1bat-II-300913

① a) $\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{8}=\frac{8-3}{24}=\boxed{\frac{5}{24}}$

b) $\frac{1}{\sqrt[3]{25\sqrt{125}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{25\cdot 5\sqrt{5}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{125}\cdot\sqrt[6]{5}}=$

$=\frac{1}{5}\cdot\frac{\sqrt[6]{5^5}}{\sqrt[6]{5^6}}=\boxed{\frac{\sqrt[6]{5^5}}{25}}$

Alternativa: $5^{-2/3}\cdot 5^{-3/6}=5^{-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}=5^{-\frac{4+3}{6}}=$

$=5^{-7/6}=\frac{1}{\sqrt[6]{5^7}}=\frac{1}{5\sqrt[6]{5}}=\boxed{\frac{\sqrt[6]{5^5}}{25}}$

c) $\frac{0.5^{-2}}{20^2}=\frac{1}{0.5^2\cdot 20^2}=\frac{1}{(0.5\cdot 20)^2}=\frac{1}{10^2}=\boxed{\frac{1}{100}}$

d) $\frac{\sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt{a^3 b}}=\sqrt[6]{\frac{a^2b^4}{a^6b^3}}=\sqrt[6]{\frac{b}{a^4}}=\sqrt[6]{\frac{b\cdot a^2}{a^4\cdot a^2}}=\boxed{\frac{\sqrt[6]{b\cdot a^2}}{a}}$

Alternativa:

$a^{1/3-1}\cdot b^{2/3-1/2}=a^{-2/3}\cdot b^{\frac{4-3}{6}}=\frac{\sqrt[6]{b}}{\sqrt[3]{a^2}}=$

$=\frac{\sqrt[6]{b}\,\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^2}\,\sqrt[3]{a}}=\boxed{\frac{\sqrt[6]{b\,a^2}}{a}}$

②

a) $$\frac{250000\left(1+\frac{x}{100}\right)^3}{x^3} = 4394 \iff \left(\frac{1+\frac{x}{100}}{x}\right)^3 = \frac{4394}{250000}$$

$$\iff \left(\frac{100+x}{100x}\right)^3 = \frac{4394}{250000} \iff \frac{100+x}{100x} = \sqrt[3]{\frac{4394}{250000}} = 0.26$$

$$\iff 100+x = 26x \iff 25x = 100 \iff x = 4$$

b)

$$\frac{1}{x} + \frac{x}{x-1} + \frac{1}{2} = 0 \iff \frac{2(x-1)+2x^2+x(x-1)}{2x(x-1)} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x-2+2x^2+x^2-x = 0 \Rightarrow 3x^2+x-2 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{6} = \begin{cases} 4/6 = 2/3 \\ -6/6 = -1 \end{cases}$$

c) $$4x - 6\sqrt{2-14x} = 1 \iff -6\sqrt{2-14x} = 1-4x$$

$$\Rightarrow 36(2-14x) = 1+16x^2-8x$$

$$\Rightarrow 72-504x = 16x^2-8x+1$$

$$\Rightarrow 16x^2+496x-71 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-496\pm\sqrt{496^2+64\cdot 71}}{32} \simeq \frac{-496\pm 500{,}56}{32} \simeq \begin{cases} \cancel{0{,}1425} \\ \cancel{-31{,}1425} \end{cases}$$

