Institut Pons d'Icart
MATEMÀTIQUES – 1R DE BAT
Final

02/06/15
$15+20+(10+20+5)+20+20=110$ punts
Màxima puntuació: A partir de 90 punts

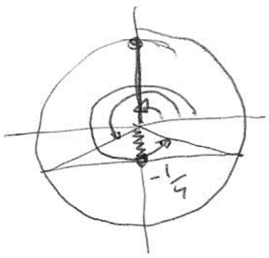
NOM:

Enunciat 1. Resoleu l'equació $2\cos(2x)+3\sin x=1$.

$$2(\cos^2x-\sin^2x)+3\sin x=1 \iff 2(1-2\sin^2x)+3\sin x=1$$

$$\iff -4\sin^2x+3\sin x+1=0 \Rightarrow \sin x=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{-8}=\frac{-3\pm 5}{-8}$$

$$\Rightarrow \sin x = \begin{cases} \nearrow -\frac{1}{4} \\ \searrow 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-14,47751218593^\circ \\ x=90^\circ \end{cases} \quad \overset{\|}{14^\circ 28' 39.04''}$$



$$\boxed{\begin{array}{l} x=90^\circ+m\cdot 360^\circ \\ x=194,48^\circ+m\cdot 360^\circ \\ x=345,52^\circ+m\cdot 360^\circ \end{array}} \begin{array}{l} \\ =194^\circ 28' 39.04''+m\cdot 360^\circ \\ =345^\circ 31' 20.96''+m\cdot 360^\circ \end{array}$$

Enunciat 2. Considereu les rectes $r: ax+4y=6$, $s: x+ay=3$.

a) Per a quins valors de $a\in\mathbb{R}$ són paral·leles, per a quins coincidents i per a quins es tallen.
b) Si $a=4$ trobeu l'angle que formen.

$$\begin{cases} r: ax+4y=6 \\ s: x+ay=3 \end{cases}$$

a)
$$\begin{cases} \frac{a}{1}=\frac{4}{a}\neq\frac{6}{3} & \iff \text{paral·lels} \\ \frac{a}{1}=\frac{4}{a}=\frac{6}{3} & \iff \text{coincidents} \\ \frac{a}{1}\neq\frac{4}{a} & \iff \text{es tallen} \end{cases}$$

paral·leles: $a^2=4$ i $a\neq\frac{12}{6}=2 \Rightarrow \boxed{a=-2}$

coincidents: $a^2=4$ i $a=\frac{12}{6}=2 \Rightarrow \boxed{a=2}$

es tallen: $a^2\neq 4 \Rightarrow \boxed{a\neq 2 \text{ i } a\neq -2}$

b)
$$\begin{cases} 4x+4y=6 \\ x+4y=3 \end{cases} \iff \begin{cases} y=-x+\frac{3}{2} \\ y=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{4} \end{cases}$$

α = angle

$$\tan\alpha=\left|\frac{-1-(-\frac{1}{4})}{1+(-1)(-\frac{1}{4})}\right|=\frac{3/4}{5/4}=\frac{3}{5}$$

$$\boxed{\alpha=30.9637565320 74^\circ=30^\circ 57' 49.52''}$$

Enunciat 3. Donada la funció $f(x) = 8x^3 - x^4$, trobeu:

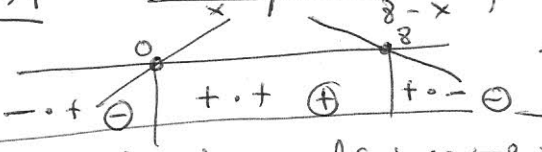
a) Les seves arrels, la seva descomposició en factors primers i estudieu-ne el signe.
b) Estudieu els signes de f' i f''. Deduïu.ne l'estudi de la monotonia, extrems locals, concavitat i punts d'inflexió.
c) Representeu el seu gràfic a partir de la informació recollida.

