1. Demostreu per reducció a l'absurd que el producte d'un nombre racional diferent de zero per un nombre irracional és sempre un nombre irracional.

Sigui $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ i $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, on $p, q \in \mathbb{Z}$ i $p, q \neq 0$. Suposem que $a \cdot \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ llavors,

$$a \cdot \frac{p}{q} = \frac{r}{s}, \text{ on } r, s \in \mathbb{Z} \text{ i } r, s \neq 0 \Longrightarrow a = \frac{r/s}{p/q} = \frac{qr}{ps}, \text{ on } qr, ps \in \mathbb{Z} \text{ i } ps \neq 0.$$

Conseqüentment a és racional i irracional alhora i això és contradictori. Per tant, la suposició de partida és falsa i el producte d'un racional diferent de zero i un irracional és sempre irracional.

- En llenguatge menys simbòlic: Si el producte d'un irracional i un racional diferent de zero fos racional llavors, el nombre irracional seria la divisió de dos racionals, la qual és racional. Així a és racional i irracional alhora, i això no pot ser. Per tant, la suposició de partida és falsa.

2. Si $A = [\,-1, 4\,]$ i $B = (\,-7, 2\,) \cup (\,3, +\infty\,)$, expresseu

a) A en llenguatge d'entorns.

b) $A \cap B$ en forma d'intervals.

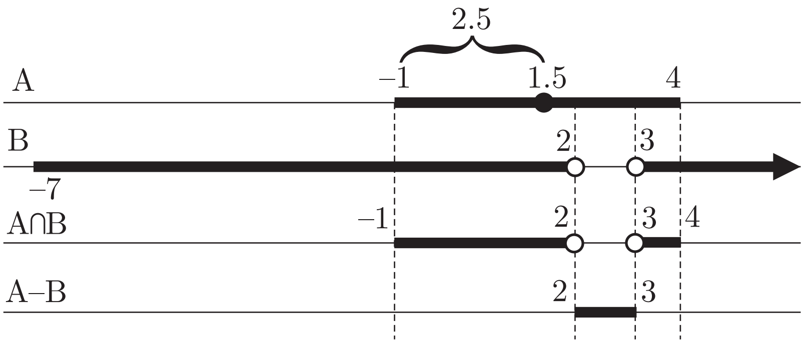
c) $A - B$ en llenguatge d'intervals.

En la figura adjunta podem observar l'entorn i els intervals següents:

a) $A = E_{2.5}(1.5)$

b) $A \cap B = [-1, 2) \cup (3, 4]$

c) $A - B = [2, 3]$



3. Trobeu una equació sense radicals i amb coeficients enters tal que una de les seves solucions sigui $x = 1 + \sqrt[4]{3}$.

$$x = 1 + \sqrt[4]{3} \Longrightarrow (x-1) = \sqrt[4]{3} \Longrightarrow \boxed{(x-1)^4 = 3 \Longleftrightarrow x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x - 2 = 0}.$$

4. Simplifiqueu i racionalitzeu quan calgui de manera que en els resultats no apareguin exponents negatius ni fraccionaris. (No utilitzeu els nombres decimals ni la calculadora):

a) $\sqrt[8]{\dfrac{0.25^4}{16^{-3}}}$ b) $\dfrac{\sqrt[8]{a^{-3}}\ \sqrt[6]{a^{11}b^2}}{\sqrt[3]{(a^3b^5)^{-2}}}$ c) $\sqrt{45} + \sqrt{\dfrac{605}{9}} - \sqrt{\dfrac{144}{5}}$ d) $\dfrac{\sqrt{108}}{\sqrt{3}-1}$

a) $$\sqrt[8]{\frac{0.25^4}{16^{-3}}} = \sqrt[8]{\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^4}{\frac{1}{16^3}}} = \sqrt[8]{\frac{(2^{-2})^4}{(2^4)^{-3}}} = \sqrt[8]{\frac{2^{-8}}{2^{-12}}} = \sqrt[8]{2^4} = \boxed{\sqrt{2}}.$$

b) $$\frac{\sqrt[8]{a^{-3}}\ \sqrt[6]{a^{11}b^2}}{\sqrt[3]{(a^3b^5)^{-2}}} = \sqrt[24]{\frac{a^{-9}a^{44}b^8}{a^{-48}b^{-80}}} = \sqrt[24]{a^{83}b^{88}} = \boxed{a^3b^3\ \sqrt[24]{a^{11}b^{16}}}.$$

Resolució alternativa:

$$\frac{a^{-3/8}\cdot a^{11/6}\cdot b^{1/3}}{a^{-2}\cdot b^{-10/3}} = a^{\frac{-9+44+48}{24}}\cdot b^{\frac{1+10}{3}} = a^{\frac{83}{24}}\cdot b^{\frac{11}{3}} == \sqrt[24]{a^{83}b^{88}} = \boxed{a^3b^3\sqrt[24]{a^{11}b^{16}}}.$$

c) $\sqrt{45}+\sqrt{\dfrac{605}{9}}-\sqrt{\dfrac{144}{5}} = 3\sqrt{5}+\dfrac{11\sqrt{5}}{3}-\dfrac{12\sqrt{5}}{5} = \dfrac{(45+55-36)\sqrt{5}}{15} = \boxed{\dfrac{64\sqrt{5}}{15}}.$

d) $\dfrac{\sqrt{108}}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}\cdot\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \dfrac{6\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)}{2} = \dfrac{18+6\sqrt{3}}{2} = \boxed{9+3\sqrt{3}}.$

Trieu i resoleu dues qüestions entre les quatre següents:

5. Resoleu l'equació: $4\sqrt{9x-2}-6-3x=0.$

$$4\sqrt{9x-2}-6-3x=0 \implies 16(9x-2)=36+9x^2+36x \implies 9x^2-108x+68=0$$

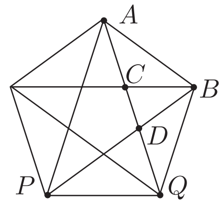
$$\implies x=\frac{54\pm\sqrt{2916-612}}{9}=\frac{54\pm 48}{9}= \begin{cases} \dfrac{102}{9}=\dfrac{34}{3} \\[2mm] \dfrac{6}{9}=\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Després de fer la comprovació s'obté que les dues solucions són bones: $\boxed{\dfrac{34}{3} \text{ i } \dfrac{2}{3}}$.

