IES Pons d'Icart
MATEMÀTIQUES – 1R BAT — 30/05/2011
Geometria analítica i funcions – 2 — 50+40+60

---

1. Considereu els punts $A(1,1)$, $B(2,3)$ i $C(4,3)$. Trobeu:

a) L'equació explícita de la recta que passa per C i és paral·lela a la recta que conté A i B.
b) La distància de C a la recta r que conté A i B.
c) L'angle $\widehat{CAB}$.
d) L'equació i la descripció del lloc geomètric dels punts P tals que

$$d(P,A) = d(P,s), \quad \text{en què } s \text{ és la recta que passa per } B \text{ i } C.$$

e) El centre i el radi de la circumferència que passa per A, B i C.

a) En ser $\overrightarrow{AB} = (2-1, 3-1) = (1,2)$, l'equació punt-pendent és:

$$y - 3 = \frac{2}{1}(x-4), \text{ d'on obetenim l'explícita } \boxed{y = 2x - 5}.$$

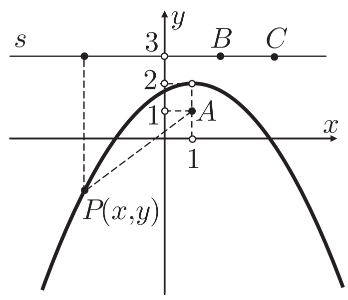
b) La recta r té l'equació contínua $\dfrac{x-1}{2-1} = \dfrac{y-1}{3-1}$, d'on s'obté la implícita $2x - y - 1 = 0$.

Llavors, $d(C,r) = \dfrac{|2\cdot 4 - 3 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \boxed{\dfrac{4}{\sqrt{5}}}$.

c) $\widehat{CAB} = \arccos\left|\dfrac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}|\cdot\|\overrightarrow{CB}|}\right| = \arccos\left|\dfrac{(3,2)\cdot(1,2)}{|(3,2)|\cdot|(1,2)|}\right| = \arccos\dfrac{7}{\sqrt{65}} = \boxed{29^\circ\, 44'\, 41.57''}$.

d) L'equació de la recta s que conté B i C és $y = 3$. Llavors, els punts $P(x,y)$ que pertanyen al lloc han de satisfer

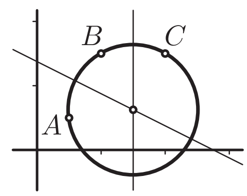
$$d(P,A) = d(P,s) \iff \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = |y-3|$$
$$\iff x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = y^2 - 6y + 9$$
$$\iff -4y = x^2 - 2x - 7 \iff \boxed{y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{7}{4}}.$$



Descripció del lloc:

$\boxed{\text{paràbola de focus } A(1,1), \text{ directriu } s: y = 3 \text{ i vèrtex } V(1,2)}$.

e) Buscarem les mediatrius de AB i BC. La seva intersecció serà el centre i la distància d'aquest a qualsevol dels tres punts serà el radi.



<u>Mediatriu de AB</u>: Punt mitjà de $AB = \left(\frac{1+2}{2}, \frac{1+3}{2}\right) = (3/2, 2)$.
$\overrightarrow{AB} = (2-1, 3-1) = (1,2)$. Per tant, l'equació és
$(1,2)\cdot(x-3/2, y-2) = 0 \iff x - 3/2 + 2y - 4 = 0 \iff 2x + 4y - 11 = 0$.

<u>Mediatriu de BC</u>: Punt mitjà de $BC = \left(\frac{2+4}{2}, \frac{3+3}{2}\right) = (3,3)$.
$\overrightarrow{BC} = (4-2, 3-3) = (2,0)$. Per tant, l'equació és

$$(2,0)\cdot(x-3, y-3) = 0 \iff 2(x-3) = 0 \iff x = 3.$$

<u>Centre</u> (intersecció de les dues mediatrius): $x = 3 \implies y = \dfrac{-2\cdot 3 + 11}{4} = \dfrac{5}{4} \implies \boxed{\left(3, \dfrac{5}{4}\right)}$.

