1. Demostreu per reducció a l'absurd que la suma d'un nombre racional i un nombre irracional és sempre un nombre irracional.

Sigui $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ i $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, on $p, q \in \mathbb{Z}$ i $q \neq 0$. Suposem que $a + \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ llavors,

$$a + \frac{p}{q} = \frac{r}{s}\ ,\ \text{on } r, s \in \mathbb{Z} \text{ i } s \neq 0 \Longrightarrow a = \frac{r}{s} - \frac{p}{q} = \frac{qr - ps}{qs}\ ,\ \text{on } qr - ps, qs \in \mathbb{Z} \text{ i } qs \neq 0.$$

Conseqüentment a és racional i irracional alhora i, per tant, tenim una contradicció. Per tant, la suposició de partida és falsa i la suma d'un racional amb un irracional és sempre irracional.

- En llenguatge menys simbòlic: Si la suma d'un irracional i un racional fos racional llavors, el nombre irracional seria la resta de dos racionals, la qual és racional. Així tindríem un nombre que és racional i irracional alhora, i això no pot ser. Per tant, la suposició de partida és falsa.

2. Si $A = [\,5, 8\,]$ i $B = (\,7, 10\,) \cup (\,-\infty, 6\,)$, expresseu

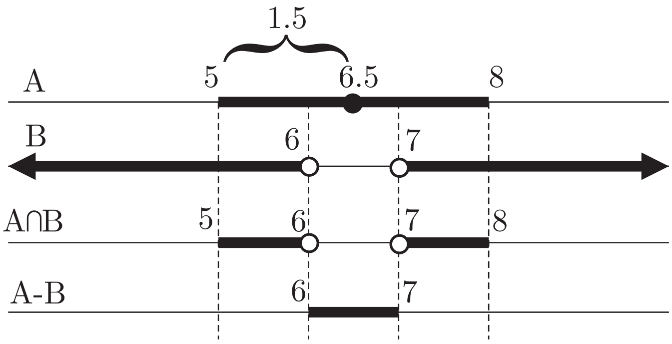
a) A en llenguatge d'entorns.

b) $A \cap B$ en forma d'intervals.

c) $A - B$ en llenguatge d'intervals.

En la figura adjunta podem observar l'entorn i els intervals següents:

a) $A = E_{1.5}(6.5)$
b) $A \cap B = [5, 6) \cup (7, 8]$
c) $A - B = [6, 7]$



3. Trobeu una equació sense radicals i amb coeficients enters tal que una de les seves solucions sigui $x = 1 + \sqrt[3]{4}$.

$$x = 1 + \sqrt[3]{4} \Longrightarrow (x - 1) = \sqrt[3]{4} \Longrightarrow \boxed{(x-1)^3 = 4 \Longleftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 5 = 0}\ .$$

4. Simplifiqueu i racionalitzeu quan calgui de manera que en els resultats no apareguin exponents negatius ni fraccionaris. (No utilitzeu els nombres decimals ni la calculadora):

$$\text{a) } \sqrt[8]{\frac{0.0125^2}{16^{-3}}} \qquad \text{b) } \frac{\sqrt[6]{x^7}\ \sqrt[4]{xy^2}}{\sqrt[3]{(x^3y^2)^{-3}}} \qquad \text{c) } \sqrt{28} + \sqrt{\frac{63}{49}} - \frac{2}{\sqrt{7}} \qquad \text{d) } \frac{\sqrt{63}}{\sqrt{7} - 2}$$

$$\text{a) } \sqrt[8]{\frac{0.0125^2}{16^{-3}}} = \sqrt[8]{\frac{\left(\frac{125}{10000}\right)^2}{\frac{1}{16^3}}} = \sqrt[8]{\frac{\frac{1}{16^2 \cdot 5^2}}{\frac{1}{16^3}}} = \sqrt[8]{\frac{16}{5^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}} \cdot \frac{\sqrt[4]{5^3}}{\sqrt[4]{5^3}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}\,\sqrt[4]{5^3}}{5} = \frac{\sqrt[4]{500}}{5}}\ .$$

b) $\dfrac{\sqrt[6]{x^7}\ \sqrt[4]{xy^2}}{\sqrt[3]{(x^3y^2)^{-3}}} = \sqrt[12]{\dfrac{x^{14}x^3y^6}{x^{-36}y^{-24}}} = \sqrt[12]{x^{53}y^{30}} = \boxed{x^4y^2\ \sqrt[12]{x^5y^6}}.$

Resolució alternativa:

