultats de l'estudi de la monotonia i la no existència d'extrems locals.
- Els valors dels límits calculats.