1. Simplifiqueu i racionalitzeu quan calgui de manera que en els resultats no apareguin exponents negatius ni fraccionaris. (No utilitzeu els nombres decimals ni la calculadora):

$$\text{a)}\ \frac{\sqrt[5]{a^3\sqrt[4]{a}}}{\sqrt[3]{a^5}} \qquad \text{b)}\ \sqrt{80}-\frac{\sqrt{320}}{1-\sqrt{5}}$$

$$\text{a)}\ \frac{\sqrt[5]{a^3\sqrt[4]{a}}}{\sqrt[3]{a^5}} = a^{\frac{3}{5}+\frac{1}{20}-\frac{5}{3}} = a^{\frac{36+3-100}{60}} = a^{-\frac{61}{60}} = \frac{1}{a\sqrt[60]{a}}\cdot\frac{\sqrt[60]{a^{59}}}{\sqrt[60]{a^{59}}} = \boxed{\frac{\sqrt[60]{a^{59}}}{a^2}}.$$

$$\text{b)}\ \sqrt{80}-\frac{\sqrt{320}}{1-\sqrt{5}} = \sqrt{16\cdot 5}-\frac{\sqrt{64\cdot 5}}{1-\sqrt{5}}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = 4\sqrt{5}-\frac{8\sqrt{5}\left(1+\sqrt{5}\right)}{1-5}$$

$$= 4\sqrt{5}+2\sqrt{5}\left(1+\sqrt{5}\right) = \boxed{6\sqrt{5}+10}.$$

2. Resoleu les equacions: a) $2x^2 = x-\sqrt{x^3}$ b) $\left(1+\dfrac{x}{100}\right)^{12} = 3$

$$\text{a)}\quad 2x^2 = x-\sqrt{x^3} \iff x\left(2x+\sqrt{x}-1\right)=0 \iff \begin{cases} \boxed{x=0} \\ \text{o bé} \\ 2x+\sqrt{x}-1=0 \quad (*) \end{cases}$$

$$(*) \iff \sqrt{x} = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1\pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow x = \begin{cases} \boxed{\frac{1}{4}}. \quad \text{És correcta perquè } 2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{8} = \frac{1}{4}-\sqrt{\frac{1}{64}} \\ 1. \quad \text{No és correcta perquè } 2\cdot 1^2 = 2 \neq 1-\sqrt{1^3} \end{cases}$$

Hi ha dues solucions: $\boxed{x=0}$ i $\boxed{x=\frac{1}{4}}$.

$$\text{b)}\quad \left(1+\frac{x}{100}\right)^{12} = 3 \iff 1+\frac{x}{100} = \sqrt[12]{3} \iff x = 100\left(\sqrt[12]{3}-1\right) \approx \boxed{9.587}.$$

3. Simplifiqueu $\dfrac{1}{x^5-x^3}-\dfrac{1}{x^3-x}$

$$\frac{1}{x^5-x^3}-\frac{1}{x^3-x} = \frac{1}{x^3(x^2-1)}-\frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{1-x^2}{x^3(x^2-1)} = \boxed{-\frac{1}{x^3}}.$$

4. Considereu el polinomi $p(x) = 7x^3 + 12x^2 - 25x + 6$.

a) Trobeu les seves arrels.

b) Feu-ne la descomposició factorial.

c) Estudieu, mitjançant el traçat de gràfics de rectes i/o paràboles, quins són els nombres x tals que $p(x) > 0$.

d) Traceu un gràfic de $p(x)$.

e) Trobeu el nombre x_0 tal que el valor $p(x_0)$ és màxim localment.

$$\left.\begin{array}{r|rrrr} & 7 & 12 & -25 & 6 \\ 1 & & 7 & 19 & -6 \\ \hline & 7 & 19 & -6 & 0 \\ -3 & & -21 & 6 & \\ \hline & 7 & -2 & 0 & \\ \multicolumn{5}{l}{7x-2=0 \Longrightarrow x = \dfrac{2}{7}} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

a) Mitjançant l'aplicació de la regla de Ruffini s'han obtingut les arrels,

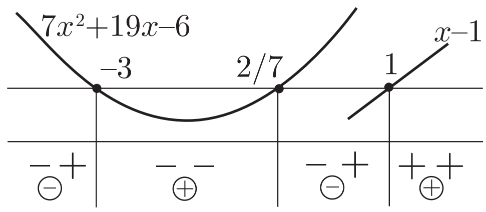
$$\boxed{1,\ -3,\ \frac{2}{7}}\,.$$

b) També s'ha obtingut la descomposició en factors primers,

$$\boxed{p(x) = (x-1)(x+3)(7x-2)}\,.$$

c) Tracem els gràfics dels factors $x - 1$ i $7x^2 + 19x - 6$. Estudiem el signe en aquest ordre. En resulta,

$$\boxed{p(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in \left(-3,\ \frac{2}{7}\right) \cup (1, +\infty)}\,.$$