<u>Radi</u>: $d\big((3, 5/4), (1,1)\big) = \sqrt{(3-1)^2 + (5/4-1)^2} = \sqrt{4 + (1/16)} = \boxed{\sqrt{65}/4}$.

2. Considereu la funció $f(x)$ i les seves derivades:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 8}{(x+3)^2}\,, \qquad f'(x) = \frac{12x + 16}{(x+3)^3}\,, \qquad f''(x) = \frac{-24x - 12}{(x+3)^4}\,.$$

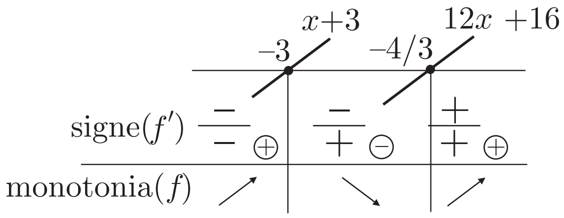
a) Estudieu el signe de $f'(x)$ i la monotonia i els extrems de $f(x)$.

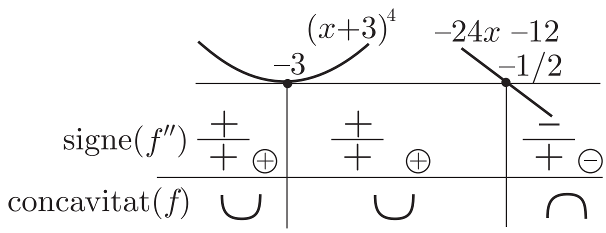
b) Estudieu el signe de $f''(x)$ i la concavitat i els punts d'inflexió de $f(x)$.

c) Trobeu les asímptotes horitzontal i verticals de $f(x)$ mitjançant el càlcul de límits.

d) Representeu $f(x)$ gràficament a partir de la informació recollida en els apartats anteriors i els talls amb els eixos.

a) i b) En els esquemes adjunts s'estudia gràficament el signe de cadascun dels factors implicats en les derivades i el resultat final després d'operar-los.



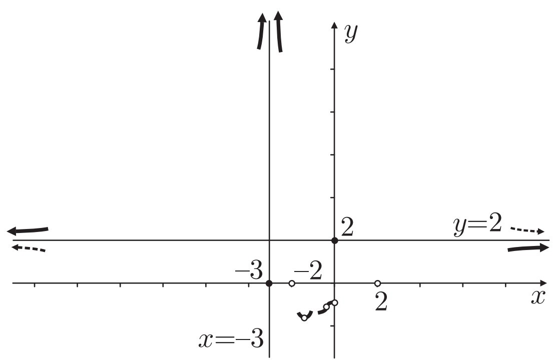


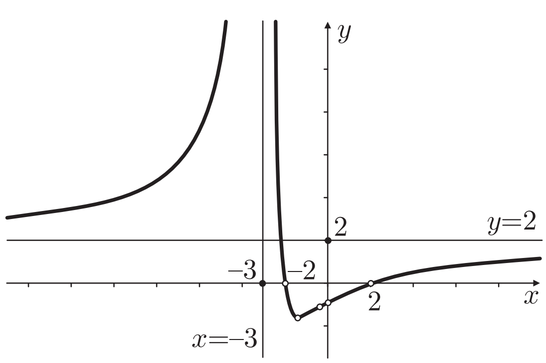
– f monòtona <u>creixent</u> en $(-\infty, -3) \cup (-4/3, +\infty)$.
– f monòtona <u>decreixent</u> en $(-3, -4/3)$.
– En ser $f'(-4/3) = 0$ i canviar la monotonia, f té un <u>mínim local</u> en $x = -4/3$ i el seu valor és $f(-4/3) = -1.6$.
– f còncava <u>amunt</u> en $(-\infty, -3) \cup (-3, -1/2)$.
– f còncava <u>avall</u> en $(-1/2, +\infty)$.
– En ser $f''(-1/2) = 0$ i canviar la concavitat, f té un <u>punt d'inflexió</u> en $x = -1/2$ i el seu valor és $f(-1/2) = -1.2$.

c) Asímptota hor.: $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2 - \dfrac{8}{x^2}}{\left(1 + \dfrac{3}{x}\right)^2} = \frac{2-0}{(1+0)^2} = 2 \Longrightarrow \boxed{y = 2}$.