$\dfrac{x^{7/6}\cdot x^{1/4}\cdot y^{1/2}}{x^{-3}\cdot y^{-2}} = x^{\frac{14+3+36}{12}}\cdot y^{\frac{1+4}{2}} = x^{\frac{53}{12}}\cdot y^{\frac{5}{2}} = \sqrt[12]{x^{53}y^{30}} = \boxed{x^4y^2\ \sqrt[12]{x^5y^6}}.$

c) $\sqrt{28}+\sqrt{\dfrac{63}{49}}-\dfrac{2}{\sqrt{7}} = 2\sqrt{7}+\dfrac{3\sqrt{7}}{7}-\dfrac{2\sqrt{7}}{7} = \dfrac{(14+3-2)\sqrt{7}}{7} = \boxed{\dfrac{15\sqrt{7}}{7}}.$

d) $\dfrac{\sqrt{63}}{\sqrt{7}-2} = \dfrac{3\sqrt{7}}{\sqrt{7}-2}\cdot\dfrac{\sqrt{7}+2}{\sqrt{7}+2} = \dfrac{21+6\sqrt{7}}{3} = \boxed{7+2\sqrt{7}}.$

Trieu i resoleu dues qüestions entre les quatre següents:

5. Resoleu l'equació: $8x-3\sqrt{2x+4}+15=0.$

$$8x-3\sqrt{2x+4}+15=0 \implies 9(2x+4)=64x^2+240x+225 \implies 64x^2+222x+189=0$$

$$\implies x=\frac{-111\pm\sqrt{12321-12096}}{64}=\frac{-111\pm 15}{64}= \begin{cases} -\dfrac{3}{2} \\ -\dfrac{63}{32} \end{cases}$$

Després de fer la comprovació s'obté que la solució és $\boxed{-\dfrac{3}{2}}$.

6. Recordem que el nombre d'or ϕ és solució de l'equació $x^2-x-1=0$.

a) Demostreu sense l'ús de la calculadora que,

$$\begin{aligned}\phi^2 &= \phi+1\\ \phi^4 &= 3\phi+2\\ \phi^6 &= 8\phi+5\end{aligned}$$

b) Trobeu els valors d'a i b tals que $\phi^{20}=a\,\phi+b$.

En ser ϕ solució de l'equació tenim,

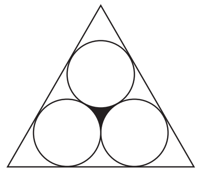
$$x^2-x-1=0 \Longrightarrow \phi^2-\phi+1=0 \Longrightarrow \phi^2=\phi+1$$

$$\begin{aligned}
\phi^4 &= \left(\phi^2\right)^2=(\phi+1)^2=\phi^2+2\phi+1=\phi+1+2\phi+1=3\phi+2\\
\phi^6 &= \phi^2\cdot\phi^4=(\phi+1)(3\phi+2)=3\phi^2+5\phi+2=3\phi+3+5\phi+2=8\phi+5\\
\phi^{20} &= \left(\phi^6\cdot\phi^4\right)^2=[(3\phi+2)(8\phi+5)]^2=\left(24\phi^2+31\phi+10\right)^2=(24\phi+24+31\phi+10)^2\\
&= (55\phi+34)^2=55^2(\phi+1)+2\cdot 55\phi\cdot 34+34^2=(55^2+68\cdot 55)\phi+55^2+34^2\\
&= 6765\phi+4181
\end{aligned}$$

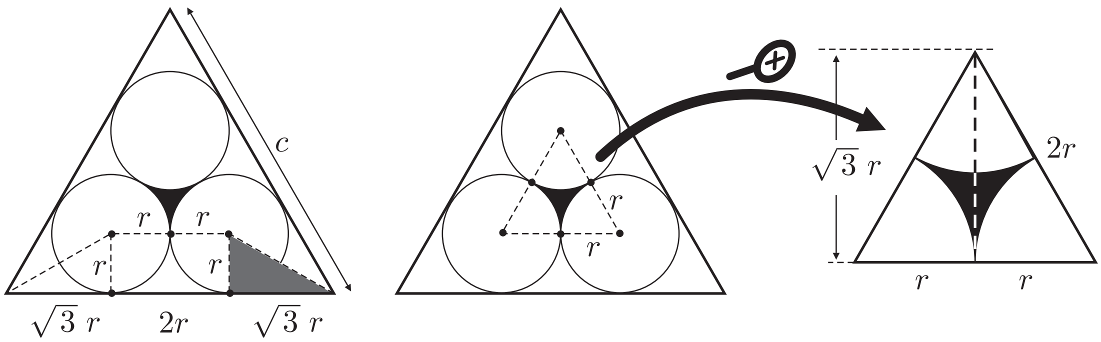
Una resolució alternativa per al càlcul de ϕ^{20} sortiria d'observar que els coeficients de les primeres potències $\phi^2,\ \phi^4,\ \phi^6,\ \ldots$ coincideixen amb els de la successió de Fibonacci i conjecturar que els que segueixen també ho fan. (Cada terme de la successió de Fibonacci es caracteritza per ser igual a la suma dels dos anteriors.)