a) $f(x)=0 \iff x^3(8-x)=0 \iff \boxed{x=0 \text{ o } x=8}$ ← Arrels

$\boxed{f(x) = x^3(8-x)}$ ← Descomposició en factors primers

← signe(x^3)=signe(x)

Signe de f

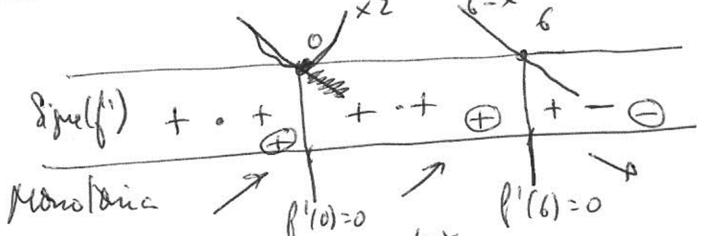


$\boxed{f(x)>0 \iff x \in (0,8) \qquad f(x)<0 \iff x \in (-\infty,0) \cup (8,+\infty)}$

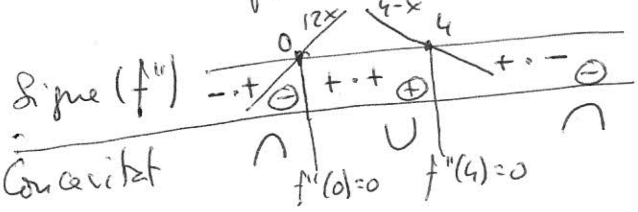
b) $f'(x) = 24x^2 - 4x^3 = 4x^2(6-x)$

$f''(x) = 48x - 12x^2 = 12x(4-x)$

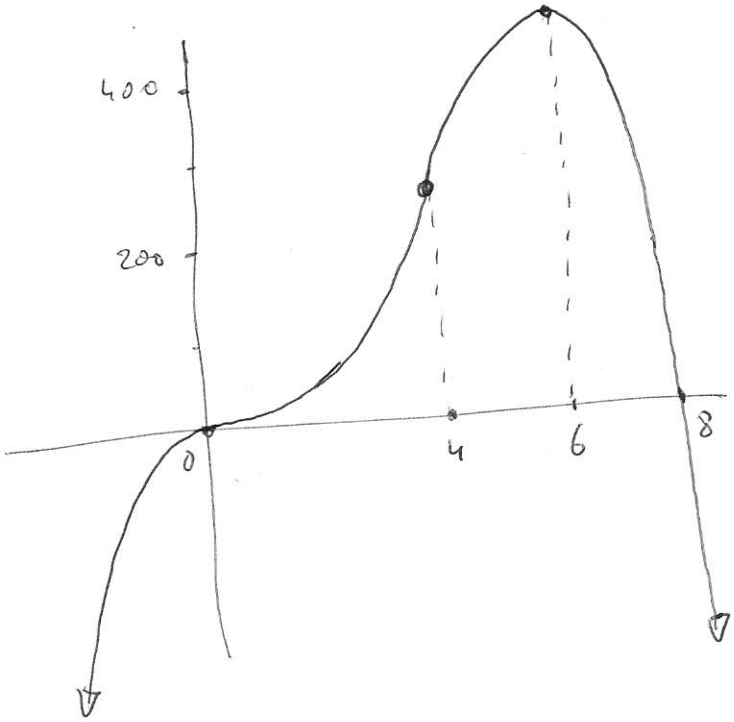
Creix : $(-\infty, 6)$ (*)
Decreix : $(6, +\infty)$
Màx. Local : $(6, f(6)) = (6, 432)$



Còncava amunt ∪ : $(0,4)$
Còncava avall ∩ : $(-\infty,0) \cup (4,+\infty)$
Inflexió : $(0,0)$ i $(4, 256)$

