Institut Pons d'Icart
MATEMÀTIQUES – 1R DE BAT
Nombres, àlgebra i trigonometria

18/11/14
10 + 20 + 20 + 20 + 10 + 10 + 10 + 20 = 120 punts
Màxima puntuació: A partir de 90 punts

NOM:

Enunciat 1. Opereu, simplifiqueu i racionalitzeu quan calgui. En els resultats no han d'aparèixer ni exponents fraccionaris o negatius, ni nombres decimals.

a) $\dfrac{\sqrt{x^2\sqrt[3]{x^5}}}{\sqrt[4]{x^5}} = x^{\frac{2}{2}+\frac{5}{6}-\frac{5}{4}} = x^{\frac{12+10-15}{12}} = x^{7/12} = \boxed{\sqrt[12]{x^7}}$

b) $\dfrac{2}{\sqrt{3+\sqrt{5}}} = \dfrac{2}{\sqrt{3+\sqrt5}}\cdot\dfrac{\sqrt{3-\sqrt5}}{\sqrt{3-\sqrt5}} = \dfrac{2\sqrt{3-\sqrt5}}{\sqrt{9-5}} = \dfrac{2\sqrt{3-\sqrt5}}{2} = \boxed{\sqrt{3-\sqrt5}}$

Enunciat 2. Donat el polinomi $p(x) = 2x^4 - 7x^3 - 7x^2 + 30x$, trobeu les seves arrels, la seva descomposició en factors primers i estudieu el seu signe amb l'ajut de gràfics de rectes i/o paràboles.

Arrels (utilitzem la regla de Ruffini)

	2	−7	−7	+30	0
3		6	−3	−30	0
	2	−1	−10	0	0

$\to x = 3$

(*)

$p(x) = x(2x^3-7x^2-7x+30) = x(x-3)(2x^2-x-10) = 0$

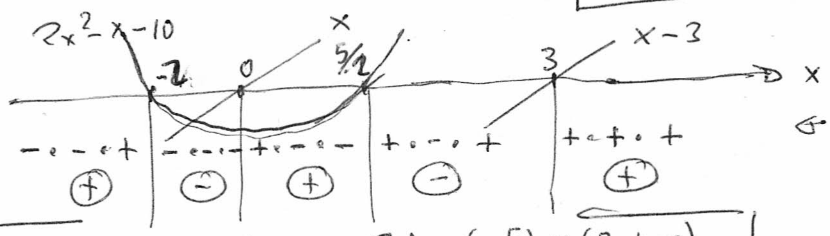
Cerquem la resta d'arrels resolent l'equació $2x^2-x-10=0$ o també $x=0$

$x = \dfrac{1\pm\sqrt{1+80}}{4} = \dfrac{1\pm 9}{4} = \begin{cases} 5/2 \\ -2 \end{cases}$

Finalment, $p(x)=0 \Rightarrow$ les arrels són $\boxed{\{-2, 0, \frac{5}{2}, 3\}}$

Descomposició: $p(x) = 2x(x-3)(x+2)(x-\frac{5}{2}) = \boxed{x(x-3)(x+2)(2x-5)}$

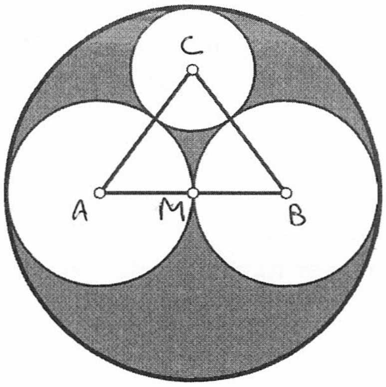
Signe :

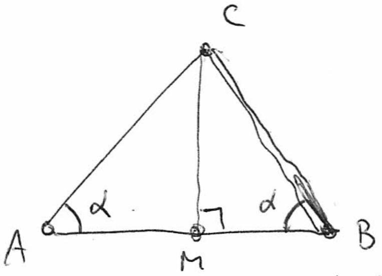


← Observo (*)

$p(x) > 0 \iff x \in (-\infty, -2) \cup (0, \frac{5}{2}) \cup (3, +\infty)$
$p(x) < 0 \iff x \in (-2, 0) \cup (\frac{5}{2}, 3)$
$p(x) = 0 \iff x \in \{-2, 0, \frac{5}{2}, 3\}$

Enunciat 3. En la figura adjunta observem quatre cercles tangents dos a dos, junt amb els seus centres. Considereu el radi de la circumferència més gran com a unitat de mesura. Observeu el triangle de la figura i calculeu els seus angles i la seva àrea.





x = radi de la circumferència petita

Llavors, $\begin{cases} BC = \frac{1}{2} + x \\ MC = 1 - x \\ MB = 1/2 \end{cases}$