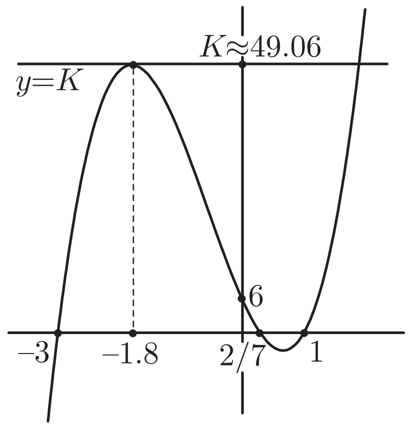


d) i e) El valor màxim K s'obté en una arrel doble de $p(x) = K$. És a dir, en un punt x tal que,

$$\begin{cases} 7x^3 + 12x^2 - 25x + 6 = K \\ 21x^2 - 24x - 25 = 0 \end{cases}$$

Llavors, $x = \dfrac{12 \pm \sqrt{144 + 525}}{21} \approx \begin{cases} -1.80 \\ 0.66\,. \end{cases}$

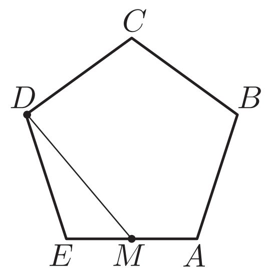
Per tant, s'obté el màxim en $\boxed{x \approx -1.80}$ i el seu valor és $\boxed{K \approx p(-1.80) \approx 49.06}$.



En ser el gràfic de $p(x)$ creixent en els extrems de la recta real, l'elecció del màxim recau en el punt esmentat.

5. Observeu el pentàgon regular $ABCDE$ de la figura adjunta. El seu costat té mesura igual a 1. El punt M és el punt mitjà del costat AE.

Vam estudiar que la longitud MD es podia trobar sense l'ajut de la trigonometria i que era igual a $\dfrac{\sqrt{4+\sqrt{5}}}{2}$.



a) Enuncieu el teorema del cosinus.

b) Utilitzeu-lo per trobar MD i comproveu que el resultat obtingut coincideix amb l'esmentat més amunt.

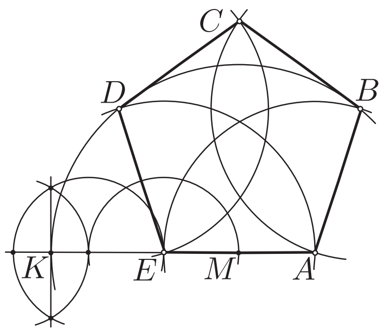
c) Expliqueu com es pot construir amb una molt bona aproximació, un pentàgon regular utilitzant el resultat de l'apartat anterior.

a) En un triangle qualsevol de costats a, b, c i angle α oposat al costat a es compleix que
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

b) Apliquem el teorema del cosinus al triangle $\triangle DEM$ en què l'angle $\widehat{E} = 108^\circ$. Obtenim,

$$DM = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos 108^\circ} = \boxed{\sqrt{\frac{5}{4} - \cos 108^\circ} \approx 1.2486 \approx \frac{\sqrt{4+\sqrt{5}}}{2}}.$$

c) La construcció es pot fer amb l'aproximació $DM \approx 1.25$. Això es pot aconseguir amb les etapes,



- Prolongació de ME fins a $MK = 2ME + \dfrac{ME}{2}$.
- Interseccions D i B de la circumferència (M, MK) amb (E, EA) i (A, AE).
- Construcció de $C = (D, DE) \cap (B, BA)$.

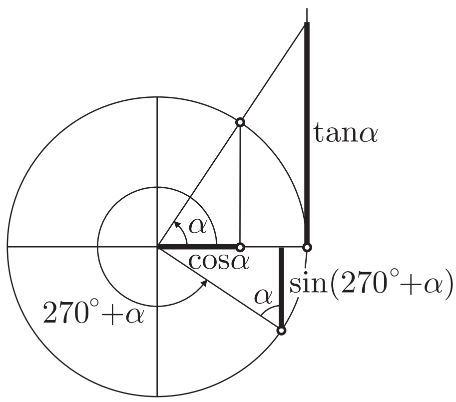
6. Sabem que $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ i $\tan\alpha = \dfrac{3}{2}$. Calculeu $\sin(270^\circ + \alpha)$:

a) Amb l'ajut de la circumferència trigonomètrica i sense calculadora.

b) Amb l'ajut de la calculadora i sense recórrer a la circumferència trigonomètrica.

a) Després de representar els angles implicats en la circumferència trigonomètrica veiem que,

$$\begin{aligned}\sin(270^\circ + \alpha) &= -\cos\alpha = -\sqrt{\frac{1}{1+\tan^2\alpha}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}\right)^2}} = \boxed{-\frac{2}{\sqrt{13}}}.\end{aligned}$$



b) Les dues condicions de l'enunciat impliquen, $\alpha = \arctan\left(\dfrac{3}{2}\right) = 56^\circ\ 18'\ 35.76''$. Llavors,

$$270^\circ + \alpha = 326^\circ\ 18'\ 35.76'' \Longrightarrow \boxed{\sin(270^\circ + \alpha) \approx -0.5547001962}.$$

Amb la calculadora es comprova que $-2/\sqrt{13} = -0.5547001962$.