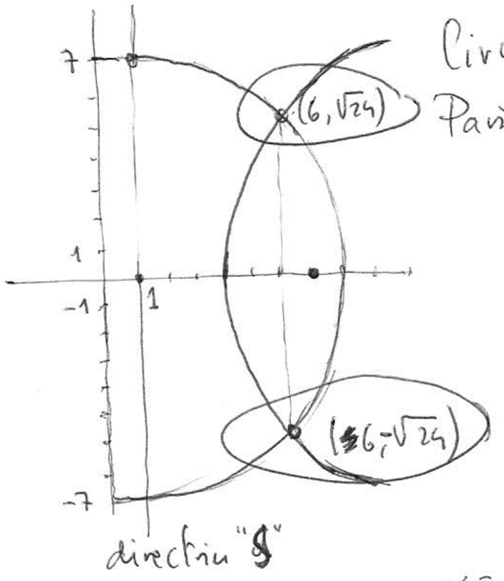


c)



(*) En $x=0$ creix perquè, localment, a l'esquerra la funció és negativa i a la dreta és positiva.

Enunciat 4. Considereu els punts $A(1,0)$, $B(1,7)$ i $C(7,0)$. Trobeu les coordenades dels punts d'intersecció de la circumferència de centre A i que passa per B, amb la paràbola de focus C i directriu la recta que conté A i B.



Circumferència: $(x-1)^2+y^2=49 \leftrightarrow$ (radi $= d(A,B)=7$)

Paràbola: $|x-1|^2 = (x-7)^2+y^2 \leftrightarrow (d(X,s)=d(X,C)$

$x^2-2x+1 = x^2-14x+49+y^2$

$\boxed{12x-48=y^2}$

Intersecció: $\begin{cases} x^2+y^2-2x-48=0 \\ y^2=12x-48 \end{cases}$

Substituïm $x^2+12x-48-2x-48=0$

$x^2+10x-96=0$

$x = \dfrac{-5\pm\sqrt{25+96}}{1} = -5\pm 11 \begin{matrix} \nearrow =6 \\ \searrow =-16 \end{matrix}$

$x=6 \Rightarrow y = \pm\sqrt{72-48} = \pm\sqrt{24} = \pm 2\sqrt{6} \simeq \pm 4{,}9$

$x=-16 \Rightarrow y = \sqrt{-192-48} \notin \mathbb{R}$

$\boxed{\text{Intersecció: } \begin{cases} (6, \sqrt{24}) \\ (6, -\sqrt{24}) \end{cases}}$

Enunciat 5. Donada la funció $f(x) = \dfrac{9}{(x^2-4x)^3}$, trobeu:

a) L'equació de la recta tangent en el punt d'abscissa $x=1$.
b) Les equacions de les seves asímptotes a partir del càlcul de límits.

a) $f'(x) = 9\cdot(-3)(x^2-4x)^{-4}(2x-4) = \dfrac{-27(2x-4)}{(x^2-4x)^4}$

$f'(1) = \dfrac{-27(-2)}{(-3)^4} = \dfrac{2}{3}$

recta tangent: $y-f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y - \dfrac{9}{(-3)^3} = \dfrac{2}{3}(x-1) \Leftrightarrow \boxed{y = \dfrac{2}{3}x - 1}$

$\boxed{2x-3y-3=0}$

b) **A.V.**

$\lim_{x\to 0^+} \dfrac{9}{(x^2-4x)^3} = \dfrac{9}{0^-} = -\infty$

$\lim_{x\to 0^-} \dfrac{9}{(x^2-4x)^3} = \dfrac{9}{0^+} = +\infty$ $\Big\}$ $\boxed{x=0}$

$\lim_{x\to 4^+}$ " $= \dfrac{9}{0^+} = +\infty$

$\lim_{x\to 4^-}$ " $= \dfrac{9}{0^-} = -\infty$ $\Big\}$ $\boxed{x=4}$

A.H

$\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{9}{(x^2-4x)^3} = \dfrac{9}{+\infty} = 0 \Leftarrow \boxed{y=0}$