Per tant, si utilitzem el teorema de Pitàgores

$$\left(\frac{1}{2}+x\right)^2 = (1-x)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \iff \frac{1}{4} + x + x^2 = 1 - 2x + x^2 + \frac{1}{4} \iff x = 1 - 2x$$

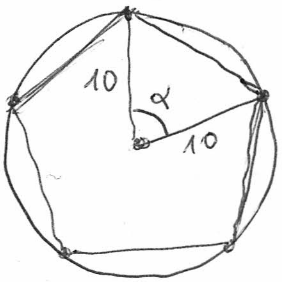
$$\iff 3x = 1 \iff x = \frac{1}{3} \Rightarrow MC = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Llavors, si anomenem $\alpha = \widehat{MAC}$, $\tan\alpha = \frac{MC}{MA} = \frac{2/3}{1/2} = \frac{4}{3}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = 53^\circ 7' 48.37'' \\ \widehat{ACB} = 180^\circ - 2\cdot\alpha = 73^\circ 44' 23.26'' \end{array}}$$

$$\text{Àrea} = \frac{1}{2} AB \cdot MC = \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot \frac{2}{3} = \boxed{\frac{1}{3}u^2}$$

Enunciat 4. Trobeu l'àrea d'un pentàgon regular inscrit en un cercle de radi $r = 10$.



$$\alpha = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

$$\text{Àrea} = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \cdot \sin\alpha = \boxed{250 \cdot \sin 72^\circ \simeq 237{,}76\ u^2}$$

Enunciat 5. Calculeu $\sum_{k=0}^{25}(-1)^k\binom{25}{k}\cdot 2^k=\binom{25}{0}-\binom{25}{1}\cdot 2+\binom{25}{2}\cdot 2^2-\binom{25}{3}\cdot 2^3+\cdots-\binom{25}{25}\cdot 2^{25}$

Identifiquem amb el desenvolupament de $(a-b)^n$ en què
$n=25$, $a=1$, $b=-2$
Llavors, el resultat és $(1-2)^{25}=(-1)^{25}=\boxed{-1}$

Enunciat 6. Resoleu: $\frac{x+2}{x^3-1}-\frac{1}{x-1}=0$

	1	0	0	−1
1		1	1	1
	1	1	1	0

→ descomposició factorial $\left\{ x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)\right.$

$\iff \frac{(x+2)-(x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=0$

$\Downarrow$

$-x^2+1=0$

$\Downarrow$

~~$x=1$~~ → No és bona perquè anul·la el denominador

o

$x=-1$

Enunciat 7. Trobeu el valor màxim del polinomi $p(x)=27x-x^3$ per als valors $x\in\left[0,\sqrt{27}\right]$.

Imposem que el valor x_0 ~~[illegible]~~ que fa $p(x_0)$ màxim és arrel doble de $p(x)-K=0$ en què K és $p(x_0)$.

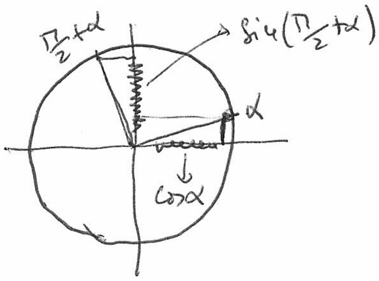
	-1	0	27	0
x_0		$-x_0$	$-x_0^2$	$p(x_0)$
	-1	$-x_0$	$27-x_0^2$	$\boxed{p(x_0)=0}$
x_0		$-x_0$	$-2x_0^2$	
	-1	$-2x_0$	$\boxed{27-3x_0^2=0}$	

$\Longrightarrow x_0^2=\frac{27}{3}=9 \Longrightarrow \boxed{x_0=3} \Rightarrow p(3)=81-27=\boxed{54}$

El valor màxim de $p(x)$ en $[0,\sqrt{27}]$ és 54 i s'assoleix en $x=3$

$\sin\alpha = 1/7$

Enunciat 8. Considereu l'angle α tal que $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. Trobeu, sense calculadora i amb l'ajut de la circumferència trigonomètrica $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)$. Trobeu aquest valor, directament des de l'enunciat, amb calculadora.



En el gràfic observem que

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$$

Llavors en ser $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}$, s'obté

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sqrt{1-\frac{1}{49}}=\sqrt{\frac{48}{49}}=\boxed{\frac{4\sqrt{3}}{7}}$$

iguals!

Calculadora

$$\left.\begin{array}{l}\sin\alpha=\frac{1}{7}\\ 0<\alpha<\pi/2\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = 8^\circ 12' 47.56'' \Rightarrow \frac{\pi}{2}+\alpha = 98^\circ 12' 47.56'' \simeq \boxed{0.9897433186}$$