No hi ha cap solució bona

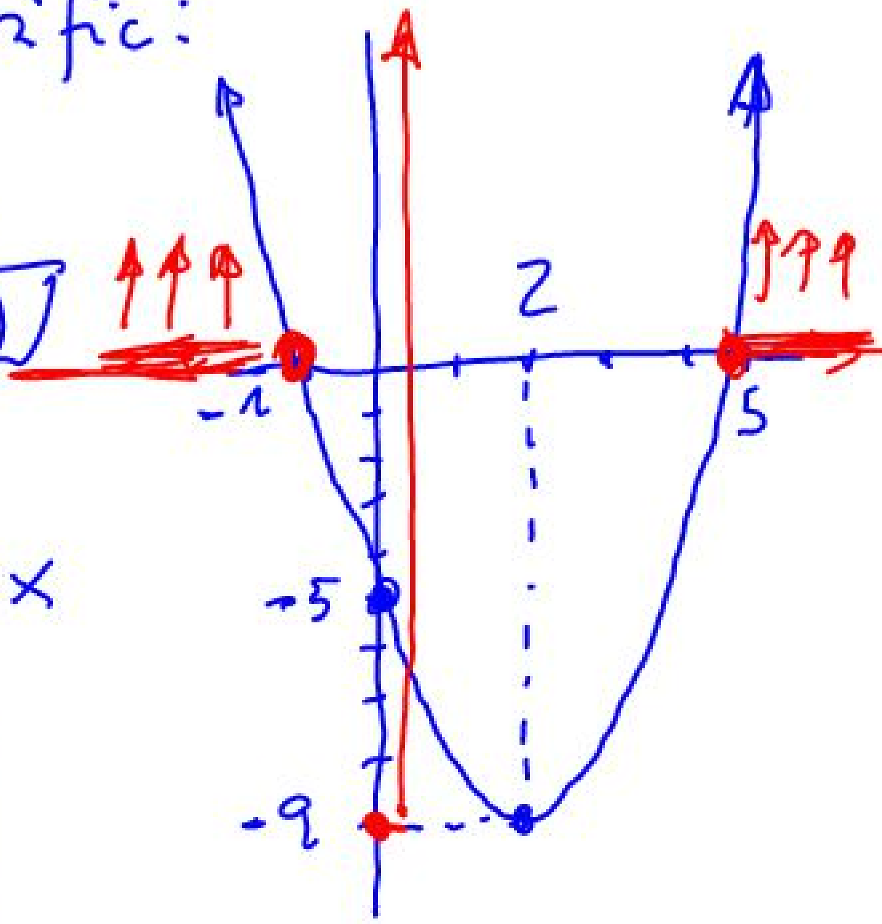
d) $$4x+6\sqrt{12-4x} = 1 \iff 6\sqrt{12-4x} = 1-4x$$

A partir d'aquí és igual que abans

$$\boxed{\begin{array}{l} x = 0{,}1425 \\ x = -31{,}1425 \end{array}}$$

En aquest cas les dues solucions són bones.

③ $f(x)=x^2-4x-5 \longrightarrow$ Gràfic:



a) En el gràfic adjunt observem que el conjunt d'imatges és $\boxed{[-9,+\infty)}$

b) En el gràfic adjunt s'obtenen que els nombres x amb imatge f(x) positiva són

$$\boxed{(-\infty,-1)\cup(5,+\infty)}$$

④ $p(x)=2x^3-x^2-2x+1$

a) i b) x és arrel $\iff p(x)=0$. Les busquem amb la regla de Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & & 2 & 1 & -1 \\ \hline & 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & & -2 & 1 & \\ \hline & 2 & -1 & 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow \boxed{p(x)=(x-1)(x+1)(2x-1)}$

i $p(x)=0 \iff \boxed{x=1,\ x=-1,\ x=\frac{1}{2}}$

• Alternativa: Quan tenim $2x^2+x-1=0$, resolem mitjançant la fórmula amb radicals:

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\frac{-1\pm 3}{4}= \begin{cases} 1/2 \\ -1 \end{cases}$$ i $\boxed{p(x)=2(x-1)(x+1)(x-\frac{1}{2})}$

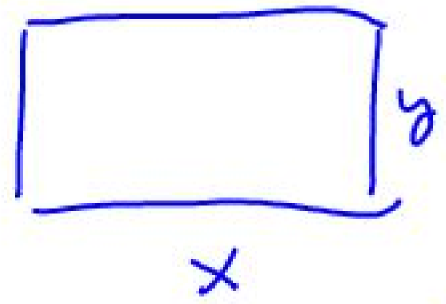
Un exercici extra(*)

Simplifica: $$\frac{3x+10}{x^2-4}-\frac{2x}{x^2-3x+2}=\frac{(3x+10)(x-1)-2x(x+2)}{(x+2)(x-2)(x-1)}=$$

$$=\frac{3x^2+7x-10-2x^2-4x}{(x+2)(x-2)(x-1)}=\frac{x^2+3x-10}{(x+2)(x-2)(x-1)}=\frac{\cancel{(x-2)}(x+5)}{(x+2)\cancel{(x-2)}(x-1)}=\frac{x+5}{(x+2)(x-1)}$$

(*) En ser l'examen prou llarg, finalment no el vaig posar

⑥



Anomenem x i y les longituds dels costats del rectangle. Llavors

$$\begin{cases} x+y=a \\ x\cdot y=b \end{cases} \Rightarrow x(a-x)=b \Rightarrow x^2-ax+b=0$$