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, \boxed{4181, 6765}$$

7. En la figura adjunta es presenta un triangle equilàter amb tres circumferències tangents inscrites iguals. Si anomenem c la longitud del costat del triangle equilàter, trobeu el valor del radi de les circumferències i l'àrea de la regió de color negre entre els cercles.



Una possible anàlisi de la figura passa pel traçat de les línies auxiliars que observem en les imatges següents.



A partir del primer triangle per l'esquerra, en ser el triangle ombrejat un triangle $30° - 60° - 90°$, pel teorema de Pitàgores obtenim el valor $\sqrt{3}\,r$ anotat en la figura. Llavors,

$$c = 2r + 2\sqrt{3}r = 2\left(1+\sqrt{3}\right)r \Longrightarrow r = \frac{c}{2\left(\sqrt{3}+1\right)} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = \boxed{\frac{c}{4}\left(\sqrt{3}-1\right) \simeq 0.18301\,c}.$$

Quant a l'àrea, si observem la figura de la dreta, n'hi ha prou amb restar els tres sectors circulars, —d'angle central igual a $60° = \pi/3\,\mathrm{rad}$—, al triangle equilàter de costat $2r$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{– Àrea del triangle: } = \dfrac{1}{2}\,2r \cdot \sqrt{3}\,r = r^2\sqrt{3} \\ \text{– Àrea dels 3 sectors: } 3 \cdot \dfrac{\pi}{6}\,r^2 = \dfrac{\pi}{2}\,r^2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{Àrea } = r^2\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\,r^2 = \boxed{r^2\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}\right)}.$$

Si es presnta en funció de del costat c, s'obté

$$\text{Àrea } = \frac{c^2\left(\sqrt{3}-1\right)^2\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}\right)}{16} = \frac{c^2\left(4-2\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}\right)}{16} = \boxed{\frac{c^2}{8}\left(2-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}\right)}.$$

En aquests càlculs de l'àrea els valors aproximats són,

$$\boxed{0.16125\,r^2 \quad \text{i} \quad 5.401 \cdot 10^{-3}\,c^2}.$$

8. Recordem que les primeres files del triangle aritmètic són

$$\begin{array}{lccccccc} 1a\ fila: & & & & 1 & & & \\ 2a\ fila: & & & 1 & & 1 & & \\ 3a\ fila: & & 1 & & 2 & & 1 & \\ 4a\ fila: & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & \end{array}$$

i que els seus coeficients coincideixen amb els coeficients del desenvolupament de $(a+b)^n$.

a) Escriviu el desenvolupament de $(a+b)^5$.

b) Calculeu el valor de la suma dels coeficients de la 27a fila del triangle aritmètic.

c) Resoleu l'equació $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x - 1 = 0$.

a) Si recordem que els coeficients del desenvolupament surten de la 6a fila del triangle aritmètic i de quina manera es reparteixen els exponents d'a i de b s'obté,

$$\boxed{(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5}.$$

b) Conjecturarem el valor de la suma, a partir dels valors de les sumes de les primeres files.

Fila								Suma
1				1				$S_1 = 1 = 2^0$
2			1		1			$S_2 = 2 = 2^1$
3		1		2		1		$S_3 = 4 = 2^2$
4	1		3		3		1	$S_4 = 8 = 2^3$
…		…		…		…		…
27		…		…		…		$\boxed{S_{27} = 2^{26}}$

Per demostrar aquesta conjectura només cal observar que cada coeficient del triangle intervé dues vegades com a sumand de la fila immediatament inferior. Llavors, si anomenem $S_n = \text{Suma}(Fila_n)$,

$$S_n = 2 \cdot S_{n-1} = 2 \cdot 2 \cdot S_{n-2} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot S_{n-3} = \cdots = 2^{n-1} \cdot S_{n-(n-1)} = 2^{n-1} \cdot S_1 = 2^{n-1}$$

c) Si tenim present el desenvolupament de la potència del binomi

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$

és immediat observar que $(x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$. Per tant, l'equació anterior és equivalent a

$$(x+1)^4 - 2 = 0 \Longleftrightarrow (x+1)^4 = 2 \Longleftrightarrow x + 1 = \sqrt[4]{2} \Longleftrightarrow \boxed{x = \sqrt[4]{2} - 1 \simeq 0.18921}.$$