Asímptota vert.: $\displaystyle\lim_{x\to -3} f(x) = \frac{18-8}{(-3+3)^2} = \frac{10}{0^+} = +\infty \Longrightarrow \boxed{x = -3}$.

d) En calcular $f(0)$ i $f(x) = 0$, resulten els talls $(0, -8/9)$, $(-2, 0)$ i $(2, 0)$.





3. Considereu les funcions $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ i $g(x) = \arctan x$. Trobeu,

a) La funció derivada $f'(x)$ mitjançant la definició en llenguatge de límits.

b) La funció derivada $f'(x)$ mitjançant els teoremes de càlcul de derivades.

c) El tipus de discontinuïtat que $f(x)$ presenta en $x = 1$, raonadament.

d) L'equació de la recta tangent al gràfic de $f(x)$ en el punt d'abscissa $x = 3$ i representeu gràficament la funció $f(x)$ i aquesta recta tangent.

e) La funció derivada de $(g \circ f)(x)$.

f) La funció derivada $g'(x)$ a partir de la derivada de la funció $h(x) = \tan x$.

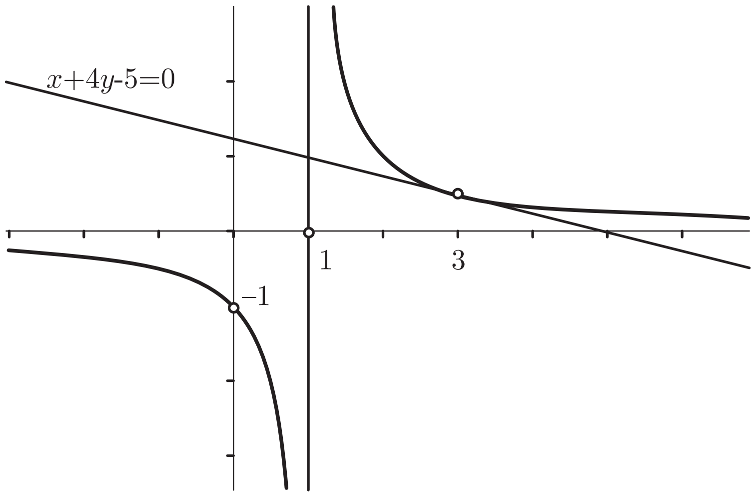
a) $$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{x+h-1} - \dfrac{1}{x-1}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x-1-x-h+1}{h\,(x+h-1)\,(x-1)}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h\,(x+h-1)\,(x-1)} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(x+h-1)\,(x-1)} = \boxed{-\frac{1}{(x-1)^2}}.$$

b) $$f(x) = (x-1)^{-1} \Longrightarrow f'(x) = (-1)(x-1)^{-2}\cdot 1 = \boxed{-\frac{1}{(x-1)^2}}.$$

c) $$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{array}\right. \Longrightarrow f \text{ té una discontinuïtat asimptòtica en } x = 1.$$

d) $f(3) = 1/2,\ f'(3) = -1/4 \Longrightarrow$ recta tangent: $y - 1/2 = -1/4(x-3) \Longleftrightarrow \boxed{x + 4y - 5 = 0}$.

Sabem que el gràfic de f és una hipèrbola equilàtera d'asímptotes $x = 1$ i $y = 0$.



e) $$(g\circ f)(x) = \arctan\left(\frac{1}{x-1}\right) \Longrightarrow (g\circ f)'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x-1}\right)^2}\cdot\left(\frac{-1}{(x-1)^2}\right) = \boxed{\frac{-1}{1+(x-1)^2}}.$$

f) $$g = h^{-1} \Longrightarrow g'(x) = \left(h^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{h'\left(h^{-1}(x)\right)} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \boxed{\frac{1}{1+x^2}}.$$