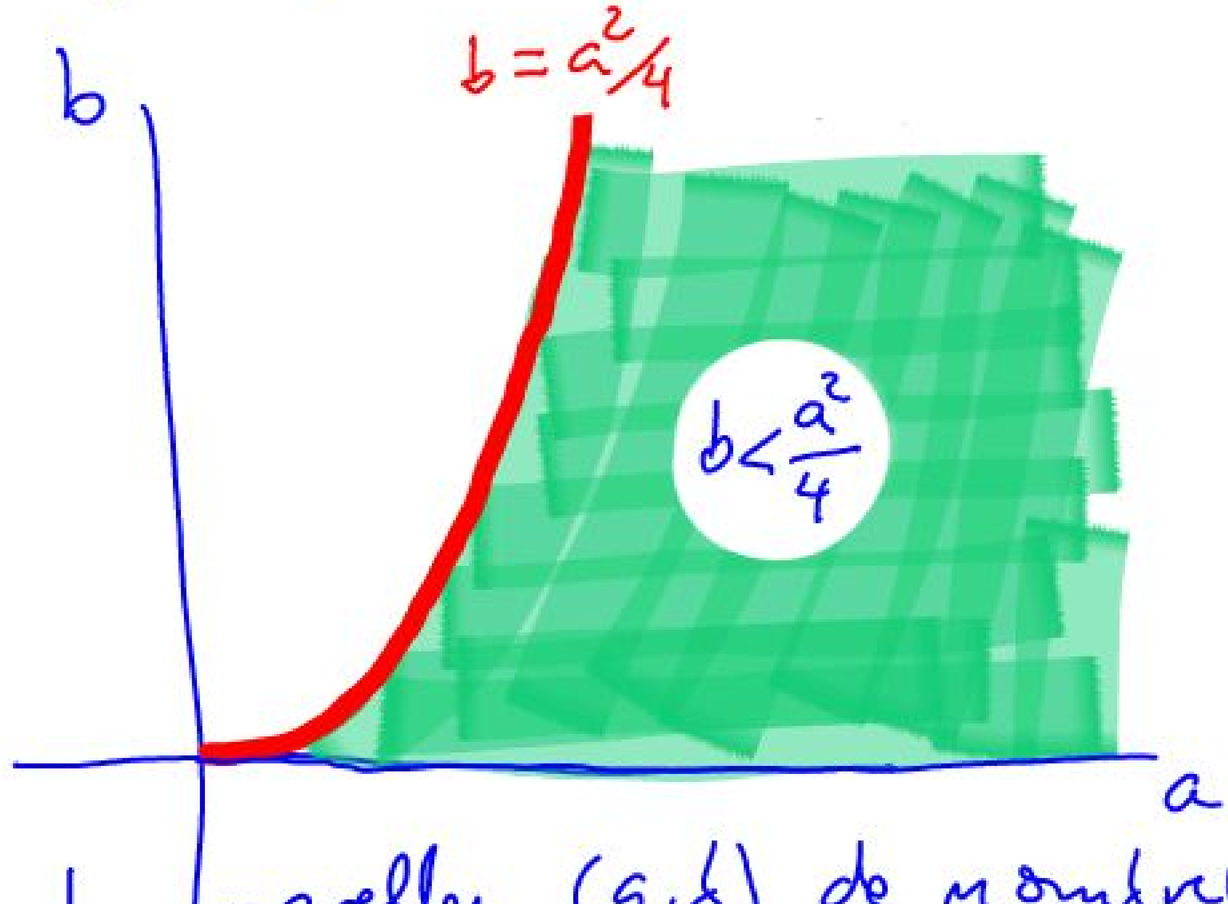
$$\Rightarrow x=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2} \Rightarrow y=\frac{a\mp\sqrt{a^2-4b}}{2}$$

L'existència d'un rectangle amb aquestes característiques, només és possible si $x>0$ i $y>0$. Per tant $\boxed{a>0,\ b>0 \ \text{ i } \ a^2-4b\geq 0}$ o també $b\leq \frac{a^2}{4}$;

Per exemple: Si el perímetre val 12u i l'àrea val 10 u², el rectangle no existeix perquè

$$\left(\frac{12}{2}\right)^2-4\cdot 10=-4<0$$

Gràficament, sobre uns eixos "a" i "b"



Totes les parelles (a,b) de nombres que tenen representació gràfica en les zones verda o vermella, proporcionen un rectangle de perímetre 2a i àrea b.