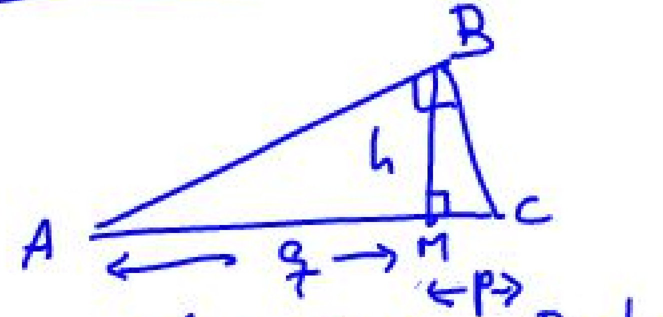
1BAT - 231013

1) a) $\dfrac{2^{-4}\cdot 100a^2}{0{,}2^{-2}\,a^{-3}} = \dfrac{2^{-4}\cdot 2^2\cdot 5^2\cdot a^2}{\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}a^{-3}} = 2^{-2}\cdot a^5 = \boxed{\dfrac{a^5}{4}}$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{a\sqrt{b}}}{\sqrt{ba}} = \sqrt[6]{\dfrac{a^2b}{a^3b^3}} = \dfrac{1}{\sqrt[6]{ab^2}}\cdot\dfrac{\sqrt[6]{a^5b^4}}{\sqrt[6]{a^5b^4}} = \boxed{\dfrac{\sqrt[6]{a^5b^4}}{ab}}$

c) $\dfrac{2+\sqrt5}{2-\sqrt5} = \dfrac{(2+\sqrt5)^2}{(2-\sqrt5)(2+\sqrt5)} = \dfrac{9+4\sqrt5}{4-5} = \boxed{-9-4\sqrt5}$

2) a) En un triangle rectangle l'altura sobre la hipotenusa és mitjana proporcional o geomètrica de les projeccions dels catets sobre la hipotenusa

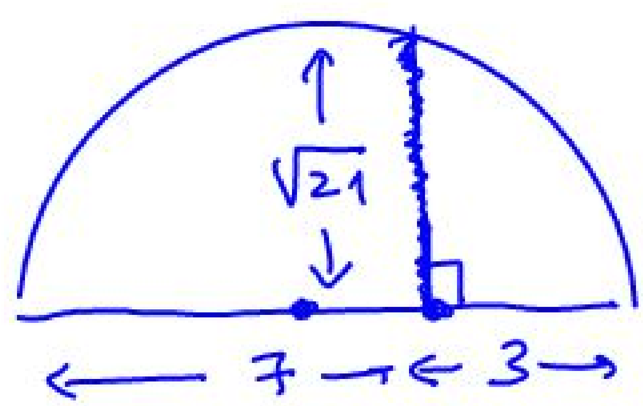


és a dir, $\dfrac{p}{h}=\dfrac{h}{q}$

- Demostració: ΔAMB i ΔBMC són semblants, $\widehat{MAB}$ i $\widehat{MBC}$ aguts de costats perpendiculars entre.

Per tant, $\dfrac{MA}{MB}=\dfrac{MB}{MC}$ és a dir $\dfrac{q}{h}=\dfrac{h}{p}$

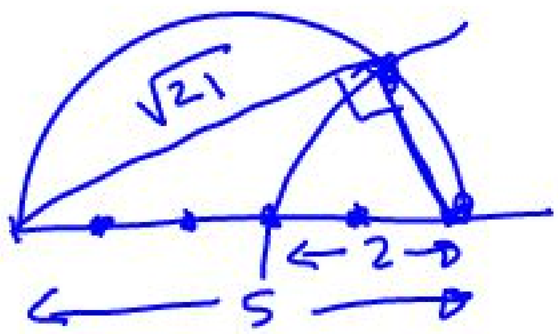
b)



$\sqrt{21}=\sqrt{7\cdot3}$

N'hi ha prou amb la construcció d'un triangle rectangle amb les projeccions $p=7$ i $q=3$

c) $\sqrt{21}=\sqrt{25-4}=\sqrt{5^2-2^2}$. N'hi ha prou amb la construcció d'un triangle rectangle d'hipotenusa 5 i catet 2. L'altre catet mesurarà $\sqrt{21}$.



③ a) $\frac{x-3}{2} - \frac{1-x}{4} = \frac{6x}{8} \Leftrightarrow 4x-12-2+2x = 6x \Leftrightarrow -14 = 0$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{\text{l'equació no té solució}}$

b) $\begin{cases} x+3y=6 \\ 2x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x+3y=6 \\ -6x-3y=-9 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x+3y=6 \\ -5x=-3 \end{array}$

$\Leftrightarrow x = \frac{3}{5}\ ,\ y = \frac{6-3/5}{3} = \frac{27}{15} = \frac{9}{5} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = 3/5 \\ y = 9/5 \end{array}}$

c) $x^5 - 2x^3 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x^4 - 2x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{array}{l} x=0 \\ \text{o} \\ x^4-2x^2-3=0 \end{array}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{o} \\ x^2 = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2 = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} x=0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{array}}$

d) $1 - \sqrt{x} = 2x \Leftrightarrow -\sqrt{x} = 2x-1 \Rightarrow x = 4x^2-4x+1$

$\Leftrightarrow 4x^2-5x+1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{8} = \begin{cases} 1 \\ 1/4 \end{cases}$

Comprovació: $x = 1 \Rightarrow 1 - 1 = 2\cdot 1$, no és bona

$\boxed{x = \frac{1}{4}} \Rightarrow 1 - \frac{1}{2} = 2\cdot\frac{1}{2}$, és bona

④ a) $7 - 4x < 3 \Leftrightarrow 7 - 3 < 4x \Leftrightarrow 1 < x$

$\boxed{\text{Solució: } (1, +\infty)}$

b) $x^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-3) > 0 \Leftrightarrow \begin{array}{l} x+3>0 \text{ i } x-3>0 \\ \text{o} \\ x+3<0 \text{ i } x-3<0 \end{array}$

$\Leftrightarrow \begin{array}{l} x>3 \\ \text{o} \\ x<-3 \end{array}$ $\boxed{\text{Solució } (-\infty,-3) \cup (3,+\infty)}$

c) $\begin{cases} x+2<3 \\ 4-3x<3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<1 \\ 1<3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x<1 \\ \text{i} \\ x>\frac{1}{3} \end{array}$

$\boxed{\text{Solució: } \left(\frac{1}{3}, 1\right)}$

⑤ a) $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}$, en ser $\begin{cases} b-a>0 \\ ab>0 \end{cases}$, llavors $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{+}{+} > 0$

i, per tant, $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

b) $2p + 2q = 2(p+q) \leftarrow$ parell

La suma de dos senars és parell

$2p+1+2q+1 = 2(p+q+1)$ parell

c) Sigui $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$

Si $a + \frac{p}{q} = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$, llavors

$a = \frac{r}{s} - \frac{p}{q} = \frac{rq - ps}{qs} \in \mathbb{Q}$

i això és una contradicció.

Per tant, $a + \frac{p}{q}$ és irracional