6. Recordem que el nombre d'or ϕ és solució de l'equació $x^2-x-1=0$. A partir d'aquesta afirmació justifiqueu que $\phi^2=\phi+1$ i trobeu a i b tals que $\left(\dfrac{\phi+1}{\phi}\right)^6 = a\phi+b$.

$$\begin{aligned} x^2-x-1=0 &\implies \phi^2-\phi+1=0 \implies \phi^2=\phi+1 \\ \left(\frac{\phi+1}{\phi}\right)^6 &= \left(\frac{\phi^2}{\phi}\right)^6 = \phi^2 = \left(\phi^2\right)^3 = (\phi+1)^3 = \phi^3+3\phi^2+3\phi+1 \\ &= \phi^2+\phi+3\phi^2+3\phi+1 = 4\phi^2+4\phi+1 = 4\phi+4+4\phi+1 = \boxed{8\phi+5}. \end{aligned}$$

7. En la figura adjunta es presenta un pentàgon regular amb les seves diagonals. Calculeu la raó de semblança entre el pentàgon interior i el pentàgon exterior. Calculeu també l'àrea del pentàgon interior si el costat del pentàgon exterior mesura 1. (Resolució no trigonomètrica.)



$$\frac{CD}{AB} = \frac{\left[1-\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}-1\right)\right]\cdot AB}{AB} = 2-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2} = \boxed{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{altura } (PAQ) = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2} \\ &\text{base } (PAQ) = PQ = 1 \\ &\text{altura } (ABQ) = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \\ &\text{base } (ABQ) = AB = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{aligned}\right\} \implies \begin{aligned} \text{Àrea(gran)} &= \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{4}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \\ &= \frac{1}{4}\left(\sqrt{5+2\sqrt{5}}+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right) \simeq \boxed{1.7205} \\ \text{Àrea(petit)} &= \text{Àrea(gran)}\cdot\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2 \\ &= \text{Àrea(gran)}\cdot\frac{7-3\sqrt{5}}{2} \simeq \boxed{0.2510} \end{aligned}$$

8. Recordem que les primeres files del triangle aritmètic són

$$\begin{array}{lccccccc} 1a\ fila: & & & & 1 & & & \\ 2a\ fila: & & & 1 & & 1 & & \\ 3a\ fila: & & 1 & & 2 & & 1 & \\ 4a\ fila: & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & \end{array}$$

i que els seus coeficients coincideixen amb els coeficients del desenvolupament de $(a+b)^n$.

a) Escriviu el desenvolupament de $(a+b)^6$.

b) Si observeu la tercera diagonal des de l'esquerra del triangle aritmètic, trobareu la successió de nombres

$$1, 3, 6, 10, 15, 21, 28 \dots$$

Trobeu una funció quadràtica $f(x)$ que determini els termes de la successió, és a dir tal que

$$f(1) = 1, f(2) = 3, f(3) = 6, f(4) = 10, f(5) = 15, \dots$$

c) Resoleu l'equació $x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x - 9 = 0$.

a) Si recordem que els coeficients del desenvolupament surten de la 7a fila del triangle aritmètic i de quina manera es reparteixen els exponents d'a i de b s'obté,

$$\boxed{(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6}.$$

b) Si es té intuïció i ofici en el terreny dels nombres es pot observar que els coeficients de la diagonal esmentada es poden presentar com a la taula del costat.
Llavors, es pot conjecturar que la funció demanada és

$$f(x) = \frac{(x+1)x}{2} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$$

$$\left\{ \begin{array}{rcccc} 1 & = & \frac{2}{2} & = & \frac{2\cdot 1}{2} \\ 3 & = & \frac{6}{2} & = & \frac{3\cdot 2}{2} \\ 6 & = & \frac{12}{2} & = & \frac{4\cdot 3}{2} \\ 10 & = & \frac{20}{2} & = & \frac{5\cdot 4}{2} \\ & \dots & & \dots & \end{array} \right.$$

• Mètode alternatiu: Si utilitzem la informació de l'enunciat, la funció que busquem ha de ser del tipus $f(x) = ax^2 + bx + c$. Imposem els valors de $f(1) = 1,\ f(2) = 3,\ f(3) = 6$.

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 = a + b + c \\ 3 = 4a + 2b + c \\ 6 = 9a + 3b + c \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3a + b = 2 \\ 5a + b = 3 \end{array} \right. \Longrightarrow 2a = 1 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \boxed{f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x}.$$

Observem que també satisfà $f(4) = 10,\ f(5) = 15,\ \dots$

c) Si tenim present el desenvolupament $(x+1)^5 = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$, l'equació anterior és equivalent a

$$(x+1)^5 = 10 \Longrightarrow x + 1 = \sqrt[5]{10} \Longrightarrow \boxed{x = \sqrt[5]{10} - 1 \simeq 0.58489}.$$